ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 102–117

УДК 519.634

УГЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2019 г. А. И. Денисов[1], И. В. Денисов[2,*]

([1]101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, Национальный исследовательский институт "Высшая школа экономики", Россия;

[2]300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия)

**e-mail: den_tspu@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.02.2018 г.

В прямоугольнике рассматривается сингулярно возмущенное параболическое уравнение
$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon)$$
с краевыми условиями I рода. В угловых точках прямоугольника от функции F не требуется монотонности по переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Асимптотическое приближение решения строится в предположении, чтоглавный член угловой части существует. Построено полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \to 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 4.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.1134/S004446691901006X

ВВЕДЕНИЕ

В статье продолжено исследование нелинейных пограничных слоев (см. [1], [2]), под которыми понимаются случаи, когда при построении асимптотики приходится рассматривать нелинейные уравнения того же типа, что и исходное.

В работе [1] в прямоугольнике $\Omega := \{(x,t)|0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ для сингулярно возмущенного параболического уравнения рассмотрена начально-краевая задача вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon), \tag{0.1}$$

$$u(x,0,\varepsilon)=\varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t,\varepsilon)=\psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon)=\psi_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{0.3}$$

В предположении, что в угловых точках прямоугольника Ω функция F является квадратичной и монотонной, построено асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\varepsilon \to 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка. В работе [1] представлена библиография по данной тематике, в которой прослеживается история исследования многочисленных параболических задач, начиная с появления метода угловых пограничных функций (см. [3]).

В работе [2] класс нелинейных функций был существенно расширен. Для функции F в угловых точках прямоугольника требовалась, в отличие от [1], не квадратичность, а только монотонность на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Как и в [1], было построено асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\varepsilon \to 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

В данной статье от функции F не требуется монотонность. Асимптотическое приближение решения строится в предположении, что нелинейная задача, определяющая главный член угловой части асимптотики, разрешима. Последующие члены угловой части асимптотики определяются из линейных параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от главного члена угловой части асимптотики. Для этого коэффициента, в отличие от [1] и [2], приходится допускать, что он может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это приводит к значительным трудностям. Однако область, в которой рассматриваются уравнения, удается разбить на части и в каждой из них построить верхние и нижние решения задачи. Затем эти куски гладко стыкуются друг с другом, в результате определяется полное асимптотическое приближение решения при $\varepsilon \to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача (0.1)–(0.3) рассматривается при следующих условиях.

Условие 1. Функция $F(u,x,t,\varepsilon)$ является достаточно гладкой, а функции $\varphi(x), \psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ – достаточно гладкие и согласованные в угловых точках прямоугольника Ω: $\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\varphi(1) = \psi_2(0)$.

Условие 2. Уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение $u = \overline{u}_0(x,t)$.

Условие 3. Производная $F'_u(\overline{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\overline{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \overline{u}_0(x,0), \tag{1.1}$$

где параметр $x \in [0,1]$, имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$, $\tau \geq 0$, и удовлетворяет условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$.

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\overline{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{1.2}$$

где $k = 0$ или 1, а t играет роль параметра, прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \overline{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2) = (0,0)$ при $y \to \infty$.

Решение задачи (0.1)–(0.3) ищется методом угловых пограничных функций (см. [3]) в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \to 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x,t,\varepsilon) = \overline{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{1.3}$$

Здесь $\overline{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω; Π, Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$; P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0,0)$ и $(1,0)$.

В [1] регулярная часть асимптотики $\overline{u}$ строится в виде ряда по степеням ε

$$\overline{u}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overline{u}_k(x,t),$$

где функция $\overline{u}_0(x,t)$ выбирается в соответствии с условиями 2 и 3.

Погранслойные функции определяются в виде рядов

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x,\tau), \quad Q(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi,t),$$

$$Q^*(\xi_*,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*,t), \quad \text{где} \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

суть растянутые переменные. Функция $\Pi_0 = \Pi_0(x,\tau)$ является решением задачи

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F\left(\overline{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right), \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \overline{u}_0(x,0),$$

которая в силу условия 4 имеет решение. В силу условия 3 для этого решения справедлива экспоненциальная оценка убывания вида

$$\left|\Pi_0(x,\tau)\right| \le C\exp(-\kappa\tau),$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Функции $\Pi_k = \Pi_k(x,\tau)$, $k \ge 1$, определяются из линейных задач

$$-\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = F'_u\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right)\Pi_k + \pi_k, \quad \Pi_k(x,0) = -\bar{u}_k(x,0), \tag{1.4}$$

где π_k выражаются рекуррентно через Π_j, $j < k$, и их производные с коэффициентами, являющимися многочленами от τ. Поэтому, если для функций Π_j, $j < k$, справедливы экспоненциальные оценки убывания, то оценки того же вида справедливы для функций π_k, и, следовательно, для решений $\Pi_k(x,\tau)$ задач (1.4).

Функция $Q_0 = Q_0(\xi,t)$ является решением задачи

$$a^2\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = F\left(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0\right),$$

$$Q_0(0,t) = \psi_1(t) - \bar{u}_0(0,t), \quad Q_0(\infty,t) = 0,$$

которая эквивалентна задаче (1.2) при $k = 0$. Для функции $Q_0(\xi,t)$ справедливы экспоненциальные оценки убывания.

Функции $Q_k(\xi,t)$, $k \ge 1$, определяются из линейных задач

$$a^2\frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = F'_u(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0)Q_k + q_k, \tag{1.5a}$$

$$Q_k(0,t) = -\bar{u}_k(0,t), \quad Q_k(\infty,t) = 0, \tag{1.5b}$$

где q_k выражаются рекуррентно через Q_j, $j < k$, и их производные с коэффициентами, являющимися многочленами от ξ. Если для функций Q_j, $j < k$, справедливы экспоненциальные оценки убывания, то оценки того же вида справедливы для функций q_k, и, следовательно, для решений $Q_k(\xi,t)$ задач (1.5). Функции $Q_k^*(\xi_*,t)$ определяются аналогично функциям $Q_k(\xi,t), k \ge 0$.

