ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 169–182

УДК 519.853

О ШАРОВОЙ ОБОЛОЧКЕ ГРАНИЦЫ КОМПАКТА С НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ СЕЧЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

© 2019 г. С. И. Дудов[1,*], М. А. Осипцев[1,**]

([1] 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия)

*e-mail: DudovSI@info.sgu.ru

**e-mail: Osipcevm@gmail.com

Поступила в редакцию 12.03.2018 г.

Рассматривается конечномерная задача о построении шаровой оболочки границы заданного компакта с минимальной площадью сечения ее двумерной плоскостью, проходящей через центр этой оболочки. Доказано, что решение задачи существует, получен критерий ограниченности множества решений. Установлены выпуклость целевой функции данной экстремальной задачи и соответствующая формула ее субдифференциала. Получен критерий решения задачи, на основе которого установлен ряд свойств решения, а также условия единственности решения. Доказано, что в двумерном случае, когда оцениваемый компакт является выпуклым телом, пересечение множества решений данной задачи и множества решений задачи об асферичности этого тела является единственной точкой, которая представляется решением задачи о шаровой оболочке границы того же тела с наименьшей толщиной. Библ. 32.

Ключевые слова: шаровая оболочка, граница компакта, субдифференциал, квазивыпуклость, выпуклое тело, функция расстояния, асферичность.

DOI: 10.1134/S0044466919010071

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оценка и приближение сложных множеств множествами простой структуры — одно из направлений негладкого анализа. В рамках этого направления можно выделить задачи по шаровым оценкам компактов, интерес к которым у математиков возник давно (см. [1]–[3]). Именно к ним можно отнести рассматриваемую здесь задачу.

Пусть D — некоторый компакт из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, ∂D — его граница, $\|x\|$ — евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\varkappa(x) \equiv R^2(x) - \rho^2(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1.1}$$

Здесь функции

$$R(x) = \max_{y\in D}\|x - y\| \quad \rho(x) = \min_{y\in\partial D}\|x - y\|$$

выражают соответственно расстояние от точки x до самой удаленной и самой ближайшей точки границы компакта D. Шаровая оболочка (шаровой слой) с центром в точке x, внешним радиусом $R(x)$ и внутренним радиусом $\rho(x)$ содержит границу компакта D. Величина $\pi\varkappa(x)$ выражает площадь сечения этой шаровой оболочки двумерной плоскостью, проходящей через точку x (в двумерном случае это площадь кольца, содержащего границу). При этом толщина этой оболочки, а также площадь сечения, является минимальной для всех возможных шаровых оболочек с центром в точке x.

Авторам не известно, рассматривалась ли такая задача ранее. Если D является выпуклым телом, то в качестве близких к постановке можно назвать задачу

$$\varphi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \to \min_{x\in D}, \tag{1.2}$$

т.е. задачу о наименьшей по толщине шаровой оболочке границы тела D и задачу об асферичности

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \to \min_{x \in D}. \tag{1.3}$$

Действительно, оптимальные значения целевых функций задач (1.1) и (1.2), а также разность оптимального значения функции $\psi(x)$ и единицы можно рассматривать как различные меры отличия выпуклого тела D от шара. Поэтому в некоторых случаях ожидается пересечение или даже совпадение решений этих задач.

Отметим, что задача (1.2) имеет давнюю историю. Она рассматривалась сначала в двумерном и трехмерном пространстве (см. [4]–[9]), затем в пространстве любой конечной размерности (см. [10]), а также с произвольной используемой нормой (см. [11]–[14]). Задача (1.3) менее известна. Но показатель асферичности выпуклого тела, то есть наименьшее значение функции $\psi(x)$ в задаче (1.3), нередко используется при описании свойств выпуклого тела и разработке методов его приближения (см. [15]–[17]). Эта задача исследовалась (см. [18]–[20]) в конечномерном пространстве с произвольной используемой нормой.

Целью работы является исследование свойств решения задачи (1.1), а также связь ее решения с решениями задач (1.2)–(1.3) в случаях, когда компакт D является выпуклым телом.

