ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 37–49

УДК 519.658

МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ВЫПУКЛОГО ЗАМКНУТОГО МНОЖЕСТВА

Ю. А. Черняев

(420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский нац. исследовательский техн. ун-т им. А.Н. Туполева, Россия)

e-mail: chernyuri@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2017 г.

Предлагается обобщение метода проекции градиента на случай невыпуклых множеств ограничений, представляющих собой теоретико-множественное пересечение гладкой поверхности с выпуклым замкнутым множеством. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости рассматриваемого метода. Библ. 18.

Ключевые слова: гладкая поверхность, выпуклое замкнутое множество, метод проекции градиента, необходимые условия локального минимума, сходимость алгоритма.

DOI: 10.1134/S0044466919010058

ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов к решению задачи вида $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, в случае гладкой функции $\varphi(x)$ и выпуклого замкнутого допустимого множества X состоит в построении итерационного процесса по правилу

$$x_0 \in X, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k \left(\mathrm{Pr}_X(x_k - \beta_k \varphi'(x_k)) - x_k\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $\alpha_k \in (0;1]$ и $\beta_k \in (0;\infty)$ – параметры алгоритма. В силу выпуклости и замкнутости множества X вспомогательная задача проектирования всегда имеет единственное решение. Если его нахождение не требует привлечения трудоемких итерационных процедур, то данный метод решения исходной задачи, называемый *методом проекции градиента*, может оказаться вполне эффективным.

В [1]–[4] изучаются различные модификации указанного метода для задач с неточно заданными исходными данными и вопросы, связанные со скоростью сходимости метода. В [5] и [6] предлагается подход к решению задач линейного и нелинейного программирования, объединяющий идеи метода проекции градиента и метода барьерных функций. Кроме этого, к настоящему времени разработаны модификации метода, предназначенные для решения более сложных вычислительных задач. Например, в [7] предлагается алгоритм решения класса выпуклых задач минимизации с ограничениями типа неравенств в бесконечномерных пространствах, а в [8] на основе метода проекции градиента строится алгоритм аппроксимации квазирешений класса операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

Возвращаясь к задаче $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, отметим, что в случае невыпуклого допустимого множества X она существенно усложняется и для ее решения обычно приходится использовать более трудоемкие методы. К числу наиболее распространенных из них относятся метод модифицированной функции Лагранжа и метод линеаризации. Однако для некоторых классов задач в последние годы было разработано обобщение метода проекции градиента. Например, в [9] и [10] изучается случай допустимого множества с непустой внутренностью, представимого в виде теоретико-множественной разности двух выпуклых множеств F и G, где граница G является гладким многообразием. Кроме этого, в [11] рассмотрено допустимое множество с пустой внутренностью, представляющее собой гладкую поверхность S общего вида, а в [12] – являющееся теоретико-множественным пересечением сферы S и выпуклого замкнутого множества F. Иногда (например, при задании F с помощью линейных неравенств) для решения перечисленных задач целесообразнее использовать алгоритмы метода условного градиента, изложенные в [13] и [14].

В данной статье предлагается обобщение метода проекции градиента на случай множеств ограничений, представимых в виде пересечения гладкой поверхности S и выпуклого замкнутого множества F. Идея алгоритма состоит в том, что на каждой итерации строится касательная гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ к поверхности S в точке $x_k \in F \cap S$, после чего определяется точка $z(x_k)$ как решение задачи проектирования точки $x_k - \beta\varphi'(x_k)$, где β – некоторая положительная константа, на $F \cap \Lambda(x_k)$. Далее задается число $\alpha_k \in (0; 1]$ и определяется произвольная проекция точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на $F \cap S$. Найденная проекция принимается за следующее приближение x_{k+1}. В настоящей работе показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий последовательность $\{x_k\}$ сходится к точкам, удовлетворяющим необходимым условиям локального минимума.

Задача проектирования $x_k - \beta\varphi'(x_k)$ на $F \cap \Lambda(x_k)$ в силу выпуклости и замкнутости F и $\Lambda(x_k)$ всегда имеет единственное решение, однако его нахождение не всегда является простым. Если, например, F представляет собой шар в E^n, то решение данной задачи может быть выписано в явном виде и его получение не вызывает затруднений. Если F представляет собой теоретико-множественное пересечение нескольких полупространств, задаваемых линейными неравенствами, то данная задача равносильна задаче квадратичного программирования и может быть решена с помощью конечношаговых алгоритмов. Если же F имеет более сложную структуру, то решение данной задачи проектирования, как правило, требует привлечения итерационных процедур.

Наиболее сложной является задача отыскания проекции точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на невыпуклое множество $F \cap S$. В [15] предлагается итерационный алгоритм проектирования точки на множество вида $\{x \in A : g(x) = 0\}$, где A – выпуклый компакт, а $g(x)$ является липшицевой или гёльдеровой на A. При использовании метода, излагаемого в данной работе, на каждой итерации требуется проектировать на $F \cap S$ различные точки отрезка $[x_k, z(x_k)]$, при этом расстояние от проектируемой точки до ее проекции не может превосходить величину $\|x_k - z(x_k)\|$, так как $x_k \in F \cap S$, поэтому в качестве A можно брать замкнутый шар с центром в проектируемой точке и радиусом, не меньшим этой величины. Если $g(x) \in C^1(E^n)$, то $g(x)$ на любом компакте является липшицевой, поэтому для приближенного решения задачи проектирования на $F \cap S$ при реализации предлагаемого метода может быть использован алгоритм, рассмотренный в [15]. Использование указанного алгоритма возможно и для приближенного нахождения проекции точки $x_k - \beta\varphi'(x_k)$ на выпуклое множество $F \cap \Lambda(x_k)$, так как гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ задается линейным равенством.