Вблизи угловых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi,\tau,\varepsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)$, которые ищутся в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k P_k(\xi,\tau), \quad P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Для краткости приняты следующие обозначения:

$$(u) = (u,0,0,0), \quad \bar{u}_k = \bar{u}_k(0,0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0,\tau), \quad Q_k = Q_k(\xi,0),$$

$$P_k = P_k(\xi,\tau), \quad F' = F'_u.$$

Задача для определения главного члена угловой части асимптотики $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}^2_+$ плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) - F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F(\bar{u}_0 + Q_0), \tag{1.6}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \tag{1.7}$$

$$P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{1.8}$$

Будем предполагать, что эта задача имеет решение $P_0(\xi,\tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания

$$\left|P_0(\xi,\tau)\right| \le C\exp(-\kappa(\xi+\tau)). \tag{1.9}$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} F'(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)P_k + h_k, \tag{1.10}$$

$$P_k(0,\tau) = -\Pi_k(0,\tau), \quad P_k(\xi,0) = -Q_k(\xi,0), \tag{1.11}$$

$$P_k(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{1.12}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида (1.9), если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0, \ldots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.10)–(1.12)

В задаче (1.10)–(1.12) сделаем замену

$$P_k = Z + g_k, \tag{2.1}$$

где функция $g_k = g_k(\xi,\tau)$ имеет вид

$$g_k(\xi,\tau) = -\Pi_k(0,\tau)\exp(-\kappa\xi) - Q_k(\xi,0)\exp(-\kappa\tau) - \overline{u}_k(0,0)\exp(-\kappa(\xi+\tau))$$

и удовлетворяет экспоненциальной оценке убывания типа (1.9). Для функции $Z = Z(\xi,\tau)$ получается задача

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F'(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)Z - z = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{2.2}$$

$$Z(0,\tau) = Z(\xi,0) = 0, \tag{2.3}$$

$$Z(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{2.4}$$

с неоднородностью

$$z = h_k + F'(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)g_k - a^2 \frac{\partial^2 g_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g_k}{\partial \tau},$$

которая удовлетворяет экспоненциальной оценке вида (1.9). В силу условия 3 и экспоненциальных оценок убывания для пограничных функций найдется неотрицательное число ρ_0 такое, что в области

$$\Omega_0 := \{(\xi,\tau) | \xi \geq \rho_0,\ \tau \geq \rho_0\}$$

значения производной на нулевом приближении удовлетворяют неравенству

$$F'(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geq m^2, \tag{2.5}$$

где m – некоторое положительное число. Однако в приграничных полосах

$$\Omega_1 := \{(\xi,\tau) | \xi \geq \tau,\ 0 \leq \tau \leq \rho_0\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 := \{(\xi,\tau) | 0 \leq \xi \leq \rho_0,\ \tau \geq \xi\}$$

производная может принимать отрицательные значения. Поэтому задача (2.2)–(2.4) не всегда будет иметь решение, удовлетворяющее оценке вида (1.9). В связи с этим нужны дополнительные условия.

Условие 6. Задача (1.6)–(1.8) имеет решение $P_0(\xi,\tau)$ с оценкой вида (1.9) и во всем квадранте $\mathbb{R}^2_+$ значения производной F' на нулевом приближении удовлетворяют неравенству (2.5).

Теорема 2.1. *Если выполнено условие* 6, *то задача* (2.2)–(2.4) *имеет решение* $Z(\xi,\tau)$ *с оценкой вида* (1.9).

Доказательство. Используем метод верхних и нижних решений (см. [4]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad D, \quad Z = \zeta \quad \text{на границе области} \tag{2.6}$$

имеет решение Z в промежутке $Z_- \le Z \le Z_+$, если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+; \tag{2.7}$$

а на границе области D выполняются неравенства

$$Z_- \le \zeta \le Z_+. \tag{2.8}$$

В качестве верхнего решения задачи (2.2)–(2.4) пробуем функцию

$$Z_+ = r\exp(-\kappa(\xi + \tau)),$$

где r и κ – некоторые положительные числа. При подстановке функции Z_+ в левую часть уравнения (2.2) получаем

$$L(Z_+) = a^2\kappa^2 Z_+ + \kappa Z_+ - F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)Z_+ - z \le$$
$$\le -(m^2 - \kappa - a^2\kappa^2)Z_+ - z = -(m^2 - \kappa - a^2\kappa^2)r\exp(-\kappa(\xi + \tau)) - z.$$

Неравенство $m^2 - \kappa - a^2\kappa^2 > 0$ выполняется при достаточно малых положительных κ, поэтому с учетом оценки для z значения $L(Z_+) < 0$ при достаточно малых положительных κ и достаточно больших положительных r. Таким образом, положительная функция Z_+ действительно является верхним решением задачи (2.2)–(2.4). В качестве нижнего решения подходит отрицательная функция $Z_- = -Z_+$. Согласно методу верхних и нижних решений существует решение Z задачи (2.2)–(2.4), заключенное в промежутке $Z_- \le Z \le Z_+$. Функции Z_- и Z_+ удовлетворяют экспоненциальной оценке вида (1.9), значит, и функция Z удовлетворяет такой же оценке. Теорема 2.1 доказана.

Если условие 6 не выполняется, то в приграничных полосах Ω_1 и Ω_2 производная F' может принимать отрицательные значения. Вместо 6 требуем выполнения другого условия.

Условие 7. Задача (1.6)–(1.8) имеет решение $P_0(\xi,\tau)$ с оценкой вида (1.9), и в приграничных полосах Ω_1 и Ω_2 квадранта $\mathbb{R}_+^2$ производная F' на нулевом приближении принимает отрицательные значения, но при этом

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \ge -q^2, \tag{2.9}$$

где число $q \in (0, q_0)$, q_0 – решение уравнения

$$q_0^2 - \frac{\pi}{2\rho_0}\operatorname{ctg}\frac{\rho_0 q_0}{a} = 0 \quad \text{на промежутке} \quad q_0 \in \left(0, \frac{\pi a}{2\rho_0}\right).$$

Заметим, что из условия 6 следуют неравенства

$$0 < q < q_0 < \frac{\pi a}{2\rho_0}. \tag{2.10}$$

Кроме этого, число $\pi a/2$ получается из-за невозможности найти положительное монотонное решение неравенства $a^2 y'' + y \le 0$ на промежутке длиной больше, чем $\pi a/2$.

При условии 6 функции вида $\pm r\exp(-\kappa(\xi + \tau))$ уже не подходят на роль барьерных. Более того, верхнее и нижнее решения задачи (2.2)–(2.4) не удается построить сразу во всем квадранте $\mathbb{R}_+^2$ в виде одной гладкой функции. Приходится сначала строить так называемые кусочно-гладкие барьеры, а затем сглаживать их.

Определение. Функции $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ называются кусочно-гладкими верхним и нижним решениями задачи (2.6), если

1) $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$;

2) существует разбиение области D на конечное число подобластей, на внутренности каждой из которой выполняются неравенства (2.7);

3) на границе области D выполняются неравенства (2.8).

Теорема 2.2. *Если выполнено условие* 6, *то задача* (2.2)–(2.4) *имеет кусочно-гладкие верхнее и нижнее решения с оценками вида* (1.9).

