ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2023, том 57, № 2, с. 238–244

УДК 539.3

СЛУЧАИ ПРЕВРАЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

© 2023 г. А. В. Соловьев[a], *, С. П. Карлов[b], Н. Ю. Шкарин[a]

[a] *Институт энергоэффективных и энергосберегающих решений, Москва, Россия*

[b] *Московский политехнический университет, Москва, Россия*

**e-mail: a.v.soloviev@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.
После доработки 23.12.2022 г.
Принята к публикации 11.01.2023 г.

В химической технологии важное место занимают исследования процессов массо- и теплопередачи в движущихся средах. Очевидно, чтобы изучить эти процессы, необходимо знать, как перемещаются данные среды. Определение поля скоростей жидкостей и газов задача чисто кинематическая. Можно ли ее решить, не прибегая к уравнениям движения, ограничиваясь только уравнением неразрывности?

Ключевые слова: точные решения, гидродинамика, уравнения Эйлера приближение Стокса, несжимаемая жидкость, вязкость, математическое моделирование

DOI: 10.31857/S0040357123020100, **EDN:** EJNEER

Ответ утвердительный, если пользоваться моделью идеальной жидкости, т.е. системой уравнений Эйлера. Если уравнение неразрывности имеет вид: $\mathrm{div}\overline{V}_1 = 0$, то единственное слагаемое, $\mu\Delta\overline{V}$, отличающее систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости от уравнений Эйлера, можно записать в виде $\mu\mathrm{rot\,rot}\,\overline{V}_1$.

Возможны три случая, когда это слагаемое исчезает, автоматически превращая уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в систему, не содержащую вязкости, т.е. в уравнения Эйлера.

Первый случай – математическая модель виртуальной идеальной жидкости, $\mu = 0$

Второй случай – когда $\mu \neq 0$, $\mathrm{rot}\overline{V}_1 = 0$ (безвихревое потенциальное течение). В этом случае уравнение неразрывности превращается в уравнение Лапласа относительно потенциала φ. Необходимость в уравнениях движения отпадает. Поле скоростей находится как поле $\nabla\varphi$.

Третий возможный случай – $\mu \neq 0$, $\mathrm{rot}\overline{V}_2 \neq 0$, но $\mathrm{rotrot}\,\overline{V}_2 = 0$.

Остановимся вначале подробнее на втором случае перехода от уравнений Навье–Стокса к уравнениям Эйлера, когда потенциальное поле $\overline{V}_1$, порождается вихревыми нитями. Такую математическую модель успешно использовал в своих класссических трудах Н.Е. Жуковский. Он называл вихревые нити вихревыми шнурами. В современной терминологии [1] дается точное определение этого важного понятия. Приведем соответствующую цитату: “Ключевым объектом в теории завихренности жидкости является вихревая нить, которая в наиболее общем виде определяется как вихревая трубка, окруженная жидкостью с нулевой завихренностью Если устремить сечение вихревой нити к нулю, сохраняя при этом постоянное значение циркуляции *Γ*, то получим распределение завихренности отличное от нуля только вдоль некоторой пространственной кривой. Такое распределение завихренности будем называть бесконечно тонкой вихревой нитью”.

В случае течения, создаваемого вихревыми нитями, поле скоростей $\overline{V}_1$, ими порождаемое, таково, что $\overline{V}_1 = \mathrm{rot}\overline{A}$. Здесь вектор $\overline{A}$ является векторным потенциалом поля $\overline{V}_1$. Следует отметить, что циркуляционное течение, возбуждаемое вихревой нитью, происходит в соответствии с формулой Стокса, которая преобразует поток ротора, абстрактного вектора через поверхность S, опирающуюся на замкнутый контур L, в криволинейный интеграл по данному контуру.

В гидродинамике абстрактный вектор наделяется конкретным физическим смыслом и рассматривается как вектор скорости движущегося потока жидкости. При этом формула Стокса означает, что поток ротора скорости через поверхность S при пересечении ее с вихревой труб-

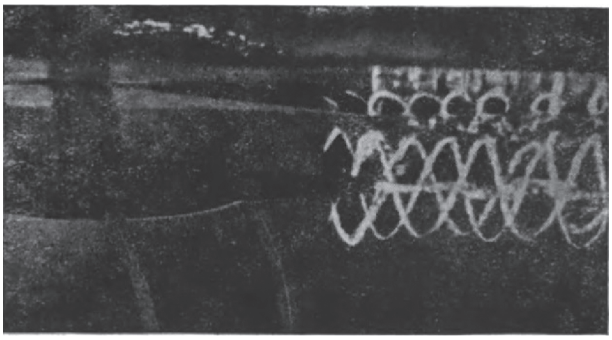

Рис. 1. Фотография Фламма.