Во втором разделе изучаются свойства функции $\varkappa(x)$. Установлена ее выпуклость на $\mathbb{R}^p$, получена соответствующая формула субдифференциала. Доказано, что если D – строго выпуклое тело, то функция $\varkappa(x)$ – строго квазивыпукла на D. В третьем разделе получено необходимое и достаточное условие решения, на основе которого установлен ряд свойств решения, а также условие единственности решения. В четвертом разделе доказано существование решения, установлен критерий ограниченности множества решений. В заключительном пятом разделе доказано, что в двумерном случае с выпуклым телом D пересечение множества решений задачи (1.1) с множеством решений задачи (1.3) состоит из единственной точки, которая является решением задачи (1.2). Для трехмерного случая приведен пример, когда D – выпуклое тело и при этом решения задач (1.1), (1.2) и (1.3) не пересекаются, то есть все они имеют самостоятельное значение.

Исследование проводилось, в основном, средствами выпуклого анализа.

Далее используются следующие обозначения: $\operatorname{int} A$, $\operatorname{co} A$, ∂A – соответственно внутренность, выпуклая оболочка, граница множества A, $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$, $\underline{\partial} f(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : f(y) - f(x) \geq \langle v, y - x\rangle, \forall y \in X\}$ – субдифференциал выпуклой на открытом выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}^p$ функции $f(x)$ в точке $x \in X$, $\overline{\partial} f(x) = \{w \in \mathbb{R}^p : f(y) - f(x) \leq \langle w, y - x\rangle, \forall y \in X\}$ – супердифференциал вогнутой на открытом выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}^p$ функции $f(x)$ в точке $x \in X$, $f'(x, g) = = \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x + \alpha g) - f(x)]$ – производная по направлению g функции $f(\cdot)$ в точке x, $Q^R(x) = \{y \in D : R(x) = \|x - y\|\}$ – множество самых удаленных точек из D от точки x, $Q^\rho(x) = \{y \in \partial D : \rho(x) = \|x - y\|\}$ – проекция точки x на границу компакта D, $B(x, r), S(x, r)$ – шар и сфера с центром в точке x и радиусом r.

2. СВОЙСТВА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

2.1. Сначала приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные факты, касающиеся свойств функций $R(x)$ и $\rho(x)$.

Лемма 2.1 (см. [13], [21]). *Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, формулу ее субдифференциала в любой точке $X \subset \mathbb{R}^p$ можно выразить в виде*

$$\underline{\partial} R(x) = \operatorname{co}\left\{\frac{x - z}{\|x - z\|} : z \in Q^R(x)\right\}, \tag{2.1}$$

где $Q^R(x) = \{y \in D : R(x) = \|x - y\|\}$.

Известно (см., например, [22, гл. 2]), что функция $\rho(x)$ является липшицевой на всем пространстве $\mathbb{R}^p$, причем

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p. \tag{2.2}$$

В [23, гл. 2, § 8] доказано, что функция $\rho(x)$ является супердифференцируемой (в смысле В.Ф. Демьянова–А.М. Рубинова, см. [23], [24]) в точках $x \notin \partial D$, а именно справедлива

Лемма 2.2. *Функция $\rho(x)$ дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в точках $x \notin \partial D$, причем*

$$\rho'(x, g) = \min_{w \in \overline{\partial}\rho(x)} \langle w, g \rangle,$$

где

$$\overline{\partial}\rho(x) = \operatorname{co}\left\{ \frac{x - z}{\|x - z\|} : z \in Q^{\rho}(x) \right\}, \tag{2.3}$$

а $Q^{\rho}(x) = \{z \in \partial D : \rho(x) = \|x - z\|\}$.

Отметим, что в точках $x \in \partial D$ функция $\rho(x)$ может не быть дифференцируемой по всем направлениям (см., например, [23, гл. 2, § 8]).

Теперь покажем, что для произвольного компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ функция $\rho^2(x)$ является супердифференцируемой всюду на $\mathbb{R}^p$.

Лемма 2.3. *Функция $\rho^2(x)$ является дифференцируемой по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$, причем*

$$(\rho^2)'(x, g) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in \partial D, \\ \min\limits_{w \in 2\rho(x)\overline{\partial}\rho(x)} \langle w, g \rangle, & \text{если} \quad x \notin \partial D, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\overline{\partial}\rho(x)$ определяется формулой (2.3).