Необходимо отметить, что привлечение итерационных процедур для решения задачи проектирования точки на невыпуклое множество существенно увеличивает объем вычислений на итерации при использовании метода, предлагаемого в данной работе. Поэтому следует ожидать, что предлагаемый метод для многих конкретных задач минимизации окажется менее эффективным по сравнению с методом модифицированной функции Лагранжа или методом линеаризации, о которых упоминалось выше. Однако, как уже подчеркивалось в [11], названные методы имеют ряд недостатков, существенно ограничивающих их практическое использование. В связи с этим возможны ситуации, в которых для минимизации гладкой функции на допустимом множестве рассматриваемого вида целесообразно использовать метод проекции градиента, несмотря на его сравнительно невысокую эффективность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, в которой X непусто и представляет собой теоретико-множественное пересечение выпуклого замкнутого множества F, имеющего непустую внутренность, и поверхности $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$, где $g(x) \in C^1(E^n)$ и $\|g'(x)\| \neq 0$ при любом $x \in S$. Предполагается, что $\varphi(x) \in C^1(X)$.

Пусть $n(x) = g'(x)\|g'(x)\|^{-1}$ – орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $\Lambda(x) = \left\{y \in E^n : \langle n(x), y - x\rangle = 0\right\}$ – касательная гиперплоскость к S в точке $x \in S$; $z(x)$ – проекция точки $x - \beta\varphi'(x)$, $x \in X$, на $F \cap \Lambda(x)$, где β – фиксированное положительное число. В силу гладкости $g(x)$ гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S, а в силу выпуклости и замкнутости F и $\Lambda(x)$ проекция $z(x)$ определяется однозначно.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Алгоритм

Шаг 0. Задается $\beta > 0$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in X$ есть k-е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ и точка $z(x_k)$.

Шаг 3. Если $x_k = z(x_k)$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Задается $\alpha_k \in (0;1]$.

Шаг 5. Пусть x_{k+1} – проекция точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на X.

Шаг 6. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множество S в силу непрерывности $g(x)$ является замкнутым, поэтому в силу замкнутости F множество $X = F \cap S$ тоже замкнуто, а значит, задача проектирования на него всегда имеет хотя бы одно решение. Действительно, пусть $\tilde{x} \in R^n$, $y \in X$ и $T = \left\{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\| \le r\right\}$, где r – произвольное число, не меньшее $\|\tilde{x} - y\|$, тогда каждая проекция точки $\tilde{x}$ на X является также проекцией на $T \cap X$ и наоборот. Но $\psi(x) = \|x - \tilde{x}\|$ непрерывна при любом фиксированном $\tilde{x}$, а значит, в силу компактности $T \cap X$, вытекающей из компактности T и замкнутости X, существует $\min\limits_{x \in T \cap X} \|x - \tilde{x}\|$, поэтому задача проектирования $\tilde{x}$ на X имеет решение.

Будем считать, что при выбранном начальном приближении $x_0 \in X$ выполняются следующие условия:

а) множество $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$ ограничено;

б) касательная гиперплоскость к поверхности S, построенная в произвольной точке $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} F$ (последнее означает, что касательная гиперплоскость не является опорной к F).

В силу непрерывности $\varphi(x)$, множество $M(x_0)$ компактно, при этом в силу непрерывности $\varphi'(x)$, существует $d_0 = \beta \max\limits_{x \in M(x_0)} \|\varphi'(x)\| < \infty$, а в силу сжимающего свойства проектирования на выпуклое множество $\Lambda(x)$, при любом $x \in M(x_0)$ имеем $\|x - z(x)\| \le \beta\|\varphi'(x)\| \le d_0$.

Пусть $D(x) = \left\{y \in R^n : \|x - y\| \le 2d_0\right\}$ – шар радиуса $2d_0$ с центром в точке x, а Y – такое выпуклое компактное множество, что для любого $x \in M(x_0)$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу компактности Y и замкнутости S пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min\limits_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$, так как $g(x) \in C^1(E^n)$ и $\|g'(x)\| \ne 0$ при любом $x \in S$. Заметим, что если $x \in M(x_0)$, то при любом $\alpha \in (0;1]$ произвольная проекция точки $x + \alpha(z(x) - x)$ на множество X лежит в Y, поскольку

$$\begin{gathered}\|x - \mathrm{Pr}_X(x + \alpha(z(x) - x))\| \le \|x - (x + \alpha(z(x) - x))\| + \\ + \|(x + \alpha(z(x) - x)) - \mathrm{Pr}_X(x + \alpha(z(x) - x))\|,\end{gathered}$$

где первое слагаемое в правой части неравенства равно $\alpha\|z(x) - x\|$ и не превосходит d_0, а второе слагаемое не больше первого, так как $x \in X$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1,1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа M, что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \le M\|x - y\|$. Тогда из показанного в [11] следует, что при $N = M/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \le N\|x - y\|$.

В силу замкнутости F и компактности Y пересечение этих множеств компактно. Поскольку касательная гиперплоскость к S, построенная в произвольной точке множества $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} F$, то она имеет непустое пересечение и с $\operatorname{int} F \cap \operatorname{int} Y$. Действительно, пусть $\tilde{x} \in M(x_0)$ и $h \in \operatorname{int} F \cap \Lambda(\tilde{x})$, тогда $(\tilde{x}; h] \subset \operatorname{int} F \cap \Lambda(\tilde{x})$, так как множества F и $\Lambda(\tilde{x})$ выпуклы. Из определения множества Y следует, что любая точка из $(\tilde{x}; h] \cap \operatorname{int} D(\tilde{x})$ лежит одновременно в $\Lambda(\tilde{x})$, в $\operatorname{int} F$ и в $\operatorname{int} Y$. В силу произвольности рассмотренных точек $\tilde{x} \in M(x_0)$ и $h \in \operatorname{int} F \cap \Lambda(\tilde{x})$, отсюда вытекает справедливость требуемого утверждения.