Доказательство. Построение верхнего решения задачи (2.2)–(2.4) проведем отдельно в каждой из областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2. В области Ω_0 выполняется неравенство (2.5) и на роль верхнего решения задачи (2.2)–(2.4) подходит положительная функция Z_+ из теоремы 2.1

$$Z_+ = r\exp(-\kappa(\xi+\tau)), \tag{2.11}$$

где r – достаточно большое положительное число, а κ – достаточно малое положительное число. Однако верхнее решение вида (2.11) будет использоваться в области меньшей, чем область Ω_0. Для ее определения воспользуемся неравенствами (2.10), из которых следует, что

$$\rho_0 < \frac{\pi a}{2q} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2\rho_0}\frac{\rho_0 q_0}{a} > q^2.$$

Поэтому можно выбрать числа ρ_1 и ρ_2, удовлетворяющие условиям

$$\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \frac{\pi a}{2q} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2\rho_2}\frac{\pi\rho_1}{2\rho_2} > q^2. \tag{2.12}$$

Определим число

$$\rho := \rho_0 + \rho_2 - \rho_1 \tag{2.13}$$

и подобласть области Ω_0

$$\Omega_{00} := \{(\xi,\tau)\,|\,\xi \ge \rho,\ \tau \ge \rho\}.$$

Оставшуюся часть области Ω_0 разделим на две подобласти

$$\Omega_{10} := \{(\xi,\tau)\,|\,\xi \ge \tau,\ \rho_0 < \tau \le \rho\} \quad \text{и} \quad \Omega_{20} := \{(\xi,\tau)\,|\,\rho_0 < \xi \le \rho,\ \tau \ge \xi\}.$$

В области Ω_2 берем

$$Z_+ = \lambda h(\xi)\exp(-\kappa\tau), \tag{2.14}$$

где функция

$$h(\xi) = \sin A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0), \quad \xi \in [0,\rho_0], \quad A_0 = \pi/(2\rho_2), \tag{2.15}$$

а числа λ и κ определяются ниже. Для функции (2.14) имеем

$$L(Z_+) = \lambda\left(a^2h'' + \kappa h - F'h\right)\exp(-\kappa\tau) - z \le -\lambda\left(a^2A_0^2 - \kappa - q^2\right)h\exp(-\kappa\tau) - z.$$

Здесь $a^2A_0^2 - q^2 = (aA_0 - q)(aA_0 + q) > 0$, так как

$$aA_0 - q = \frac{\pi a}{2\rho_2} - q > 0.$$

Поэтому при достаточно малых положительных κ выполняется неравенство

$$a^2A_0^2 - \kappa - q^2 > 0,$$

и с учетом оценки для z величина $L(Z_+) < 0$ при, возможно, еще более малых положительных κ и достаточно больших положительных λ.

В области Ω_{20} также берем Z_+ в форме (2.14). В этой области производная $F' \ge m^2 > 0$, и корректировка ранее выбранных параметров не нужна.

В области Ω_1 берем

$$Z_+ = \lambda h(\tau)\exp(-\kappa\xi). \tag{2.16}$$

Имеем

$$L(Z_+) = \lambda\left(a^2\kappa^2h - h' - F'h\right)\exp(-\kappa\xi) - z \le \lambda\left(a^2\kappa^2h - h' + q^2h\right)\exp(-\kappa\xi) - z.$$

Здесь

$$a^2\kappa^2h - h' + q^2h = \left(a^2\kappa^2 + q^2\right)\sin A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0) - A_0\cos A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0) =$$
$$= \sin A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0)\left(a^2\kappa^2 + q^2 - A_0\,\mathrm{ctg}A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0)\right).$$

Значения

$$q^2 - A_0\mathrm{ctg}A_0(\xi + \rho_1 - \rho_0) \le q^2 - A_0\mathrm{ctg}\frac{\pi\rho_1}{2\rho_2} < 0$$

в силу (2.12). Поэтому с учетом оценки для z величина $L(Z_+) < 0$ при достаточно малых положительных κ и достаточно больших положительных λ.

В области Ω_{10} верхнее решение Z_+ также берем в форме (2.16). В этой области производная $F' \ge m^2 > 0$, и корректировка ранее выбранных параметров не нужна.

Теперь проведем непрерывную стыковку гладких кусков верхнего решения. Границей областей Ω_1 и Ω_2 является линия $\tau = \xi$, $0 \le \xi \le \rho$. На этой линии оба куска верхнего решения непрерывно состыкованы по построению. Аналогичная ситуация имеет место и на границе областей Ω_{10} и Ω_{20}. Границей областей Ω_{00} и Ω_{10} является линия $\tau = \rho$, $\rho \le \xi < \infty$, поэтому должно выполняться равенство $r\exp(-\kappa(\xi + \rho)) = \lambda h(\rho)\exp(-\kappa\xi)$, или

$$r\exp(-\kappa\rho) = \lambda, \tag{2.17}$$

так как $h(\rho) = 1$. Параметры r и λ можно выбирать сколь угодно большими, поэтому существуют значения r и λ, при которых условие (2.17) выполняется. Это же условие обеспечивает непрерывную стыковку гладких кусков верхнего решения и на границе областей Ω_{00} и Ω_{20}. Таким образом, верхнее кусочно-гладкое решение задачи (2.2)–(2.4) оказывается построенным во всей области $\mathbb{R}^2_+$.

Нижнее кусочно-гладкое решение задачи (2.2)–(2.4) с оценкой вида (1.9) можно взять в форме $Z_- = -Z_+ < 0$. Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. *Если выполнено условие* 6, *то задача* (2.2)–(2.4) *имеет решение* $Z(\xi,\tau)$ *с оценкой вида* (1.9).

Доказательство. Проведем сглаживание построенного в теореме 2.2 кусочно-гладкого верхнего решения Z_+ задачи (2.2)–(2.4). Гладкость этого решения нарушается на общих частях границ областей Ω_{00}, Ω_{10} и Ω_{20}. Обозначим эти линии через Γ_{01}, Γ_{02} и Γ_{12}

$$\Gamma_{01} = \{(\xi,\tau)\,|\,\xi \ge \rho,\ \tau = \rho\},$$
$$\Gamma_{02} = \{(\xi,\tau)\,|\,\xi = \rho,\ \tau \ge \rho\},$$
$$\Gamma_{12} = \{(\xi,\tau)\,|\,\xi = \tau,\ 0 \le \tau \le \rho\}.$$

Существует общая теория сглаживания верхних кусочно-гладких решений (см. [4]). Эта теория применяется, когда гладкость функции нарушается на гладкой линии. Кроме того, при прохождении через эту линию по нормали производная кусочно-гладкого решения не должна испытывать положительного скачка. Функция Z_+ построена таким образом, что при прохождении по нормали через каждую из линий Γ_{01}, Γ_{02} или Γ_{12} производная не испытывает положительного скачка. Однако в нашем случае линия состоит из трех кусков, сходящихся в одной точке, и не является гладкой.