Доказательство. Из дифференцируемости по направлениям функции $\rho(x)$ в точках $x \notin \partial D$ легко вытекает дифференцируемость по направлениям функции $\rho^2(x)$, причем

$$(\rho^2)'(x, g) = 2\rho(x)\rho'(x, g).$$

Поэтому формула (2.4) для случая $x \notin \partial D$ следует из леммы 2.2.

Пусть $x \in \partial D$, а значит, $\rho(x) = 0$. Тогда в силу (2.2) для произвольного направления $g \in \mathbb{R}^p$ имеем

$$0 \le \rho^2(x + \alpha g) - \rho^2(x) \le \alpha \|g\| (\rho(x + \alpha g) + \rho(x)).$$

Отсюда получаем дифференцируемость по направлению g, причем $(\rho^2)'(x, g) = 0$.

Замечание 2.1. Форма (2.4) производной по направлениям функции $\rho^2(x)$ означает, что формула

$$\overline{\partial(\rho^2)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in \partial D, \\ 2\rho(x)\overline{\partial}\rho(x), & \text{если} \quad x \notin \partial D, \end{cases}$$

выражает супердифференциал (в смысле определения В.Ф. Демьянова–А.М. Рубинова [23], [24]).

Отметим также следующий факт (см. [25], [26]).

Лемма 2.4. *Если D – выпуклое тело, то функция $\rho(x)$ является вогнутой на D, а ее супердифференциал $\overline{\partial}\rho(x)$ в точках $x \in \operatorname{int} D$ выражается формулой* (2.3).

2.2. Теперь обратимся непосредственно к свойствам функции $\varkappa(x)$.

Теорема 2.1. *Функция $\varkappa(x)$ является выпуклой на всем пространстве $\mathbb{R}^p$, а ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ можно выразить в виде*

$$\underline{\partial}\varkappa(x) = 2(\operatorname{co} Q^{\rho}(x) - \operatorname{co} Q^{R}(x)). \tag{2.5}$$

Доказательство. 1. Для евклидовой нормы имеет место соотношение

$$\|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\|^2 = \alpha\|x_1\|^2 + (1-\alpha)\|x_2\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \tag{2.6}$$

для любых точек x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^p$ и $\alpha \in [0,1]$. Возьмем произвольную точку $y(\alpha) \in Q^R(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$. Поскольку $y(\alpha) \in D$, то, используя (2.6), получаем

$$\begin{aligned} R^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= \|\alpha(x_1 - y(\alpha)) + (1-\alpha)(x_2 - y(\alpha))\| = \\ &= \alpha\|x_1 - y(\alpha)\|^2 + (1-\alpha)\|x_2 - y(\alpha)\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \le \\ &\le \alpha R^2(x_1) + (1-\alpha)R^2(x_2) - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

то есть, функция $R^2(x)$ является сильно выпуклой (см. [27], [28]) на $\mathbb{R}^p$.

Аналогично, если взять точку $z(\alpha) \in Q^{\rho}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$, то, поскольку $z(\alpha) \in \partial D$, из (2.6) вытекает

$$\begin{aligned} \rho^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= \|\alpha(x_1 - z(\alpha)) + (1-\alpha)(x_2 - z(\alpha))\|^2 = \\ &= \alpha\|x_1 - z(\alpha)\|^2 + (1-\alpha)\|x_2 - z(\alpha)\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \ge \\ &\ge \alpha\rho^2(x_1) + (1-\alpha)\rho^2(x_2) - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

то есть функция $\rho^2(x)$ является слабо вогнутой (см. [29], [30]) на $\mathbb{R}^p$.

Вычитая из неравенства (2.7) неравенство (2.8), делаем вывод о выпуклости функции $\varkappa(x)$ на $\mathbb{R}^p$.