кой (трубками) равен циркуляции скорости по контуру L:

$$\iint_S (rot\overline{V_1}\overline{dS}) = \oint_L \left(\overline{V_1}\overline{dl}\right).$$

Циркуляцию Г называют еще напряженностью вихревой трубки (нити). Подчеркнем, что $\mathrm{rot}\,\overline{V}_1 \neq 0$ только в точках, принадлежащих вихревой нити. Во всем остальном пространстве течение безвихревое, поле скоростей $\overline{V}_1$ потенциальное.

Вихревые трубки можно непосредственно наблюдать. Так Н.Е. Жуковский приступил к созданию теории гребного винта [2], заинтересовавшись фотографиями Фламма (рис. 1).

При изучении работы перемешивающих устройств получены фотографии, на которых видны две круговые вихревые трубки (рис. 2).

Вихревые нити на рис. 1 Н.Е. Жуковский назвал свободными вихрями, являющимися продолжением вихрей присоединенных [3]. Дальнейшие исследования в этом направлении позволили Н.Е Жуковскому найти формулы для вычисления подъемной силы и сопротивления крыла самолета, содержащие подлежащую определению величину циркуляции [4]. Найти ее удалось С.А. Чаплыгину [5]. Проверка формул Жуковского—Чаплыгина при испытаниях в аэродинамической трубе дала прекрасное совпадение теории с экспериментами. Оказалось, что опираясь на несодержащие вязкости уравнения Эйлера, можно получить расчетные формулы для вязкой несжимаемой жидкости. Внесение циркуляции Г в потенциальный поток компенсировало пренебрежение вязкостью. Заметим также, что циркуляция скорости имеет размерность кинематической вязкости. Переход к уравнениям Эйлера оказался в данном случае настолько плодотворен, что привел к созданию целого нового направления науки — аэродинамики.

Рассмотрим теперь третий возможный случай превращения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в уравнения Эйлера, когда $\mu \neq 0$, $\mathrm{rot}\overline{V}_2 \neq 0$, но $\mu \mathrm{rot}\mathrm{rot}\overline{V}_2 = 0$.

В этом случае единственное слагаемое в уравнениях движения, содержащее вязкость, исчезает.

Обозначим

$$\mathrm{rot}\ \overline{V}_2 = \overline{\omega}. \tag{1}$$

Данная формула означает, что $\overline{V}_2$ является векторным потенциалом поля $\overline{\omega}$.

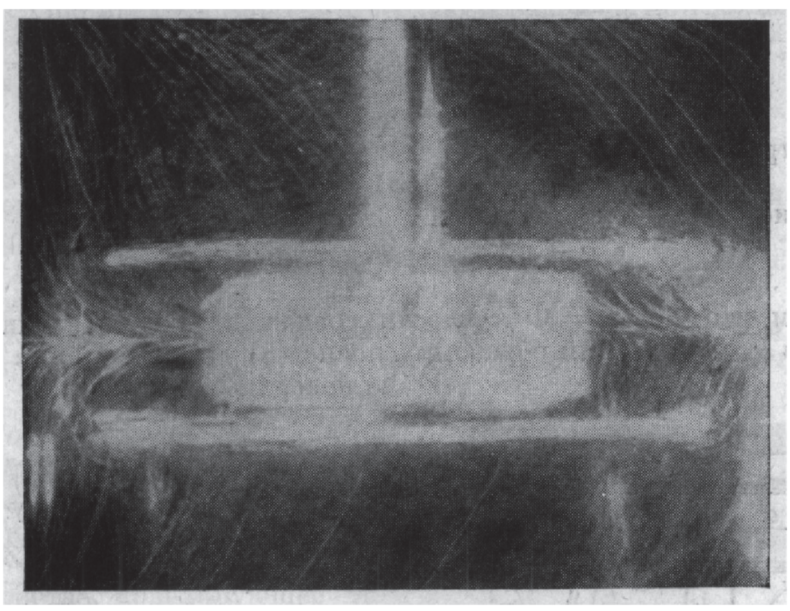

Рис. 2.