Сначала проведем сглаживание функции Z_+ на линии Γ_{01}. По разные стороны от этой линии значения функции Z_+ задаются различными аналитическими выражениями

$$\begin{cases} \lambda h(\tau)\exp(-\kappa\xi), & \text{если} \quad (\xi,\tau) \in \Omega_{10}, \\ r\exp(-\kappa(\xi + \tau)), & \text{если} \quad (\xi,\tau) \in \Omega_{00}. \end{cases}$$

Оба выражения поделим на $r\exp(-\kappa\xi)$ и учтем (2.17), получим функцию одного переменного

$$f(\tau) = \begin{cases} h(\tau)\exp(-\kappa\rho), & \text{если} \quad 0 \le \tau \le \rho, \\ \exp(-\kappa\tau), & \text{если} \quad \tau \ge \rho. \end{cases}$$

Функцию $f(\tau)$ нужно сгладить так, чтобы получилась функция, которая при умножении на $r\exp(-\kappa\xi)$, во-первых, являлась бы верхним решением задачи (2.2)–(2.4) в объединении областей Ω_{00} и Ω_{10}, и, во-вторых, не портила бы отрицательность скачка производной при прохождении по нормали к линии Γ_{12}.

Лемма 2.1. *Существуют окрестность $U(\rho)$ точки ρ и функция $v_0(\tau)$, где $\tau \in U(\rho)$, такие, что*

1) *функция*

$$v(\tau) = \begin{cases} f(\tau), & \textit{если} \quad \tau \in (0,\infty)\setminus U(\rho), \\ v_0(\tau), & \textit{если} \quad \tau \in U(\rho). \end{cases}$$

дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $(0,\infty)$;

2) *в окрестности* $U(\rho)$ *выполняется условие*

$$v_0' + \kappa v_0 \geq 0. \tag{2.18}$$

Доказательство. Определим окрестность $U(\rho) = (\rho - 2\delta_1, \rho + 2\delta_2)$ точки ρ, в которой будет проводиться сглаживание функции $f(\tau)$. В качестве δ_1 возьмем число

$$\delta_1 = \mu\kappa, \tag{2.19}$$

где μ — положительный коэффициент, определяемый ниже. В качестве δ_2 возьмем решение уравнения

$$f(\rho + 2\delta_2) = f(\rho - \delta_1) \quad \text{или} \quad h(\rho)\exp(-\kappa(\rho + 2\delta_2)) = h(\rho - \delta_1)\exp(-\kappa\rho),$$

откуда

$$\delta_2 = -\frac{1}{2\kappa}\ln h(\rho - \delta_1). \tag{2.20}$$

Функцию $v_0(\tau)$, $\tau \in (\rho - 2\delta_1, \rho + 2\delta_2)$, составим из трех кусков, двигаясь от точки $\rho + 2\delta_2$ к точке $\rho - 2\delta_1$:

$$v_0(\tau) = \begin{cases} v_{01}(\tau), & \text{если} \quad \rho + \delta_2 < \tau < \rho + 2\delta_2, \\ v_{02}(\tau), & \text{если} \quad \rho \leq \tau \leq \rho + \delta_2, \\ v_{03}(\tau), & \text{если} \quad \rho - 2\delta_1 < \tau < \rho. \end{cases}$$

Сначала построим функцию $v_{01}(\tau)$, которая на промежутке $(\rho + \delta_2, \rho + 2\delta_2)$ принимает значения, меньшие, чем $f(\tau)$, убывает, выпукла вниз, в точке $\rho + 2\delta_2$ непрерывно и гладко до второй производной включительно стыкуется с функцией $f(\tau)$ и удовлетворяет условию (2.18). Для этого функцию $f(\tau)$ на промежутке $(\rho + \delta_2, \rho + 2\delta_2)$ представим по формуле Тейлора с центром в точке $\rho + 2\delta_2$:

$$f(\tau) = \exp(-\kappa\tau) = \exp(-\kappa(\rho + 2\delta_2))\exp(-\kappa(\tau - \rho - 2\delta_2)) =$$
$$= f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} + r_2\right),$$

где остаточный член r_2 в форме Лагранжа имеет вид

$$r_2 = -\frac{\kappa^3(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6}\exp(-\kappa(\theta - \rho - 2\delta_2)), \quad \rho + \delta_2 < \theta < \rho + 2\delta_2.$$

Функцию $v_{01}(\tau)$ определим выражением

$$v_{01}(\tau) := f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2}\right).$$

Функция $v_{01}(\tau)$ по построению в точке $\rho + 2\delta_2$ непрерывно и гладко до второй производной включительно стыкуется с функцией $f(\tau)$. Сравним значения $v_{01}(\tau)$ и $f(\tau)$ на промежутке $(\rho + \delta_2, \rho + 2\delta_2)$

$$v_{01}(\tau) - f(\tau) = f(\rho + 2\delta_2)\left(\frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2} + \frac{\kappa^3(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6}\exp(-\kappa(\theta - \rho - 2\delta_2))\right) =$$
$$= f(\rho + 2\delta_2)\frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2}(1 + \kappa\delta_2\exp(-\kappa(\theta - \rho - 2\delta_2))) < 0,$$

так как $(\tau-\rho-2\delta_2)^3<0$. Таким образом, $v_{01}(\tau)<f(\tau)$ на промежутке $(\rho+\delta_2,\rho+2\delta_2)$. Производные

$$v'_{01}(\tau)=f(\rho+2\delta_2)\left(-\kappa+\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)+\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)^2}{2\delta_2}\right),$$

$$v''_{01}(\tau)=f(\rho+2\delta_2)\left(\kappa^2+\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)}{\delta_2}\right)=\frac{\kappa^2(\tau-\rho-\delta_2)}{\delta_2}f(\rho+2\delta_2).$$

Знаки второй производной

$$v''_{01}(\tau):\begin{cases}>0, & \text{если} \quad \tau>\rho+\delta_2,\\ =0, & \text{если} \quad \tau=\rho+\delta_2,\\ <0, & \text{если} \quad \tau<\rho+\delta_2.\end{cases}$$

Поэтому на промежутке $(\rho+\delta_2,\rho+2\delta_2)$ функция $v_{01}(\tau)$ выпукла вниз, производная $v'_{01}(\tau)$ возрастает, и ее наибольшее значение $v'_{01}(\rho+2\delta_2)=f'(\rho+2\delta_2)<0$. Значит, на промежутке $(\rho+\delta_2,\rho+2ta_2)$ значения $v'_{01}(\tau)<0$. Проверяем условие (2.18)

$$v'_{01}(\tau)+\kappa v_{01}(\tau)=f(\rho+2\delta_2)\left(-\kappa+\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)+\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)^2}{2\delta_2}\right)+$$
$$+\kappa f(\rho+2\delta_2)\left(1-\kappa(\tau-\rho-2\delta_2)+\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)^2}{2}+\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)^3}{6\delta_2}\right)=$$
$$=f(\rho+2\delta_2)\frac{\kappa^2(\tau-\rho-2\delta_2)^2}{6\delta_2}(3+\kappa(\tau-\rho+\delta_2))>0$$

при $\tau\in[\rho,\rho+2\delta_2)$, то есть условие (2.18) выполняется для функции $v_{01}(\tau)$ на промежутке $[\rho,\rho+2\delta_2)$ и, в частности, на промежутке $[\rho+\delta_2,\rho+2\delta_2)$.