Из непрерывности $n(x)$ на компакте $S \cap Y$ вытекает непрерывность $\psi(x, y) = \langle n(x), y - x \rangle$ по (x, y) на декартовом произведении $S \cap Y$ и $F \cap Y$, а поэтому в силу компактности $F \cap Y$ и показанного в [16, с. 84] функции $\psi_1(x) = \max\limits_{y \in F \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ и $\psi_2(x) = \min\limits_{y \in F \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ непрерывны на $S \cap Y$. Поскольку касательная гиперплоскость к S, построенная в произвольной точке множества $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} F \cap \operatorname{int} Y$, то при любом фиксированном $x \in M(x_0)$ имеет место $\psi_1(x) > 0$ и $\psi_2(x) < 0$, поэтому в силу компактности $M(x_0)$ существуют положительные константы $\varepsilon_1 = \min\limits_{x \in M(x_0)} \psi_1(x)$ и $\varepsilon_2 = -\max\limits_{x \in M(x_0)} \psi_2(x)$.

Обозначив через h_x проекцию точки $h \in E^n$ на гиперплоскость $\Lambda(x)$, $x \in S$, получим $\langle n(x), h - x \rangle = \langle n(x), h - h_x \rangle + \langle n(x), h_x - x \rangle$, где второе слагаемое равно нулю, так как $x, h_x \in \Lambda(x)$ и $n(x)$ ортогонален $\Lambda(x)$, а первое слагаемое с точностью до знака равно расстоянию от h_x до $\Lambda(x)$, так как векторы $n(x)$ и $h - h_x$ коллинеарны и $\|n(x)\| = 1$. Это означает, что расстояние от точки $h \in E^n$ до гиперплоскости $\Lambda(x)$, $x \in S$, равно $|\langle n(x), h - x \rangle|$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В силу компактности Y существует $d = \max\limits_{x, y \in Y} \|x - y\| < \infty$. Пусть $\varepsilon = 0{,}5 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *При любом $x \in S$, для которого*

$$\min_{y \in M(x_0)} \|x - y\| \le \frac{\varepsilon}{Nd + 1},$$

имеет место $\psi_1(x) \ge \varepsilon$, $\psi_2(x) \le -\varepsilon$.

Доказательство. Для любых $x, y \in S \cap Y$ и $h \in F \cap Y$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} |\langle n(x), h - x \rangle - \langle n(y), h - y \rangle| &= |\langle n(x) - n(y), h - x \rangle + \langle n(y), h - x \rangle - \langle n(y), h - y \rangle| \le \\ &\le |\langle n(x) - n(y), h - x \rangle| + |\langle n(y), y - x \rangle| \le N\|x - y\|\|h - x\| + \|n(y)\|\|x - y\| \le \\ &\le (Nd + 1)\|x - y\|, \end{aligned}$$

так как $\|h - x\| \le d$, поскольку $h, x \in Y$, и $\|n(y)\| = 1$. Отсюда следует, что если $x, y \in S \cap Y$ и $\|x - y\| \le \dfrac{\varepsilon}{Nd + 1}$, то для любого $h \in F \cap Y$ имеет место $|\langle n(x), h - x \rangle - \langle n(y), h - y \rangle| \le \varepsilon$, откуда вытекает справедливость леммы.

Замечание 1. В силу показанного выше, если $x_* \in M(x_0)$, то $\left\|x_* - \Pr_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))\right\| \le \dfrac{2d_0}{2^s}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Решая относительно s неравенство $\dfrac{2d_0}{2^s} \le \dfrac{\varepsilon}{Nd + 1}$, получаем $s \ge \log_2 \dfrac{2d_0(Nd + 1)}{\varepsilon}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что при целых $s \ge \overline{s}_1$, где $\overline{s}_1$ – наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, при котором выполняется указанное неравенство, имеет место

$$\psi_1(\Pr_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \ge \varepsilon, \quad \psi_2(\Pr_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \le -\varepsilon.$$

Считая $x \in X$, вводим следующие обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0,1,2,\ldots$; $u_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на поверхность S; $p_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на множество X; $c_s(x)$ – решение задачи

$$\langle n(u_s(x)), y - u_s(x)\rangle \to \min, \quad y \in F \cap Y,$$

при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x)\rangle \geq 0$ и задачи

$$\langle n(u_s(x)), y - u_s(x)\rangle \to \max, \quad y \in F \cap Y,$$

при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x)\rangle < 0$. Отметим, что при фиксированных $x \in X$ и $s \in \{0,1,2,\ldots\}$ проекции $u_s(x)$ и $p_s(x)$ в общем случае определяются не однозначно, так как множества S и X, вообще говоря, не являются выпуклыми. Точка $c_s(x)$ при выбранной проекции $u_s(x)$ тоже может определяться не однозначно, так как она есть точка минимума или максимума линейной функции, не являющейся строго выпуклой или строго вогнутой.

Пусть x_* – произвольная точка множества $M(x_0)$, которая не совпадает с $z(x_*)$. Введем следующие обозначения: $L_s(x_*)$ – прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (в силу показанного в [11] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ – луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку $c_s(x_*)$. С целью сокращения записи в доказательствах приведенных ниже вспомогательных утверждений вместо $y_s(x_*)$, $c_s(x_*)$, $u_s(x_*)$, $p_s(x_*)$, $L_s(x_*)$, $\tilde{L}_s(x_*)$ при фиксированном s будем записывать соответственно y, c, u, p, L, $\tilde{L}$.

Лемма 2. *Пусть $x_* \in M(x_0)$, $s \in \{0,1,2,\ldots\}$, v – произвольная точка множества Y, а δ и $\bar{\delta}$ – расстояния от точки v, соответственно, до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда если v лежит на поверхности S, то при $0 < \delta < \frac{2K}{M}$ имеет место $\bar{\delta} \geq \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$.*

Доказательство. Поскольку $u, v \in Y$, то в силу показанного в [17, с. 100] имеет место соотношение

$$|g(v) - g(u) - \langle g'(u), v - u\rangle| \leq 0{,}5M\,\|v - u\|^2.$$

Если $v \in S$, то $g(u) = g(v) = 0$, так как $u \in S$, поэтому $|\langle g'(u), v - u\rangle| \leq 0.5M\,\|v - u\|^2$. Обозначив через w проекцию v на $\Lambda(u)$, получим $\langle n(u), v - u\rangle = \langle n(u), v - w\rangle + \langle n(u), w - u\rangle$, где второе слагаемое равно нулю, а первое с точностью до знака совпадает с расстоянием от v до $\Lambda(u)$. Из теоремы Пифагора имеем $\|v - u\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - u\|^2$. Поскольку

$$|\langle g'(u), v - u\rangle| \geq K\,|\langle n(u), v - u\rangle| = K\,\|v - w\|,$$