Формула Стокса применима к вектору $\overline{\omega}$:

$$\iint_S (\mathrm{rot}\ \overline{\omega}\overline{ds}) = \oint_L (\overline{\omega}\overline{dl}) \tag{2}$$

т.е.

$$\iint_S \left(\mathrm{rot\ rot}\overline{V_2}ds\right) = \oint_L (\mathrm{rot}\overline{V_2}\,\overline{dl}).$$

Следовательно, поток вектора rot $\overline{\omega}$ через поверхность S равен циркуляции $\overline{\omega}$ по контуру L. Внутри вихревой трубки, из которой получена вихревая нить $\mathrm{rot}\overline{\omega} = \mathrm{rot}\mathrm{rot}\overline{V_2} \neq 0$ а всюду за ее пределами $\mathrm{rot}\mathrm{rot}\overline{V_2} = 0$. Значит, во всем остальном пространстве уравнения движения не содержит вязкости ($\mu\mathrm{rot}\mathrm{rot}\overline{V}_2 = 0$). Следовательно, это уравнения Эйлера. Кроме того, за пределами вихревой нити циркулирует вектор $\overline{\omega} = \mathrm{rot}\overline{V_2} \neq 0$.

Это означает, что поле $\overline{V_2}$ вихревое в отличие от потенциального поля $\overline{V_1}$. Частицы жидкости только вращаются. В поле $\overline{V_1}$ частицы жидкости перемещаются вдоль линий тока, но не вращаюся.

При суперпозиции полей $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$, $\overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2}$, движение частиц превращается в винтовое. Это становится возможным, когда внутри вихревой трубки, порождающей движение, присутствуют одновременно два потока $\mathrm{rot}\overline{V_1}$ и $\mathrm{rot}\mathrm{rot}\overline{V_2}$.

Если применить такой способ суперпозиции для вихревой круговой нити

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

С циркуляцией $\Gamma = \oint_L \left(\overline{V_1}\,\overline{dl}\right)$ в поле $\overline{V_1}$ и циркуляцией $\Gamma_\omega = \oint_L \left(\overline{\omega}\overline{dl}\right)$ в поле $\overline{\omega} = \mathrm{rot}\overline{V_2}$ [10], то удается получить неожиданные результаты. Поскольку векторный потенциал $\overline{A} = \{0, A_\varphi, 0\}$ в поле $\overline{V_1}$ имеет лишь одну ненулевую окружную составляющую в цилиндрической системе координат [8], то и вектор скорости $\overline{V_2}$, являющийся векторным потенцилом в поле $\overline{\omega} = \mathrm{rot}\overline{V_2}$, имеет лишь одну окружную составляющую скорости, отличающуюся от нуля, $\overline{V_2} = \{0, V_{2\varphi}, 0\}$.

Это означает, что найдена неизвестная до сих пор окружная скорость, порождаемая круговой вихревой нитью, и отличатся она от A_φ только множителем Γ_ω вместо Γ:

$$V_\varphi = \frac{a\Gamma_\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\alpha}}. \tag{3}$$

Отсутствие теоретических результатов в этой области приводило к тому, что в инженерной практике использовали приближенную модель вихря Рэнкина [6], в которой вовсе не учитывалась радиальная и вертикальная составляющие скорости $\overline{V}_1$. Считали, что эти составляющие много меньше окружной, хотя это не подтверждалось экспериментами.

Модель круговых вихревых нитей не плод фантазии, они реально наблюдаются, например, при работе лопастной мешалки [7] и четко видны на рис. (2), и формулы для $V_{1\rho}$ и V_{1z} хорошо известны [8]:

$$V_{1\rho} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad V_{1z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}. \tag{4}$$

Игнорирование вертикального перемешивания, отказ от его учета, приводит к ошибочным выводам. Так в известном парадоксе Эйнштейна считается необъяснимым тот факт, что чаинки собираются в центре на дне стакана с чаем вопреки действию центробежной силы. Однако, если учесть наличие $V_{1\rho}$ и V_{1z}, то парадокс можно объяснить.

Чаинки собираются в центре на дне стакана в конце процесса перемешивания, когда воронка на поверхности начинает убывать (*глубина воронки на поверхности жидкости начинает уменьшаться*), стремясь к исходному *равновесному* состоянию горизонтальной плоскости. Частицы жидкости при этом поднимаются из глубины воронки и опускаются вблизи стенки стакана, как это изображено на Рис.3. Возникает циркуляция, обеспечивающая движение чаинок от **периферии к центру вблизи дна стакана**.