Теперь построим функцию $v_{02}(\tau)$, которая на промежутке $(\rho,\rho+\delta_2)$ принимает значения, меньшие, чем $f(\tau)$, убывает, выпукла вверх в точке $\rho+\delta_2$ непрерывно и гладко до второй производной включительно стыкуется с функцией $v_{01}(\tau)$ и удовлетворяет условию (2.18). Функцию $v_{02}(\tau)$ определим выражением

$$v_{02}(\tau):=v_{01}(\tau)-\frac{v'_{01}(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau-\rho-\delta_2)^3.$$

Заметим, что производная

$$v'_{01}(\rho)=f(\rho+2\delta_2)\left(-\kappa+\kappa^2(\rho-\rho-2\delta_2)+\frac{\kappa^2(\rho-\rho-2\delta_2)^2}{2\delta_2}\right)=-\kappa f(\rho+2\delta_2)<0.$$

По построению функция $v_{02}(\tau)$ в точке $\rho+\delta_2$ непрерывно и гладко до второй производной включительно стыкуется с функцией $v_{01}(\tau)$. При $\tau<\rho+\delta_2$ выполняются неравенства

$$v_{02}(\tau)<v_{01}(\tau)<\exp(-\kappa\tau).$$

Производные

$$v'_{02}(\tau)=v'_{01}(\tau)-\frac{v'_{01}(\rho)}{\delta_2^2}(\tau-\rho-\delta_2)^2,$$

$$v''_{02}(\tau)=v''_{01}(\tau)-\frac{2v'_{01}(\rho)}{\delta_2^2}(\tau-\rho-\delta_2).$$

На промежутке $(\rho, \rho + \delta_2)$ значения $v''_{01}(\tau) < 0$, поэтому и $v''_{02}(\tau) < 0$. Значит, функция $v_{02}(\tau)$ выпукла вверх, и ее производная $v'_{02}(\tau)$ убывает. Так как $v'_{02}(\rho) = 0$, то $v'_{02}(\tau) < 0$ и функция $v_{02}(\tau)$ убывает на промежутке $(\rho, \rho + \delta_2)$. Проверим выполнение условия (2.18). Имеем

$$v'_{02}(\tau) + \kappa v_{02}(\tau) = v'_{01}(\tau) - \frac{v'_{01}(\rho)}{\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^2 + \kappa\left(v_{01}(\tau) - \frac{v'_{01}(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^3\right) =$$

$$= \left(v'_{01}(\tau) + \kappa v_{01}(\tau)\right) - \frac{v'_{01}(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^2\left(3 + \kappa(\tau - \rho - \delta_2)\right).$$

Как отмечалось выше, неравенство $v'_{01}(\tau) + \kappa_1 v_{01}(\tau) \geq 0$ справедливо и на промежутке $(\rho, \rho + \delta_2)$. Считаем, что число κ настолько мало, что величина

$$\kappa\delta_2 = -\frac{1}{2}\ln h(\rho - \delta_1) \leq 3.$$

Тогда на промежутке $(\rho, \rho + \delta_2)$ значения $v'_{02}(\tau) + \kappa v_{02}(\tau) \geq 0$, то есть условие (2.18) выполняется.

Остается построить функцию $v_{03}(\tau)$, которая на промежутке $(\rho - \delta, \rho)$, где $\delta = 2\delta_1$, принимает значения, меньшие, чем $f(\tau)$, возрастает, выпукла вверх, непрерывно и гладко до второй производной включительно стыкуется с функциями $f(\tau)$ и $v_{02}(\tau)$ соответственно в точках $\rho - \delta$ и ρ и, кроме этого, удовлетворяет условию (2.18). Функцию $v_{03}(\tau)$ определим в виде многочлена 5-й степени

$$v_{03}(\tau) = \sum_{k=0}^{5} c_k(\tau - \rho + \delta)^k, \quad \tau \in [\rho - \delta, \rho],$$

где коэффициенты определяются условиями гладкой стыковки с функциями $f(\tau)$ и $v_{02}(\tau)$

$$v_{03}(\rho - \delta) = c_0 = f(\rho - \delta) > 0, \quad v'_{03}(\rho - \delta) = c_1 = f'(\rho - \delta) > 0,$$

$$v''_{03}(\rho - \delta) = 2c_2 = f''(\rho - \delta) < 0, \quad v_{03}(\rho) = \sum_{k=0}^{5} c_k\delta^k = v_{02}(\rho) > 0,$$

$$v'_{03}(\rho) = \sum_{k=1}^{5} kc_k\delta^{k-1} = v'_{02}(\rho) = 0, \quad v''_{03}(\rho) = \sum_{k=2}^{5} k(k-1)c_k\delta^{k-2} = v''_{02}(\rho) < 0.$$

Решая систему линейных уравнений, получаем выражения для коэффициентов

$$c_0 = f(\rho - \delta), \quad c_1 = f'(\rho - \delta), \quad c_2 = \frac{1}{2}f''(\rho - \delta),$$

$$c_3 = \frac{1}{\delta^3}(10(b_0 - c_0) - 6c_1\delta - 3c_2\delta^2 + \frac{1}{2}b_2\delta^2),$$

$$c_4 = \frac{1}{\delta^4}(-15(b_0 - c_0) + 8c_1\delta + 3c_2\delta^2 - b_2\delta^2),$$

$$c_5 = \frac{1}{\delta^5}(6(b_0 - c_0) - 3c_1\delta - c_2\delta^2 + \frac{1}{2}b_2\delta^2),$$

где $b_0 = v_{02}(\rho)$, $b_2 = v''_{02}(\rho)$. Исследуем поведение второй производной

$$v''_{03}(\tau) = 2c_2 + 6c_3(\tau - \rho + \delta) + 12c_4(\tau - \rho + \delta)^2 + 20c_5(\tau - \rho + \delta)^3, \quad \tau \in (\rho - \delta, \rho).$$

Обозначим $\tau - \rho + \delta = \delta t$ и запишем

$$v''_{03}(\tau) = 2c_2 + 6c_3\delta t + 12c_4\delta^2 t^2 + 20c_5\delta^3 t^3, \quad t \in (0,1).$$

Покажем, что значения $v''_{03}(\tau) < 0$ при достаточно малых положительных δ. Для этого получим асимптотику коэффициентов при $\delta \to 0$. Имеем

$$c_0 = f(\rho - \delta) = h(\rho - \delta)\exp(-\kappa\rho) = \left(h(\rho) - h'(\rho)\delta + \frac{h''(\rho)}{2}\delta^2 - \frac{h'''(\rho)}{6}\delta^3 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Здесь

$$h(\rho) = \sin(\pi/2) = 1, \quad h'(\rho) = A_0\cos(\pi/2) = 0, \quad h''(\rho) = -A_0^2\sin(\pi/2) = -A_0^2,$$
$$h'''(\rho) = -A_0^3\cos(\pi/2) = 0,$$