то, обозначая через $\bar{v}$ проекцию v на L и учитывая равенства $\delta = \|v - w\| = \|\bar{v} - u\|$ и $\bar{\delta} = \|v - \bar{v}\| = \|w - u\|$, получаем

$$K\delta \leq 0.5M\,\|v - u\|^2 \leq 0.5M\left(\delta^2 + \bar{\delta}^2\right),$$

откуда $\bar{\delta}^2 \geq \frac{2K}{M}\delta - \delta^2 = \delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)$, т.е. при $\delta \in \left(0; \frac{2K}{M}\right)$ имеет место $\bar{\delta} \geq \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$. Лемма доказана.

Замечание 2. Из показанного в [17, с. 275] следует, что при $\alpha \in \left(0; \frac{2}{M}\right)$ имеет место $g\left(u + \alpha g'(u)\right) > g(u)$ и $g\left(u - \alpha g'(u)\right) < g(u)$, поэтому при $\alpha \in \left(0; \frac{2K}{M}\right)$ получим $g\left(u + \alpha n(u)\right) > g(u)$ и $g\left(u - \alpha n(u)\right) < g(u)$. Отсюда следует, что если точка $v \in Y$ такова, что $\delta \in \left(0; \frac{2K}{M}\right)$ и $\bar{\delta} < \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$, то она не лежит в S и значение $g(v)$ имеет тот же знак, что и $g(\bar{v})$: если $g(v)$ и $g(\bar{v})$ имели бы разные знаки, то в силу непрерывности $g(x)$ на отрезке $[v; \bar{v}]$ существовала бы точка, лежащая в S, что противоречит выполнению неравенства

$\overline{\delta} = \|v - \overline{v}\| < \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$. Поскольку из показанного в [11] следует, что при $y \notin S$ векторы $y - u$ и $n(u)$ имеют одинаковое или противоположное направление, то при $0 < \|y - u\| < \frac{2K}{M}$ значение $g(y)$ отлично от нуля. Если y и v лежат по разные стороны от $\Lambda(u)$, то значения $g(y)$ и $g(v)$ имеют разные знаки, если по одну сторону – один знак.

Лемма 3. *Если $x_* \in M(x_0)$ и $\varepsilon \geq \frac{K}{M}$, то при всех целых $s \geq \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, где $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ – некоторые номера из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S, то на отрезке $[y_s(x_*); c_s(x_*)]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.*

Доказательство. Пусть $x_* \in M(x_0)$ и $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Будем считать, что векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Случай, когда они противоположно направлены, рассматривается аналогично.

Введем обозначения: $\overline{c}$ – проекция точки c на прямую L; $h_\tau = y + \tau(c - y)$, $\tau > 0$; θ – угол между векторами $y - c$ и $\overline{c} - c$ (если c лежит на L, то положим $\theta = \pi/2$). Угол θ удовлетворяет условиям $0 < \theta \leq \pi/2$ и $\operatorname{ctg}\theta \geq 0$, а в силу показанного в [12] для любого $\tau > 0$ точка $\overline{h}_\tau = y + \tau(\overline{c} - y)$ является проекцией h_τ на L, при этом угол θ равен углу между векторами $y - h_\tau$ и $\overline{h}_\tau - h_\tau$.

Пусть v – произвольная точка множества Y, лежащая на луче $\tilde{L}$. Обозначая $q = \|y - u\|$ и сохраняя в силе введенные ранее обозначения δ и $\overline{\delta}$, заметим, что если y и v лежат по разные стороны от $\Lambda(u)$, то $\overline{\delta} = (q + \delta)ctg\theta$. В силу показанного выше, при $q < \frac{2K}{M}$ имеет место $g(y) > 0$, а при $0 < \delta < \frac{2K}{M}$ и $\overline{\delta} < \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$ имеет место $g(v) < 0$.

Решим относительно δ неравенство

$$(q + \delta)^2 \operatorname{ctg}^2\theta < \delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right).$$

Проводя преобразования, получаем

$$(1 + \operatorname{ctg}^2\theta)\delta^2 + \left(2q\operatorname{ctg}^2\theta - \frac{2K}{M}\right)\delta + q^2\operatorname{ctg}^2\theta < 0. \tag{1.1}$$

Дискриминант квадратного относительно δ уравнения

$$(1 + \operatorname{ctg}^2\theta)\delta^2 + \left(2q\operatorname{ctg}^2\theta - \frac{2K}{M}\right)\delta + q^2\operatorname{ctg}^2\theta = 0 \tag{1.2}$$

имеет вид

$$D = \left(2q\operatorname{ctg}^2\theta - \frac{2K}{M}\right)^2 - 4q^2\operatorname{ctg}^2\theta(1 + \operatorname{ctg}^2\theta) =$$
$$= 4q^2\operatorname{ctg}^4\theta + \frac{4K^2}{M^2} - \frac{8K}{M}q\operatorname{ctg}^2\theta - 4q^2\operatorname{ctg}^2\theta - 4q^2\operatorname{ctg}^4\theta =$$
$$= \frac{4K^2}{M^2} - 4q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\frac{2K}{Mq} + 1\right).$$

При $\operatorname{ctg}^2\theta > \frac{K^2}{M^2q^2}\left(\frac{2K}{Mq} + 1\right)^{-1}$ значение D отрицательно и левая часть неравенства (1.1) строго положительна при любом δ, так как $1 + \operatorname{ctg}^2\theta > 0$.