Суперпозиция полей $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$ позволяет решать трехмерные задачи, и избегать ошибочных выводов, а также объясняет то, что раньше объяснить не удавалось. Так, в 1967 г. была опубликована статья [9], в которой описано как с помощью вибрации возбуждалась система вихрей, расположенных в шахматном порядке с чередованием направления вращения (рис. 4).

Не удавалось понять, почему колебания в вертикальном направлении вызывают вращение. Теперь можно понять, почему так происходит. Каждый вихрь был виден благодаря воронке с приподнятыми краями, напоминающий пару тороидального и осевого вихря, описанных в статье [10].

Там же представлен график, показывающий, как меняется ω_z в зависимости от расстояния от оси, проходящей через воронку. Из представленного там рисунка, видно, что ω_z меняется скачкообразно, резко возрастая в малой окрестности от оси OZ. Подобное явление можно отчетливо на-

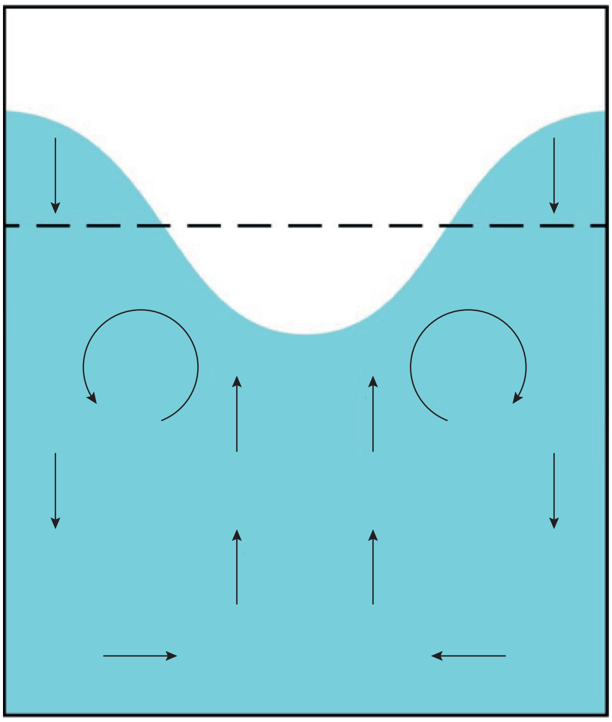

Рис. 3.

блюдать в экспериментах с псевдоожиженными сыпучими телами. Видно также, что все твердые частицы вращаются. Это доказывает, что движение их винтовое, как и должно быть при суперпозиции полей $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$.

Из вышеизложенного следует, что третий случай превращения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в уравнения Эйлера весьма перспективен для исследований в химической технологии. С помощью этой модели можно определить, например, окружную составляющую скорости в сферическом сосуде с мешалкой.

С этой целью рассмотрим сперва виртуальную сферу в неограниченном жидком пространстве с радиусом R и центром в начале координат. Поместим одну круговую вихревую нить радиуса а и напряженности Γ_a внутри сферы, а другую радиуса b и напряженности Γ_b вне сферы таким образом, чтобы вторая нить была зеркальным отображением первой относительно воображаемой сферы. Тогда $R^2 = R_a R_b$, где $R_a = M_a O$ и $R_b = M_b O$, как изображено на рис. 5а. Здесь точки M_a и M_b лежат на одной образующей конуса с вершиной в начале координат.

Значение окружной составляющей A_φ векторного потенциала $\overline{A} = \{0, A_\varphi, 0\}$ в произвольной точке M виртуальной сферы согласно [8] равно:

$$A_\varphi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a\Gamma_a}{M_a M} - \frac{b\Gamma_b}{M_b M}\right)\cos\varphi d\varphi, \qquad (5)$$

где Γ_a и Γ_b циркуляции нитей a и b,

$$\frac{1}{M_a M} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R_a^2 - 2RR_a\cos\theta}} = \\ = \frac{1}{R\sqrt{1 + \left(\frac{R_a}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_a}{R}\right)\cos\theta}};$$

и

$$\frac{1}{M_b M} = \frac{1}{R\sqrt{1 + \left(\frac{R_b}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_b}{R}\right)\cos\theta}}.$$