и, таким образом,

$$c_0 = \left(1 - \frac{A_0^2}{2}\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Далее,

$$c_1 = f'(\rho - \delta) = h'(\rho - \delta)\exp(-\kappa\rho) = \left(h'(\rho) - h''(\rho)\delta + \frac{h'''(\rho)}{2}\delta^2 + O(\delta^3)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

то есть

$$c_1 = \left(A_0^2\delta + O(\delta^3)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Коэффициент c_2 оказывается равным

$$c_2 = \frac{1}{2}f''(\rho - \delta) = \frac{1}{2}h''(\rho - \delta)\exp(-\kappa\rho)\frac{1}{2}\left(h''(\rho) - h'''(\rho)\delta + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

то есть

$$c_2 = \left(-\frac{A_0^2}{2} + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Получим асимптотику b_0 при $\delta \to 0$. Имеем

$$b_0 = v_{02}(\rho) = v_{01}(\rho) + \frac{v'_{01}(\rho)}{3}\delta_2 = f(\rho + 2\delta_2)\left(1 + 2\kappa\delta_2 + 2\kappa^2\delta_2^2 - \frac{4\kappa^2}{3}\delta_2^3\right) - \frac{\kappa f(\rho + 2\delta_2)}{3}\delta_2 =$$
$$= f(\rho + 2\delta_2)\left(1 + \frac{5}{3}\kappa\delta_2 + 2\kappa^2\delta_2^2 - \frac{4}{3}\kappa^2\delta_2^3\right).$$

Здесь

$$f(\rho + 2\delta_2) = f(\rho - \delta_1) = h(\rho - \delta_1)\exp(-\kappa\rho) =$$
$$= \left(h(\rho) - h'(\rho)\delta_1 + \frac{h''(\rho)}{2}\delta_1^2 - \frac{h'''(\rho)}{6}\delta_1^3 + O\left(\delta_1^4\right)\right)\exp(-\kappa\rho) =$$
$$= \left(1 - \frac{A_0^2}{2}\delta_1^2 + O\left(\delta_1^4\right)\right)\exp(-\kappa\rho) = \left(1 - \frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Из (2.20) получаем

$$\kappa\delta_2 = -\frac{1}{2}\ln h(\rho - \delta_1) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4)\right).$$

Пользуемся формулой Тейлора для логарифма

$$-\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x = \frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4).$$

Получаем

$$\kappa\delta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4)\right) = \frac{A_0^2}{16}\delta^2 + O(\delta^4), \tag{2.21}$$

соответственно

$$(\kappa\delta_2)^2 = O(\delta^4), \quad (\kappa\delta_2)^3 = O(\delta^6).$$

С учетом этого и (2.19) получаем

$$\kappa^2\delta_2^3 = \frac{1}{\kappa}(\kappa\delta_2)^3 = \frac{2\mu}{\delta}(\kappa\delta_2)^3 = O(\delta^5).$$

Поэтому

$$1 + \frac{5}{3}\kappa\delta_2 + 2\kappa^2\delta_2^2 - \frac{4}{3}\kappa^2\delta_2^3 = 1 + \frac{5A_0^2}{48}\delta^2 + O(\delta^4).$$

Таким образом, для b_0 получается следующая асимптотика при $\delta \to 0$:

$$b_0 = \left(1 - \frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4)\right)\left(1 + \frac{5}{48}A_0^2\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho) = \left(1 - \frac{1}{48}A_0^2\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Для $b_0 - c_0$ при $\delta \to 0$ имеем

$$b_0 - c_0 = \left(1 - \frac{1}{48}A_0^2\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho) - \left(1 - \frac{A_0^2}{2}\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

то есть

$$b_0 - c_0 = \left(\frac{23}{48}A_0^2\delta^2 + O(\delta^4)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Теперь получим асимптотику для b_2 при $\delta \to 0$. Имеем

$$b_2 = v_{02}''(\rho) = v_{01}''(\rho) + \frac{2v_{01}'(\rho)}{\delta_2}.$$

Здесь

$$v_{02}''(\rho) = -\kappa^2 f(\rho + 2\delta_2), \quad \frac{2v_{01}'(\rho)}{\delta_2} = -\frac{2\kappa}{\delta_2} f(\rho + 2\delta_2). \tag{2.22}$$

Из (2.21) получаем

$$\frac{1}{\delta_2} = \frac{16\kappa}{A_0^2\delta^2}\left(1 + O(\delta^2)\right)^{-1}.$$

Используя разложение $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$ для $x = O(\delta^2)$ и (2.19), получаем

$$\frac{1}{\delta_2} = \frac{16\kappa}{A_0^2\delta^2}\left(1 + O(\delta^2)\right) = \frac{8}{A_0^2\mu\delta}\left(1 + O(\delta^2)\right).$$

С учетом (2.19) и (2.22) имеем

$$b_2 = -f(\rho + 2\delta_2)\left(\kappa^2 + \frac{2\kappa}{\delta_2}\right) = -\left(1 - \frac{A_0^2}{8}\delta^2 + O(\delta^4)\right)\left(\frac{\delta^2}{4\mu^2} + \frac{\delta}{2\mu}\frac{8}{A_0^2\mu\delta}\left(1 + O(\delta^2)\right)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

то есть

$$b_2 = \left(-\frac{4}{A_0^2\mu^2} + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Теперь можно выписать асимптотику коэффициентов c_3, c_4 и c_5

$$c_3 = \frac{1}{\delta}\left(-\frac{7}{24}A_0^2 - \frac{2}{A_0^2\mu^2} + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

$$c_4 = \frac{1}{\delta^2}\left(-\frac{11}{16}A_0^2 + \frac{4}{A_0^2\mu^2} + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho),$$

$$c_5 = \frac{1}{\delta^3}\left(\frac{3}{8}A_0^2 - \frac{2}{A_0^2\mu^2} + O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Асимптотика второй производной $v''_{03}(\tau)$, где $\tau-\rho+\delta=\delta t$, $t\in(0,1)$, имеет вид

$$v''_{03}(\tau)=2c_2+6c_3\delta t+12c_4\delta^2t^2+20c_5\delta^3t^3=\left(-A_0^2+6\left(-\frac{7}{24}A_0^2-\frac{2}{A_0^2\mu^2}\right)t+\right.$$
$$\left.+12\left(-\frac{11}{16}A_0^2+\frac{4}{A_0^2\mu^2}\right)t^2+20\left(\frac{3}{8}A_0^2-\frac{2}{A_0^2\mu^2}\right)t^3+O(\delta^2)\right)\exp(-\kappa\rho).$$

Можно выбрать величину коэффициента μ в (2.19), который обеспечит отрицательность второй производной

$$\mu=\frac{4\sqrt{3}}{3A_0^2}.$$

Тогда

$$v''_{03}(\tau)=\left(-1-4t+\frac{3}{4}t^2+O(\delta^2)\right)A_0^2\exp(-\kappa\rho)<0$$

при достаточно малых значениях δ и функция $v'_{03}(\tau)$ убывает. Учитывая, что $v'_{03}(\rho-\delta)>0$ и $v'_{03}(\rho)=0$, делаем вывод о положительности значений $v'_{03}(\tau)$ и возрастании функции $v_{03}(\tau)$ на промежутке $(\rho-\delta,\rho)$. Условие (2.18) выполняется, построение функции $v_0(\tau)$ завершено. Лемма 2.1 доказана.