При $\operatorname{ctg}^2\theta \le \dfrac{K^2}{M^2q^2}\left(\dfrac{2K}{Mq}+1\right)^{-1}$ значение D неотрицательно, и тогда, решая уравнение (1.2), получаем

$$\delta_{1,2} = \frac{\dfrac{2K}{M} - 2q\operatorname{ctg}^2\theta \pm \sqrt{\dfrac{4K^2}{M^2} - 4q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq}+1\right)}}{2(1+\operatorname{ctg}^2\theta)} = \frac{K}{M}\sin^2\theta - q\cos^2\theta \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\frac{2K}{Mq}+1\right)}\sin^2\theta = \left(\frac{K}{M} + q \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\frac{2K}{Mq}+1\right)}\right)\sin^2\theta - q.$$

Поскольку

$$\operatorname{ctg}^2\theta \le \frac{K^2}{M^2q^2}\left(\frac{2K}{Mq}+1\right)^{-1} = \frac{K^2}{Mq(2K+Mq)} < \frac{K}{Mq}$$

и $q^2\operatorname{ctg}^2\theta \ge 0$, то в силу формул Виета сумма и произведение корней, а значит, и сами корни квадратного уравнения (1.2) неотрицательны, при этом значения большего и меньшего корня не превосходят, соответственно, $\dfrac{2K}{M}$ и $\dfrac{K}{M}$.

Заметим, что $\|c-\bar{c}\| \le \|c-y\| \le d$, так как $c, y \in F \cap Y$ и $\bar{c}$ — проекция точки c на прямую L, содержащую y. Прямая L перпендикулярна гиперплоскости $\Lambda(u)$, а поскольку $\bar{c}$ — проекция c на L, то расстояния от точек c и $\bar{c}$ до $\Lambda(u)$ совпадают и при целых $s \ge \bar{s}_1$ (значение $\bar{s}_1$ указано в замечании 1) по величине не меньше ε. Таким образом, $\|y-\bar{c}\| = \|y-u\| + \|u-\bar{c}\| \ge \|u-\bar{c}\| \ge \varepsilon$, откуда

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\|c-\bar{c}\|}{\|y-\bar{c}\|} \le \frac{d}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta \le \frac{\varepsilon^2+d^2}{\varepsilon^2}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{d^2}{\varepsilon^2} \le \frac{K^2}{M^2q^2}\left(\frac{2K}{Mq}+1\right)^{-1} = \frac{K^2}{Mq(2K+Mq)} < \frac{K}{Mq}.$$

При $q < \dfrac{K}{M}$ имеем $\dfrac{K^2}{Mq(2K+Mq)} > \dfrac{K}{3Mq}$. Решив относительно q неравенство $\dfrac{d^2}{\varepsilon^2} \le \dfrac{K}{3Mq}$, получим $q \le \dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2}$. Поскольку $\|c-y\| \le \|c-\bar{c}\| + \|\bar{c}-y\|$, откуда $\varepsilon \le \|y-\bar{c}\| \le \|c-y\| \le d$, то $\dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2} < \dfrac{K}{M}$. Отсюда видно, что при $q \le \dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2} = \dfrac{\varepsilon^2}{3Nd^2}$ значение D неотрицательно, а значит, уравнение (1.2) имеет действительные корни. Из показанного в [11] следует, что $q \le \dfrac{4Nd_0^2}{(2^s)^2}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Решая относительно s неравенство $\dfrac{4Nd_0^2}{(2^s)^2} \le \dfrac{\varepsilon^2}{3Nd^2}$, получаем $s \ge \log_4\dfrac{12N^2d^2d_0^2}{\varepsilon^2} = \log_2\dfrac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$.

Из проведенных рассуждений следует, что если точки y и v лежат по разные стороны от $\Lambda(u)$, причем значение δ, равное расстоянию от v до $\Lambda(u)$, находится в интервале (δ_1, δ_2), где δ_1 и δ_2 определяются согласно выражениям, приведенным выше, то при целых $s \ge \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где $\bar{s}_2$ — наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, для которого справедливо последнее неравенство, имеет место $g(v) < 0$. При $q \le \dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2}$ в силу неравенства $\dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2} < \dfrac{K}{M}$ и замечания к лемме 2 имеет место $g(y) > 0$, а значит, при целых $s \ge \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ на луче $\tilde{L}$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y)$. Поскольку в силу показанного выше имеем $\delta_1 \le \dfrac{K}{M}$, то при $\varepsilon \ge \dfrac{K}{M}$ такая точка существует и на отрезке $[y;c]$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $x_* \in M(x_0)$ и $\varepsilon < \dfrac{K}{M}$, то при всех целых $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3\}$, где $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$ и $\overline{s}_3$ — некоторые номера из множества $\{0,1,2,\ldots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S, то на отрезке $[y_s(x_*);c_s(x_*)]$ существует точка, в которой значение $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.*

Доказательство. Пусть $x_* \in M(x_0)$ и $s \in \{0,1,2,\ldots\}$. Будем считать, что векторы $y_s(x_*) - u_s(x_*)$ и $n(u_s(x_*))$ одинаково направлены. Случай, когда они противоположно направлены, рассматривается аналогично.

Все обозначения, использованные в доказательстве предыдущей леммы, остаются в силе. Поскольку

$$\delta_1 \le \left(\frac{K}{M} + q - \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - q^2 \operatorname{ctg}^2\theta\left(\frac{2K}{Mq} + 1\right)}\right)\sin^2\theta - q =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{K}{M} + q\right)^2 - \left(\dfrac{K^2}{M^2} - q^2 \operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)\right)}{\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2 \operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}}\sin^2\theta - q =$$

$$= \frac{q\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)\left(1 + \operatorname{ctg}^2\theta\right)}{\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2 \operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}}\sin^2\theta - q =$$

$$= \frac{q\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)}{\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2 \operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}} - q \le \frac{q\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)}{\dfrac{K}{M} + q} - q,$$