Здесь $\left[1 + \left(\frac{R_a}{R}\right)^2 2\left(\frac{R_a}{R}\right)\cos\theta\right]^{-1/2}$ и $\left[1 + \left(\frac{R_b}{R}\right)^2 2\left(\frac{R_b}{R}\right)\cos\theta\right]^{-1/2}$ являются производящими функциями полиномов Лежандра [11]. Следовательно, формуле (5) можно придать вид:

$$A_\varphi = \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left[a\Gamma_a\left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_b\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}\right]\times \\ \times P_n(\cos\theta_1)\cos\varphi d\varphi. \qquad (6)$$

Очевидно, $A_\varphi = 0$, когда $a\Gamma_a\left(\frac{R_a}{R}\right)^n = b\Gamma_a\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}$ при любых целых n.

Учитывая, что $\frac{a}{b} = \frac{R_a}{R_b}$ и $R = \sqrt{R_a R_b}$ получим:

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (7)$$

независимо от n.

Уравнение $2\pi\rho A = \text{const}$ согласно [8] определяет поверхность тока, непроницаемую для жидких частиц. Следовательно, условия (7) означают, что сфера радиуса R, является такой поверхностью. Таким образом, мы можем теперь рассматривать ее как реальную (а не виртуальную) стенку сферического сосуда с круговой вихревой нитью радиуса a внутри нее.

Если теперь зеркально отобразить часть этой картины при $Z > 0$ относительно плоскости $Z = 0$, мы снова приходим к выводу, что $\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. В этом случае вихревые нити a и b будут находиться в области $Z < 0$.

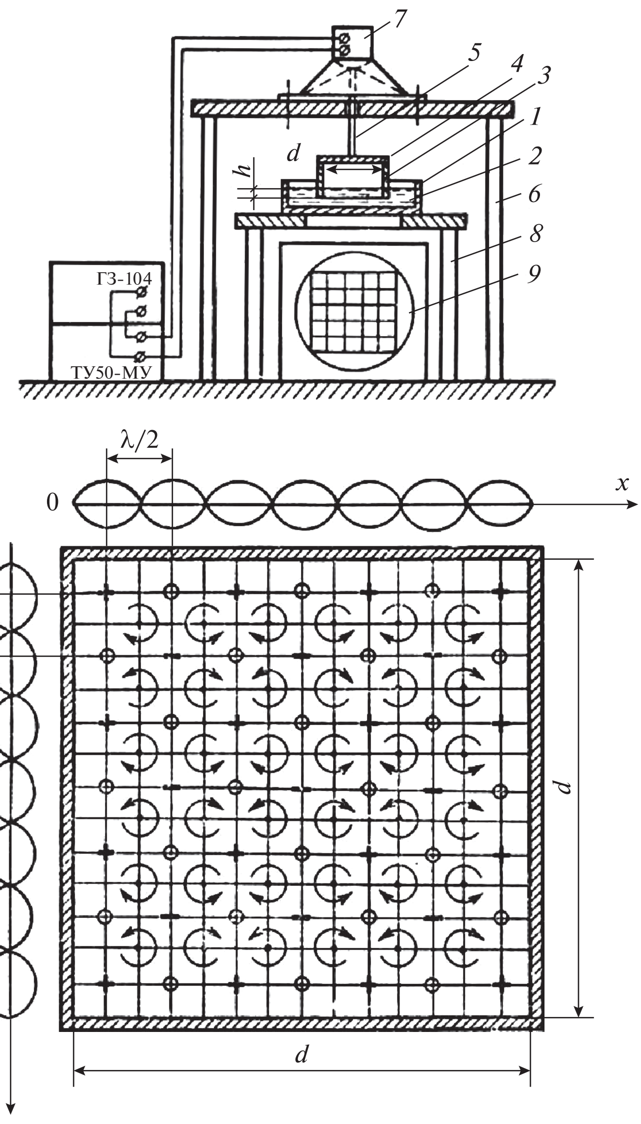

Рис. 4.