Итак, функция Z_+ сглаживается на линии Γ_{01}. Точно так же проходит сглаживание Z_+ и на линии Γ_{02}. В результате получается функция, отличная от Z_+ в окрестности линий Γ_{01} и Γ_{02}. Внесем соответствующие изменения в разбиение области $\mathbb{R}_+^2$ на подобласти, выделив окрестности линий Γ_{01} и Γ_{02}

$$\begin{aligned}
G_{00}&=\{(\xi,\tau)|\xi>\rho+2\delta_2,\ \tau>\rho+2\delta_2\},\\
G_{10}&=\{(\xi,\tau)|\xi>\tau,\ \rho-\delta<\tau<\rho+2\delta_2\},\\
G_{11}&=\{(\xi,\tau)|\xi>\tau,\ 0<\tau<\rho-\delta\},\\
G_{20}&=\{(\xi,\tau)|\rho-\delta<\xi<\rho+2\delta_2,\ \tau>\xi\},\\
G_{22}&=\{(\xi,\tau)|0<\xi<\rho-\delta,\ \tau>\xi\},
\end{aligned}$$

где $\delta=2\delta_1$. Рассмотрим кусочно-гладкую положительную функцию

$$\tilde{Z}_+(\xi,\tau)=\begin{cases}\tilde{r}\exp(-\kappa(\xi+\tau)), & \text{если} \quad (\xi,\tau)\in\overline{G}_{00},\\ \tilde{r}v_0(\tau)\exp(-\kappa\xi), & \text{если} \quad (\xi,\tau)\in\overline{G}_{10},\\ \tilde{r}h(\tau)\exp(-\kappa(\xi+\rho)), & \text{если} \quad (\xi,\tau)\in\overline{G}_{11},\\ \tilde{r}v_0(\xi)\exp(-\kappa\tau), & \text{если} \quad (\xi,\tau)\in\overline{G}_{20},\\ \tilde{r}h(\xi)\exp(-\kappa(\tau+\rho)), & \text{если} \quad (\xi,\tau)\in\overline{G}_{22},\end{cases}$$

где число $\tilde{r}$ берется $\geq r$ и уточняется ниже. Функция $\tilde{Z}_+(\xi,\tau)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $Z_+(\xi,\tau)$ в областях G_{00}, G_{11} и G_{22} и потому представляет гладкие куски верхнего решения задачи (2.2)–(2.4).

В области G_{10} имеем $\tilde{Z}_+=\tilde{r}v_0(\tau)\exp(-\kappa\xi)$ и

$$L(\tilde{Z}_+)=a^2\frac{\partial^2\tilde{Z}_+}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\tilde{Z}_+}{\partial\tau}-F'\tilde{Z}_+-z=\left(a^2\kappa^2v_0(\tau)-v'_0(\tau)\right)\tilde{r}\exp(-\kappa\xi)-F'\tilde{Z}_+-z\leq$$
$$\leq\left(a^2\kappa^2v_0(\tau)-v'_0(\tau)\right)\tilde{r}\exp(-\kappa\xi)-m^2\tilde{r}v_0(\tau)\exp(-\kappa\xi)-z=$$
$$=-\left(m^2v_0(\tau)+v'_0(\tau)-a^2\kappa^2v_0(\tau)\right)\tilde{r}\exp(-\kappa\xi)-z.$$

На промежутке $\tau\in[\rho-\delta,\rho]$ функция $v_0(\tau)=v_{03}(\tau)$ и по построению положительна и возрастает. Поэтому значения

$$m^2v_{03}(\tau)+v'_{03}(\tau)>0.$$

На промежутке $\tau \in [\rho, \rho + \delta_2]$ имеем

$$m^2 v_0(\tau) + v_0'(\tau) = m^2 v_{02}(\tau) + v_{02}'(\tau) = m^2 \left(v_{01}(\tau) - \frac{v_{01}'(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^3 \right) +$$

$$+ \left(v_{01}'(\tau) - \frac{v_{01}'(\rho)}{\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^2 \right) = m^2 v_{01}(\tau) + v'_{01}(\tau) - \frac{v_{01}'(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^2 \left(m^2(\tau - \rho - \delta_2) + 3 \right) =$$

$$= m^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2} \right) +$$

$$+ f(\rho + 2\delta_2)\left(-\kappa + \kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2\delta_2} \right) - \frac{v_{01}'(\rho)}{3\delta_2^2}(\tau - \rho - \delta_2)^2 \left(m^2(\tau - \rho - \delta_2) + 3 \right).$$

Величина $\tau - \rho - 2\delta_2 \in [-2\delta_2, -\delta_2]$, $\tau - \rho - \delta_2 \in [-\delta_2, 0]$, $v_{01}'(\rho) < 0$, и поэтому при достаточно малых κ и δ_2 значения

$$m^2 v_{02}(\tau) + v_{02}'(\tau) > 0.$$

На промежутке $\tau \in [\rho + \delta_2, \rho + 2\delta_2]$ имеем

$$m^2 v_0(\tau) + v_0'(\tau) = m^2 v_{01}(\tau) + v_{01}'(\tau) =$$

$$= m^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2} \right) +$$

$$+ f(\rho + 2\delta_2)\left(-\kappa + \kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2\delta_2} \right) =$$

$$= m^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} \right) +$$

$$+ f(\rho + 2\delta_2)\left(-\kappa + \kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2) \right) + \frac{\kappa^2 f(\rho + 2\delta_2)(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{6\delta_2}(m^2(\tau - \rho - 2\delta_2) + 3).$$