то, решая относительно q неравенство $\dfrac{q\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)}{\dfrac{K}{M} + q} - q \le \varepsilon$, равносильное неравенству $q\left(q + \dfrac{2K}{M}\right) \le \left(q + \dfrac{K}{M}\right)(q + \varepsilon)$, или $\left(\dfrac{K}{M} - \varepsilon\right)q \le \dfrac{K}{M}\varepsilon$, с учетом условия $\varepsilon < \dfrac{K}{M}$ получаем $q \le \dfrac{K\varepsilon}{K - M\varepsilon}$. Это означает, что при $q \le \min\left\{\dfrac{K\varepsilon^2}{3Md^2}; \dfrac{K\varepsilon}{K - M\varepsilon}\right\}$, имеет место $\delta_1 \le \varepsilon$. Поскольку $q \le \dfrac{4Nd_0^2}{(2^s)^2}$, то, решая относительно s неравенство $\dfrac{4Nd_0^2}{(2^s)^2} \le \dfrac{K\varepsilon}{K - M\varepsilon}$, получаем

$$s \ge \log_2 2d_0\sqrt{\frac{N(K - M\varepsilon)}{K\varepsilon}}.$$

Отсюда следует, что при целых $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3\}$, где значение $\overline{s}_1$ указано в замечании 1, значение $\overline{s}_2$ — в доказательстве предыдущей леммы, а $\overline{s}_3$ — наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, для которого справедливо последнее неравенство, имеет место $g(v) < 0$. В силу показанного ранее, при указанных s имеет место $g(y) > 0$. Таким образом, при $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3\}$ на отрезке $[y;c]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если точки $x_* \in M(x_0)$ и $z(x_*)$ не совпадают, то существует такая положительная константа M_0, что при всех целых $s \geq \overline{s}$, где $\overline{s}$ — некоторый номер из множества $\{0,1,2,\ldots\}$, имеет место $\left\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\right\| \leq M_0 \left\|y_s(x_*) - u_s(x_*)\right\|$, $s = 0,1,2,\ldots$.*

Доказательство. Пусть $x_* \in M(x_0)$ и $z(x_*)$ не совпадают. Если при некотором s точка y лежит на поверхности S, то точки u и p, очевидно, совпадают с y и тогда обе части требуемого нестрогого неравенства равны нулю, т.е. оно справедливо при любом M_0. Пусть теперь y не лежит на S. Положим $\overline{s} = \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, если $\varepsilon \geq \dfrac{K}{M}$, и $\overline{s} = \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3\}$, если $\varepsilon < \dfrac{K}{M}$. В силу полученных выше результатов при $s \geq \overline{s}$ на отрезке $y; c]$ существует точка v_0, в которой $g(v_0) < 0$. Поскольку при $s \geq \overline{s}_2$ имеет место $g(y) > 0$, то в силу непрерывности $g(x)$ на отрезке $[y, v_0]$ существует точка, лежащая на поверхности S. Из полученных ранее результатов следует, что эта точка лежит или по ту же сторону от гиперплоскости $\Lambda(u)$, что и y (в частном случае она может лежать в гиперплоскости), или по другую сторону, на расстоянии, не превосходящем δ_1.

Пусть теперь v — точка пересечения отрезка $[y, v_0]$ с поверхностью S (эта точка, очевидно, удовлетворяет одному из двух указанных условий). Если имеет место первое условие, то $\|y - v\| \leq \dfrac{q}{\sin\theta}$, где $\dfrac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta \leq \dfrac{\varepsilon^2 + d^2}{\varepsilon^2}$, а значит, при $M_0 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 + d^2}}{\varepsilon}$ справедливо неравенство $\|y - v\| \leq M_0 \|y - u\|$. Во втором случае в силу полученных выше результатов имеет место $\overline{\delta} = (q + \delta)\operatorname{ctg}\theta \leq (q + \delta_1)\dfrac{d}{\varepsilon}$, где δ_1 — некоторое неотрицательное число, удовлетворяющее условию

$$\delta_1 \leq \frac{q\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)}{\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}} - q.$$

При выполнении данного неравенства имеем

$$(q + \delta_1)^2 \leq \frac{q^2\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)^2}{\left(\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}\right)^2}.$$

Кроме этого,

$$q < \frac{K}{M}, \quad \|y - v\| \leq \frac{q + \delta_1}{\sin\theta}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta \leq \frac{\varepsilon^2 + d^2}{\varepsilon^2},$$

поэтому

$$\|y - v\|^2 \leq \frac{q^2\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)^2}{\left(\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}\right)^2\sin^2\theta} \leq$$

$$\leq \frac{q^2\left(\dfrac{2K}{M} + q\right)^2\left(\varepsilon^2 + d^2\right)}{\left(\dfrac{K}{M} + q + \sqrt{\dfrac{K^2}{M^2} - q^2\operatorname{ctg}^2\theta\left(\dfrac{2K}{Mq} + 1\right)}\right)^2\varepsilon^2} \leq q^2\frac{\left(\dfrac{3K}{M}\right)^2\left(\varepsilon^2 + d^2\right)}{\dfrac{K}{M}\varepsilon^2},$$

$$\|y-v\| \le q\frac{\frac{3K}{M}\sqrt{\varepsilon^2+d^2}}{\varepsilon\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{3q}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K(\varepsilon^2+d^2)}{M}},$$

т.е. $\|y-v\| \le M_0\|y-u\|$, где $M_0 = \frac{3}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K(\varepsilon^2+d^2)}{M}}$.

Объединяя два возможных случая расположения точек y и v относительно гиперплоскости $\Lambda(u)$, получаем, что при всех целых $s \ge \overline{s}$ справедливо неравенство $\|y-v\| \le M_0\|y-u\|$, где

$$M_0 = \max\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon^2+d^2}}{\varepsilon};\frac{3}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K(\varepsilon^2+d^2)}{M}}\right\}.$$

Точки y и c по построению лежат в $F \cap Y$, которое выпукло в силу выпуклости F и Y. Отсюда следует, что v лежит в X, так как она является точкой пересечения отрезка $[y,c]$, лежащего в F, с поверхностью S. Поскольку p – проекция y на X и $v \in X$, то $\|y-p\| \le \|y-v\| \le M_0\|y-u\|$, где значение M_0 указано выше. В силу произвольности рассмотренной точки $x_* \in M(x_0)$, не совпадающей с $z(x_*)$, утверждение леммы доказано.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума гладкой функции $\varphi(x)$ на множестве X рассматриваемого вида и доказано утверждение о сходимости алгоритма.