2. Из лемм 2.1, 2.3 следует, что функция $\varkappa(x)$ дифференцируема по направлениям в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$. При этом если $x \notin \partial D$, то

$$\begin{aligned} \varkappa'(x,g) &= (R^2)'(x,g) - (\rho^2)'(x,g) = 2R(x)R'(x,g) - 2\rho(x)\rho'(x,g) = \\ &= 2R(x)\max_{v \in \underline{\partial}R(x)}\langle v, g\rangle - 2\rho(x)\min_{w \in \partial\rho(x)}\langle w, g\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (2.1) и (2.3), получаем

$$\varkappa'(x,g) = 2\max_{v \in co\{x - y: y \in Q^R(x)\}}\langle v, g\rangle - 2\min_{w \in co\{x - z: z \in Q^{\rho}(x)\}}\langle w, g\rangle = \max_{v \in 2(coQ^R(x) - coQ^{\rho}(x))}\langle v, g\rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^p.$$

Справедливость этой формулы для любого направления $g \in \mathbb{R}^p$, как известно (см. [23], [24]), однозначно определяет формулу субдифференциала выпуклой функции.

Справедливость формулы (2.5) для случая $x \in \partial D$ доказывается аналогично, при этом $Q^{\rho}(x) = \{x\}$.

Замечание 2.2. Замечательное свойство евклидовой нормы (2.6) является существенным для выпуклости функции $\varkappa(x)$. Приведем пример нормы, когда $\varkappa(x)$ может быть не выпуклой.

Пример 2.1. Пусть $D = \operatorname{co}\{(-3,0),(3,0),(0,3)\} \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник, $\|x\| = \max\{|x^1|, |x^2|\}$ – чебышёвская норма точки $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$. Для точек $x_1 = (0,0)$ и $x_2 = (0,1)$ имеем

$$R(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 3, \quad \rho(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 1 - \alpha$$

и соответственно

$$\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 8 + 2\alpha - \alpha^2, \quad \alpha\varkappa(x_1) + (1-\alpha)\varkappa(x_2) = 8 + \alpha.$$

Таким образом, для этой пары точек имеем

$$\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha\varkappa(x_1) + (1-\alpha)\varkappa(x_2) \quad \forall\alpha \in (0,1).$$

Напомним, что выпуклое множество называется строго выпуклым, если его граница не содержит отрезков.

Теорема 2.2. *Если D — строго выпуклое тело, то функция $\varkappa(x)$ является строго квазивыпуклой на D, то есть*

$$\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \max\{(\varkappa x_1), \varkappa(x_2)\} \quad \forall \alpha \in (0,1); \quad x_1, x_2 \in D. \tag{2.9}$$

Доказательство. С учетом уже доказанной выпуклости функции $\varkappa(x)$, нам достаточно доказать выполнение строгого неравенства (2.9) для любых точек x_1 и x_2 из D таких, что $\varkappa(x_1) = \varkappa(x_2)$. Противное этому означает существование точек x_1 и x_2 из D таких, что $\varkappa(x_1) = \varkappa(x_2) = \varkappa(\alpha_0 x_1 + (1-\alpha_0)x_2)$ для некоторого $\alpha_0 \in (0,1)$. Но тогда из выпуклости функции $\varkappa(x)$ следует

$$\varkappa(x_1) = \varkappa(x_2) = \varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{2.10}$$

Из вогнутости функции $\rho(x)$ на D, в соответствии с леммой 2.4, вытекает

$$\rho^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha\rho^2(x_1) + (1-\alpha)\rho^2(x_2) - \alpha(1-\alpha)(\rho(x_1) - \rho(x_2))^2.$$

Тогда, используя также неравенство (2.7), получаем

$$\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\varkappa(x_1) + (1-\alpha)\varkappa(x_2) - \alpha(1-\alpha)(\|x_1 - x_2\|^2 - (\rho(x_1) - \rho(x_2))^2).$$

Следовательно, ввиду (2.2), нам остается рассмотреть ситуацию, когда одновременно с (2.10) имеет место

$$\rho(x_1) = \rho(x_2) + \|x_1 - x_2\|. \tag{2.11}$$

Нетрудно видеть, что равенство (2.11) означает

$$B(x_1, \rho(x_1)) \subset B(x_2, \rho(x_2)) \subset D \tag{2.12}$$

и при этом шар $B(x_1, \rho(x_1))$ касается сферы $S(x_2, \rho(x_2))$ в единственной точке

$$z^* = x_2 + \frac{\rho(x_2)}{\|x_1 - x_2\|}(x_1 - x_2). \tag{2.13}$$

Поскольку шар $B(x_1, \rho(x_1))$ касается ∂D в точке из $Q^\rho(x_1)$, а шар $B(x_2, \rho(x_2))$ соответственно в точке из $Q^\rho(x_2)$, то из (2.11)–(2.13) вытекает

$$Q^\rho(x_1) = \{z^*\} \subset Q^\rho(x_2). \tag{2.14}$$

Кроме того, следствием (2.11)–(2.13) является линейность поведения функции $\rho(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$

$$\rho(x_2 + \alpha(x_1 - x_2)) = \rho(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha\rho(x_1) + (1-\alpha)\rho(x_2) = \rho(x_2) - \alpha\|x_1 - x_2\|.$$