Суммарная окружная составляющего векторного потенциала $\overline{A} = \{0, A_\varphi, 0\}$ поля $\overline{V}_1$ в точке M, генерируемая от четырех вихревых нитей, изображаемых на рис. 5б, записывается в виде:

$$A_\varphi(M) = \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\left[a\Gamma_a\left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_b\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}\right]\times\right.$$
$$\times P_n(\cos\theta_1)\cos\varphi d\varphi -$$
$$\left.-\left[a\Gamma_a\left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_b\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}\right]\right\}\times$$
$$\times P_n\ (\cos\theta_2\cos\varphi d\varphi\}. \quad (8)$$

Здесь точка M находится внутри сферы радиуса $OM = R < \sqrt{R_a R_b}$.

Формула (8) позволяет найти окружную составляющую поля $\overline{V_2} = \{0, V_{2\varphi}, 0\}$ просто заменяя циркуляции Γ_a и Γ_b на $\Gamma_{\omega a}$ и $\Gamma_{\omega b}$:

$$V_{2\varphi}(M) = \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\left[a\Gamma_{\omega a}\left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_{\omega b}\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}\right]\times\right.$$
$$\times P_n(\cos\theta_1)\cos\varphi d\varphi -$$
$$\left.-\left[a\Gamma_{\omega a}\left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_{\omega b}\left(\frac{R}{R_b}\right)^{n+1}\right]\right\}\times$$
$$\times P_n(\cos\theta_2)\cos\varphi d\varphi\}. \quad (9)$$

Суперпозиция полей $\overline{V_1} + \overline{V_2}$ решает трехмерную задачу для течения в сферическом сосуде с мешалкой. Возможности третьего способа пере-

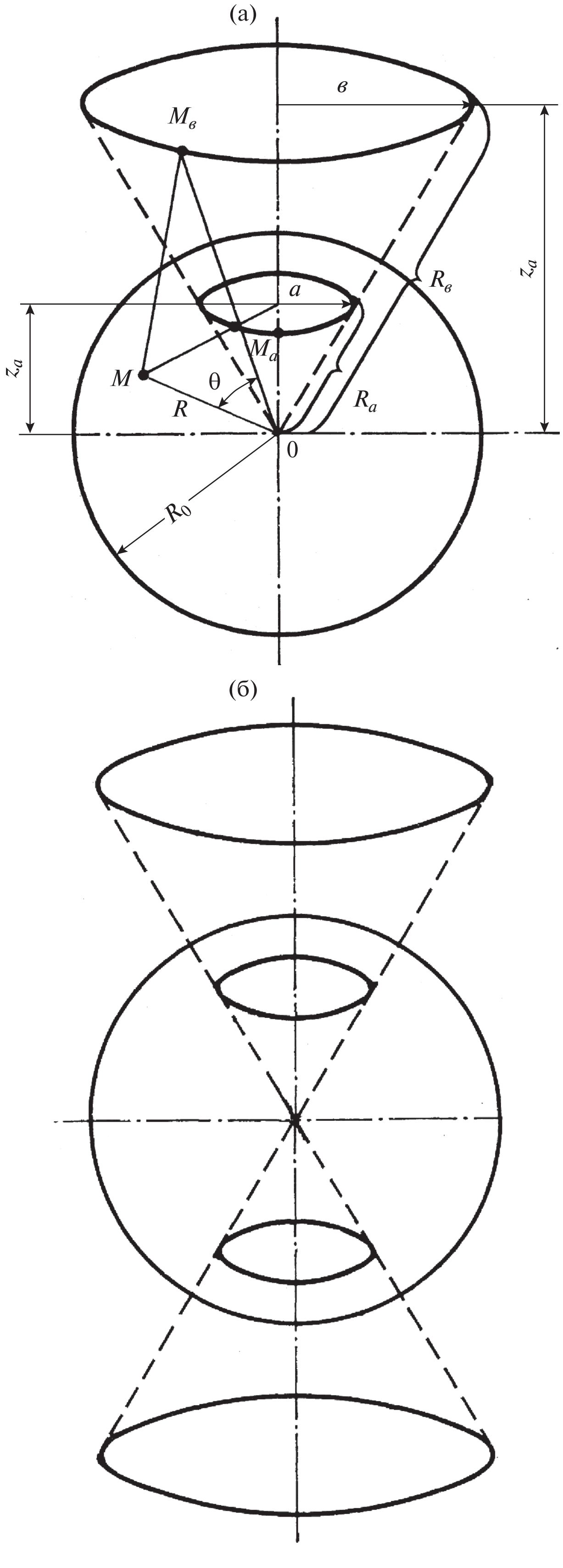

Рис. 5. (а) Схема расположения круговых вихревых нитей относительно сферы. Рис. 5б.