Лемма 6. *Если $x_* \in M(x_0)$ – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X, то $z(x_*)$ совпадает с x_*.*

Доказательство. Пусть $x_* \in M(x_0)$ – произвольная точка локального минимума $\varphi(x)$ на X. Предположим, что x_* и $z(x_*)$ не совпадают. Тогда поскольку $x_* \in F \cap \Lambda(x_*)$ и $z(x_*)$ – проекция точки $x_* - \beta\varphi(x_*)$ на выпуклое множество $F \cap \Lambda(x_*)$, то

$$\left\langle x_* - \beta\varphi'(x_*) - z(x_*), x_* - z(x_*)\right\rangle = \left\|x_* - z(x_*)\right\|^2 + \beta\left\langle\varphi'(x_*), z(x_*) - x_*\right\rangle \le 0,$$

откуда $\left\langle\varphi'(x_*), z(x_*) - x_*\right\rangle < 0$. Это означает, что вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_*. Это означает, что существует такая окрестность $U_\delta(h_*)$ и такое число $\alpha_0 > 0$, что $\varphi(x_* + \alpha h) < \varphi(x_*)$ для всех $h \in U_\delta(h_*)$ и $\alpha \in (0;\alpha_0)$. Отсюда следует, что существует такое $\tilde{s} \in \{0,1,2,\ldots\}$, что для всех $h \in U_\delta(h_*)$ и всех целых $s \ge \tilde{s}$ имеет место $\varphi(x_* + 2^{-s}h) < \varphi(x_*)$.

Вектор h_* также является касательным направлением множества S, так как лежит в касательной гиперплоскости к S. Отсюда следует, что

$$\left\|x_* + \alpha h_* - \mathrm{Pr}_S(x_* + \alpha h_*)\right\| \cdot \alpha^{-1} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0,$$

а значит, $\left\|y_s(x_*) - u_s(x_*)\right\| \times 2^s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$. Из леммы 5 следует, что при всех целых $s \ge \overline{s}$, где $\overline{s}$ – некоторый номер из множества $\{0,1,2,\ldots\}$, имеет место

$$\left\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\right\| \le M_0\left\|y_s(x_*) - u_s(x_*)\right\|,$$

где M_0 – положительная константа, а значит, $\left\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\right\| \times 2^s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$. Отсюда и из сказанного выше следует, что при больших s имеет место $\varphi(p_s(x_*)) < \varphi(x_*)$.

Точка $p_s(x_*)$ при всех $s \in \{0,1,2,\ldots\}$ лежит в X и $\|x_* - p_s(x_*)\| = \|x_* - y_s(x_*)\| + \|y_s(x_*) - p_s(x_*)\|$, при этом

$$\|x_* - y_s(x_*)\| = 2^{-s}\|h_*\| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

в силу ограниченности $\|h_*\|$ и $\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\| \le \|x_* - y_s(x_*)\|$, так как $x_* \in X$. Следовательно, $\|x_* - p_s(x_*)\| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, т.е. в любой окрестности x_* существует точка $x \in X$, для которой $\varphi(x) < \varphi(x_*)$, а значит, x_* не является точкой локального минимума $\varphi(x)$ на X. Из полученного противоречия следует, что произвольная точка $x_* \in M(x_0)$ локального минимума $\varphi(x)$ на X совпадает с точкой $z(x_*)$. Утверждение леммы доказано.

Из утверждения леммы 6 следует, что при выполнении равенства $x_k = z(x_k)$ при некотором k точка $x_k \in M(x_0)$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X. Равенство $x_k = z(x_k)$ может не выполняться ни при каком k, тогда алгоритм становится итерационным, однако ниже будет показано, что при некоторых дополнительных условиях любая предельная точка $\{x_k\}$ является стационарной.

Заметим, что допустимое множество X рассматриваемого в задаче вида может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $X = \{x \in R^n : f_i(x) \le 0, i = 1,2,\ldots,l; g(x) = 0\}$, где $g(x)$ является гладкой, а $f_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,l$ — выпуклыми и гладкими на E^n.

Лемма 7. *Если точка $x_* \in M(x_0)$ совпадает с $z(x_*)$, то она стационарна в смысле Лагранжа.*

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [12] с учетом непустоты $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in M(x_0)$.

Будем считать, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, тогда существует константа $L = \max_{x\in Y}\|\varphi'(x)\| < \infty$. Отсюда следует, что для любых $x, y \in Y$ при некотором $\theta \in [0;1]$ имеет место $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \|\varphi'(x + \theta(y - x))\|\|x - y\| \le L\|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y.

Введем следующие обозначения: $z_k = z(x_k)$, $\varphi_k(x) = \langle\varphi'(x_k), x - x_k\rangle$, $y_{k,s} = y_s(x_k)$, $p_{k,s} = p_s(x_k)$. Рассмотрим способ выбора чисел α_k, $k = 0,1,2,\ldots$, состоящий в том, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k}, где s_k — первый из номеров $s = 0,1,2,\ldots$, при котором

$$\varphi(x_k) - \varphi(p_{k,s}) \ge 0,25\times 2^{-s}|\varphi_k(z_k)|. \tag{2.1}$$

Покажем, что выбор α_k из указанного условия всегда возможен. Для этого предположим, что при некотором $k \in \{0,1,2,\ldots\}$ построена точка $x_k \in M(x_0)$ и z_k не совпадает с x_k, т.е. $\varphi_k(z_k) < 0$. Поскольку $x_k, z_k \in Y$ и $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, то из показанного в [18, с. 202] следует, что при $0 < \alpha \le \dfrac{|\varphi_k(z_k)|}{2L_0\|x_k - z_k\|^2}$, где L_0 — константа Липшица для $\varphi'(x)$ на Y, имеем