Отсюда получаем

$$\rho'(x_2, x_1 - x_2) = -\|x_1 - x_2\|. \tag{2.15}$$

Из (2.10) следует, что $\varkappa'(x_2, x_1 - x_2) = 0$, что эквивалентно

$$R(x_2)R'(x_2, x_1 - x_2) = \rho(x_2)\rho'(x_2, x_1 - x_2). \tag{2.16}$$

В соответствии с леммой 2.1

$$R'(x_2, x_1 - x_2) = \max_{v \in \partial \underline{R}(x_2)} \langle v, x_1 - x_2 \rangle = \max_{y \in Q^R(x_2)} \left\langle \frac{x_2 - y}{\|x_2 - y\|}, x_1 - x_2 \right\rangle = \frac{1}{R(x_2)} \max_{y \in Q^R(x_2)} \langle x_2 - y, x_1 - x_2 \rangle.$$

Обозначим через $y_R \in Q^R(x_2)$ точку, для которой

$$R'(x_2, x_1 - x_2) = \frac{1}{R(x_2)} \langle x_2 - y_R, x_1 - x_2 \rangle. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.15) и (2.17) в (2.16), имеем

$$\langle x_2 - y_R, x_1 - x_2 \rangle = -\rho(x_2)\|x_1 - x_2\|. \tag{2.18}$$

Отсюда, используя (2.13), получаем

$$\langle x_2 - y_R, x_2 - z^* \rangle = \rho^2(x_2). \tag{2.19}$$

Так как $z^* \in Q^\rho(x_2)$, то гиперплоскость

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle z^* - x, x_2 - z^* \rangle = 0\} \tag{2.20}$$

является опорной одновременно к шару $B(x_2, \rho(x_2))$ и к выпуклому телу D в точке z^*. Кроме того, поскольку $\rho^2(x_2) = \langle x_2 - z^*, x_2 - z^* \rangle$, из (2.19) следует

$$\langle z^* - y_R, x_2 - z^* \rangle = 0, \tag{2.21}$$

то есть точка y_R лежит на гиперплоскости π, как и точка z^*. Но опорная гиперплоскость может касаться строго выпуклого тела в единственной точке, следовательно, точки z^* и y_R совпадают. А поскольку $z^* \in Q^\rho(x_2)$, $y_R \in Q^R(x_2)$, получаем равенство $R(x_2) = \rho(x_2)$, которое говорит о том, что тело D представляет собой шар $B(x_2, R(x_2))$. Это, как нетрудно видеть, противоречит (2.10).

Замечание 2.3. Нижеследующий пример показывает, что строгая выпуклость тела D является существенным требованием для строгой квазивыпуклости функции $\varkappa(x)$ на D.

Пример 2.2. Выпуклое тело $D = \mathrm{co}\{B((0,1),1),(2,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ не является строго выпуклым. Для точек $x_1 = (0,0) \in D$ и $x_2 = (0,1) \in D$ при $\alpha \in [0,1]$ имеем $Q^R(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \{(2,0)\}$, $(0,0) \in Q^\rho(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ и

$$R^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 4 + (1-\alpha)^2, \quad \rho^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = (1-\alpha)^2.$$

Таким образом, $\varkappa(\alpha x_1 + (1 - \alpha x_2)) \equiv 4$ для всех $\alpha \in [0,1]$, что говорит об отсутствии строгой квазивыпуклости и строгой выпуклости функции $\varkappa(x)$ одновременно.

Замечание 2.4. Покажем, что при наличии строгой выпуклости тела D строгой квазивыпуклости функции $\varkappa(x)$ на всем пространстве может не быть.