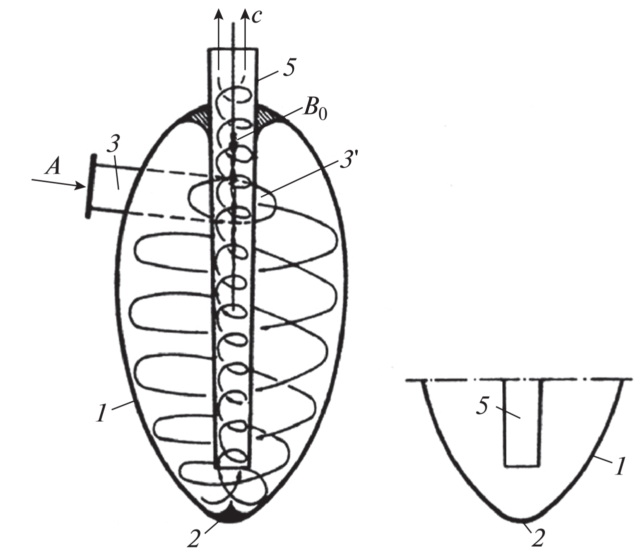

Рис. 6. Реакционная камера (*1*) имеет яйцевидную или грушевидную форму на большей части своей длины и на ней – предпочтительно у тупого полюса один или несколько вставные патрубки (*3*) для обрабатываемой среды (*A*) присоединены тангенциально. на тупом полюсе реакционной камеры (*1*) установлен патрубок (*5*) вставляется с аксиальной потайной головкой, которая предпочтительно сужается внутрь, через которую продукт реакции (*C*) выбрасывается вращательным движением, в то время как соответствующая реакция одновременно продолжается, и вторичный воздух (B_0) предпочтительно вводится в противоположном направлении в в результате образовался центральный всасывающий вихрь.

хода от уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости к уравнениям Эйлера, полезны не только при исследовании работы перемешивающих устройств, но и вихревых аппаратов.

В качестве примера можно предложить фрагмент из патента Schauberger Biotechnik AG DE1442734.

Достаточно взглянуть на рисунок, как обнаруживается комбинация из осевого и тороидального вихрей, рассмотренных в статье [10].

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\bar{V}$	вектор скорости
ρ, φ, z	цилиндрические координаты
$\bar{A}$	векторный потенциал
A_φ	окружная составляющая векторного потенциала
Γ	циркуляция скорости
Γ_ω	циркуляция ротора скорости
a, b	радиусы круговых вихревых нитей
Γ_a, Γ_b	циркуляция круговых вихревых нитей

ψ	функция тока
μ	коэффициент динамической вязкости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеенко Г.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН. 2003 г.
2. *Жуковский Н. Е.* Вихревая теория гребного винта (статьи 1–4). ПОЛН. собр. СОЧ. Т. IV. ГРАЛ. 1937.
3. *Жуковский Н.Г.* Теоретические основы воздухоплавания. Собрание сочинений. Т. VI. 1948 г.
4. *Чаплыгин С.А.* К общей теории крыла моноплана. Собрание сочинений. Т. II. 1948 г.
5. Гзовский Степан Яковлевич. Исследование процесса перемешивания в жидких средах радиально-лопастными мешалками : диссертация ... доктора технических наук: 05.00.00 / С.Я. Гзовский. Москва, 1963. 216 с.: ил.
6. *Соловьев А.В., Туманов Ю.В., Муслаев И.М.* О радиальной и осевой составляющих поля скоростей жидкости в сферическом сосуде с мешалкой. ТОХТ. 1967. Т. 1. № 2.
7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В.* Теоретическая гидродинамика. Гостехиздат. М., 1955 г.
8. *Кардашев Г.А., Салосин А.В., Манукян С.Г., Соловьев А.В.* О возбуждении вихревых течений колебаниями поверхности жидкости // Коллоидный журн. АН СССР. 1987. Т. XLIX. Вып. 1. С. 154–157.
9. *Соловьев А.В., Казенин Д.А., Карлов С.П., Шкарин Н.Ю.* О влиянии вихрей на диффузию и теплопередачу. ТОХТ. Т. 46. № 5. С. 576–582.
10. *Тихонов А.И., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. 1953, Главиздат СССР, с. 324.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М. Издательство “Наука”, 1970 г. с. 661.