Величина $\tau - \rho - 2\delta_2 \in [-\delta_2, 0]$, поэтому при достаточно малых κ и δ_2 значения

$$m^2 v_{01}(\tau) + v_{01}'(\tau) > 0.$$

Таким образом, при достаточно малых κ и δ_2 и достаточно большом $\tilde{r}$ в области G_{10} значения

$$L(\tilde{Z}_+) \le 0.$$

В области G_{20} имеем $\tilde{Z}_+ = \tilde{r} v_0(\xi)\exp(-\kappa\tau)$ и

$$L(\tilde{Z}_+) = \left(a^2\kappa^2 v_0''(\xi) + \kappa v_0(\xi) \right)\tilde{r}\exp(-\kappa\tau) - F'\tilde{Z}_+ - z \le$$

$$\le -\left(m^2 v_0(\xi) - a^2 v_0''(\xi) + \kappa v_0(\xi) \right)\tilde{r}\exp(-\kappa\xi) - z.$$

На промежутке $\tau \in [\rho - 2\delta_1, \rho + \delta_2]$ функция $v_0(\tau)$ по построению положительна и выпукла вверх. Поэтому значения

$$m^2 v_0(\xi) - a^2 v_0''(\xi) > 0.$$

На промежутке $\tau \in [\rho + \delta_2, \rho + 2\delta_2]$ имеем

$$m^2 v_0(\xi) - a^2 v_0''(\xi) = m^2 v_{01}(\tau) - a^2 v_{01}''(\tau) =$$

$$= m^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2} + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^3}{6\delta_2} \right) -$$

$$-a^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(\kappa^2 + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)}{\delta_2}\right) = m^2 f(\rho + 2\delta_2)\left(1 - \kappa(\tau - \rho - 2\delta_2) + \frac{\kappa^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2}{2}\right) -$$
$$-a^2\kappa^2 f(\rho + 2\delta_2) + \frac{\kappa^2 f(\rho + 2\delta_2)(\tau - \rho - 2\delta_2)}{6\delta_2}(m^2(\tau - \rho - 2\delta_2)^2 - 6a^2).$$

Величина $\tau - \rho - 2\delta_2 \in [-\delta_2, 0]$, поэтому при достаточно малых κ и δ_2 значения

$$m^2 v_{01}(\tau) - a^2 v''_{01}(\tau) > 0.$$

Таким образом, при достаточно малых κ и δ_2 и достаточно большом $\tilde{r}$ в области G_{20} значения $L(\tilde{Z}_+) \le 0$. Поэтому функция $\tilde{Z}_+(\xi, \tau)$ является кусочно-гладким верхним решением задачи (2.2)–(2.4). Гладкость этой функции нарушается только на линии

$$\Gamma_\delta = \{(\xi, \xi) | 0 \le \xi \le \rho + 2\delta_2\}.$$

Лемма 2.2. *При пересечении линии Γ_δ в направлении нормали к ней производная функции $\tilde{Z}_+(\xi, \tau)$ по направлению этой нормали испытывает отрицательный скачок.*

Доказательство. Сначала найдем производную функции $\tilde{Z}_+(\xi, \tau)$ по направлению нормали к линии Γ_δ при переходе из области G_{10} в область G_{20}. В области Ω_{10} значения $\tilde{Z}_+ = \tilde{r}v_0(\tau)\exp(-\kappa\xi)$. Пусть $\mathbf{p}$ — внутренняя нормаль к Γ_δ в области G_{10}. Тогда

$$\left.\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial p}\right|_{G_{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial \tau}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\kappa v_0(\tau) - v_0'(\tau))\tilde{r}\exp(-\kappa\xi) < 0$$

в силу (2.18). В области G_{20} значения $\tilde{Z}_+$ симметричны значениям этой функции в области G_{10}. Поэтому, если $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к Γ_δ в области G_{20}, то производная

$$\left.\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial n}\right|_{G_{20}} < 0.$$

Отсюда следует, что производная функции $\tilde{Z}_+$ по направлению нормали к линии Γ_δ при переходе из области G_{10} в область G_{20} (или наоборот) испытывает отрицательный скачок.

Теперь найдем производную функции $\tilde{Z}_+(\xi, \tau)$ по направлению нормали к линии Γ_δ при переходе из области G_{11} в область G_{22}. В области G_{11} значения $\tilde{Z}_+ = \tilde{r}h(\tau)\exp(-\kappa(\xi + \rho))$. Пусть $\mathbf{p}$ — внутренняя нормаль к Γ_δ в области G_{11}. Тогда

$$\left.\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial p}\right|_{G_{11}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial \tau}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\kappa h(\tau) - h'(\tau))\tilde{r}\exp(-\kappa(\xi + \rho)) < 0,$$

так как функции $h(\tau)$ и $h'(\tau)$ положительны. Аналогично, производная

$$\left.\frac{\partial \tilde{Z}_+}{\partial n}\right|_{G_{22}} < 0,$$

где $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к Γ_δ в области G_{22}. Отсюда следует, что производная функции $\tilde{Z}_+$ по направлению нормали к линии Γ_δ при переходе из области G_{11} в область G_{22} (или наоборот) также испытывает отрицательный скачок. Лемма 2.2 доказана.

Отрицательность скачка производной положительной функции $\tilde{Z}_+(\xi, \tau)$ при пересечении линии Γ_δ в направлении нормали к ней позволяет применить результаты работы [4] и сгладить верхнее кусочно-гладкое решение задачи (2.2)–(2.4) на линии Γ_δ. Сглаживанием функции $\tilde{Z}_- = -\tilde{Z}_+$ получается нижнее решение задачи (2.2)–(2.4). Так как для функций $\tilde{Z}_\pm$ выполняются экспоненциальные оценки вида (1.9), то задача (2.2)–(2.4) имеет решение Z с экспоненциальной оценкой вида (1.9). Теорема 2.3 доказана.

3. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Итак, ряд (1.3) оказывается полностью построенным.

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* 1–5 *и одно из условий* 6, *или* 6(1), *то для достаточно малых* ε *задача* (0.1)–(0.3) *имеет решение* $u(x,t,\varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\overline{u}_k(x,t)+\Pi_k(x,\tau)+Q_k(\xi,t)+Q_k^*(\xi_*,t)+P_k(\xi,\tau)+P_k^*(\xi_*,\tau))$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon\to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для определения пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k\geq 1$ и полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения статьи [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказано, что представленная начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения имеет решение. От функции F не требовалась монотонность. Однако предполагалось, что нелинейная задача, определяющая главный член угловой части асимптотики, разрешима.

Отметим особенности рассмотренной задачи. Несмотря на то что приходится иметь дело только с линейными уравнениями, мы не можем использовать явное представление их решений из-за того, что нет явной формы главного члена угловой части асимптотики. Поэтому приходится накладывать дополнительные условия. Для доказательства разрешимости линейных уравнений используется метод верхних и нижних решений. При этом барьерные функции, как и в предыдущих работах, приходится угадывать с учетом необходимых оценок экспоненциального убывания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 255–274.
2. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1–11.
3. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 3. С. 582–597.
4. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear Analysis: Collections of Papers in Honor of Erich Rothe. N. Y.: Academic Press, 1978. P. 1–29.