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k + \alpha(z_k - x_k)) \ge 0.5\alpha|\varphi_k(z_k)|.$$

Поскольку $y_{k,s} \in Y$, то при $\delta = \dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^s L}$ для любого $x \in U_\delta(y_{k,s})$ имеет место $\varphi(x) \le \varphi(x_k) - \dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^s}$. В силу леммы 5 и показанного в [11] при целых $s \ge \bar{s}$ имеет место $\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\| \le M_0\|y_s(x_*) - u_s(x_*)\| \le \dfrac{4M_0Nd_0^2}{(2^s)^2}$. Решая неравенство $\dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^s L} > \dfrac{4M_0Nd_0^2}{(2^s)^2}$ относительно s, получаем $s > \log_2\dfrac{16M_0LNd_0^2}{|\varphi_k(z_k)|}$. Это означает, что при целых $s \ge \bar{s}$, удовлетворяющих полученному условию, имеет место $\varphi(p_{k,s}) \le \varphi(x_k) - \dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^s}$. Отсюда следует, что при каждом k выполнения последнего неравенства, а значит, и неравенства (2.1) удается добиться при конечном s, т.е. выбор α_k из указанного условия всегда возможен.

Лемма 8. *При выборе чисел* $\alpha_k, k = 0,1,2,\ldots$, *согласно указанному способу имеет место* $\varphi_k(z_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha_k, k = 0,1,2,\ldots$, выбираются согласно указанному способу. Тогда при каждом k в качестве x_{k+1} берется точка p_{k,s_k}, где s_k — наименьшее из чисел $s = 0,1,2,\ldots$, удовлетворяющее условию $\varphi(x_k) - \varphi(p_{k,s}) \ge \dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^s}$, поэтому

$$s_k \le \max\left\{\bar{s}, 1 + \log_2\frac{16M_0LNd_0^2}{|\varphi_k(z_k)|}\right\} = \max\left\{\bar{s}, \log_2\frac{32M_0LNd_0^2}{|\varphi_k(z_k)|}\right\}.$$

Поскольку $\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \ge \dfrac{0.25|\varphi_k(z_k)|}{2^{s_k}}$, $k = 0,1,2,\ldots$, то последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ не возрастает. Отсюда, из непрерывности $\varphi(x)$ и компактности множества $M(x_0)$, в котором лежит $\{x_k\}$, следует, что $\{\varphi(x_k)\}$ ограничена снизу. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})] = 0$, а значит, $\dfrac{|\varphi_k(z_k)|}{2^{s_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Но $s_k \le \max\left\{\bar{s}, \log_2\dfrac{32M_0LNd_0^2}{|\varphi_k(z_k)|}\right\}$, поэтому

$$\max\left\{2^{-\bar{s}}|\varphi_k(z_k)|, \frac{|\varphi_k(z_k)|^2}{32M_0LNd_0^2}\right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

откуда $\varphi_k(z_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Утверждение леммы доказано.

Лемма 9. *Точка $z(x)$ непрерывно зависит от x на множестве $M(x_0)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [12] с учетом непустоты $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in M(x_0)$ и того факта, что если $x \in M(x_0)$, то $z(x) \in Y$, где $M(x_0)$ и Y компактны.

Предложение. *Если $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$ и последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе $\alpha_k, k = 0,1,2,\ldots$, согласно указанному способу, то любая ее предельная точка x_* совпадает с $z(x_*)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующего предложения из [12] с учетом непустоты $\operatorname{int} F \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in M(x_0)$ и утверждений лемм 8 и 9.

Из данного предложения и леммы 7 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанном способе выбора $\alpha_k, k = 0,1,2,\ldots$, стационарна в смысле Лагранжа.

В тех задачах, где множество X ограничено и касательная гиперплоскость к S, построенная в произвольной точке X, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} F$, можно положить $d_0 = \beta\max\limits_{x\in X}\|\varphi'(x)\| < \infty$ и в качестве Y принять такое выпуклое компактное множество, что для любого $x \in X$ справедливо включение $D(x) \subset Y$, где $D(x)$ — шар радиуса $2d_0$ с центром в точке x. Тогда положив, что $\varphi(x), g(x) \in C^{1,1}(Y)$, во всех проводимых в данной работе рассуждениях можно заменить $M(x_0)$ на X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П., Недич А.* О трехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для решения задач минимизации с неточными исходными данными // Известия вузов. Математика. 1993. № 12. С. 35–43.
2. *Васильев Ф.П., Недич А.* Об одном варианте регуляризованного метода проекции градиента // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 511–519.
3. *Васильев Ф.П., Недич А.* Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 12. С. 2033–2042.
4. *Антипин А.С.* Об оценках скорости сходимости метода проекции градиента // Известия вузов. Математика. 1995. № 6. С. 16–24.
5. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 5. С. 669–684.
6. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Двойственные барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские методы для задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 7. С. 30–45.
7. *Ишмухаметов А.З.* Регуляризованные приближенные методы проекции и условного градиента с конечношаговыми внутренними алгоритмами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1896–1909.
8. *Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Метод проекции градиента для устойчивой аппроксимации квазирешений нерегулярных нелинейных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1757–1764.
9. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 3. С. 367–373.
10. *Черняев Ю.А.* Об одном численном алгоритме решения экстремальных задач с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 2. С. 169–175.
11. *Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента и метода Ньютона на экстремальные задачи с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1493–1502.
12. *Черняев Ю.А.* Сходимость метода проекции градиента и метода Ньютона для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения сферической поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1733–1749.
13. *Черняев Ю.А.* Метод условного градиента для экстремальных задач с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1910–1913.
14. *Черняев Ю.А.* Сходимость метода условного градиента на классе экстремальных задач с ограничением в виде подмножества точек сферы // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 2015. № 4. С. 104–110.
15. *Дуллиев А.М., Заботин В.И.* Итерационный алгоритм проектирования точки на невыпуклое многообразие в линейном нормированном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 827–830.
16. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
17. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
18. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.