Пример 2.3. Пусть $p = 2$, тело

$$D = B((0,-4),5) \bigcap B((0,4),5)$$

является строго выпуклым. Нетрудно видеть, что для точек $x_1 = (4,1) \notin D$ и $x_2 = (4,-1) \notin D$ имеем

$$[x_1, x_2] \cap D = \emptyset, \quad Q^R(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \{(-3,0)\}, \quad Q^\rho(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \{(3,0)\},$$

$$R^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 49 + (2\alpha - 1)^2, \quad \rho^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 1 + (2\alpha - 1)^2.$$

В итоге получаем $\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \equiv 48$, $\alpha \in [0,1]$.

Замечание 2.5. Теперь покажем, что из строгой выпуклости тела D не следует строгая выпуклость функции $\varkappa(x)$ на D.

Пример 2.4. Пусть $p = 2$ и строго выпуклое тело D то же самое, что и в примере 2.3. Возьмем точки

$$x_1 = (0,1) \in D, \quad x_2 = (0,0) \in D.$$

Для $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$(3,0) \in Q^R(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), \quad (0,1) \in Q^\rho(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

и соответственно

$$R^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 9 + \alpha^2, \quad \rho^2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = (1-\alpha)^2,$$

$$\varkappa(x_1) = 10, \quad \varkappa(x_2) = 8, \quad \varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 8 + 2\alpha.$$

Таким образом,

$$\varkappa(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha\varkappa(x_1) + (1-\alpha)\varkappa(x_2),$$

то есть функция $\varkappa(x)$ не является строго выпуклой на D.

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Обозначим через

$$C_{\varkappa} = \{y \in \mathbb{R}^p : \varkappa(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varkappa(x)\}$$

множество решений задачи (1.1).

3.1. Формула (2.5) субдифференциала выпуклой функции $\varkappa(x)$ позволяет получить критерий решения задачи (1.1).

Теорема 3.1. *Для того, чтобы точка x^* была точкой минимума функции $\varkappa(x)$ на $\mathbb{R}^p$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{co} Q^R(x^*) \bigcap \operatorname{co} Q^\rho(x^*) \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Если же точка x^* такова, что

$$0_p \in \operatorname{int}\{\operatorname{co} Q^R(x^*) - \operatorname{co} Q^\rho(x^*)\}, \tag{3.2}$$

то она является единственным решением задачи (1.1), *причем, существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\varkappa(x) \geq \varkappa(x^*) + \varepsilon\|x - x^*\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{3.3}$$

Доказательство. 1. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [21, гл. 4])

$$x^* \in C_{\varkappa} \Leftrightarrow 0_p \in \underline{\partial\varkappa}(x^*). \tag{3.4}$$

Остается заметить, что включение (3.4), как это следует из (2.5), эквивалентно выполнению соотношения (3.1).

2. Пусть выполняется (3.2), а значит, в соответствии с (2.5) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B(0_p, \varepsilon) \subset \underline{\partial\varkappa}(x^*)$. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{R}^p$

$$v(x) = \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}(x - x^*) \in \underline{\partial\varkappa}(x^*)$$

и, следовательно, в соответствии с определением субдифференциала

$$\varkappa(x) - \varkappa(x^*) \geq \langle v(x), x - x^* \rangle = \varepsilon\|x - x^*\|.$$

3.2. Исследуем свойства решения задачи (1.1) с помощью полученного критерия (3.1).

Следствие 3.1. Граничная точка x^* компакта D является точкой минимума функции $\varkappa(x)$ тогда и только тогда, когда она является чебышёвским центром этого компакта, то есть $R(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x)$.

Доказательство. Пусть $x^* \in \partial D \cap C_{\varkappa}$. Тогда $Q^\rho(x^*) = \{x^*\}$, а из теоремы 3.1 вытекает $x^* \in \operatorname{co} Q^R(x^*)$. Используя формулу (2.1), получаем

$$x^* \in \operatorname{co} Q^R(x^*) \Leftrightarrow 0_p \in \{x^* - y : y \in Q^R(x^*)\} \Leftrightarrow 0_p \in \underline{\partial R}(x^*).$$

В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см. [21, гл. 4]) означает, что x^* — точка минимума выпуклой функции $R(x)$ на $\mathbb{R}^p$, то есть, это чебышёвский центр компакта D. Легко также сделать обратный вывод о том, что граничная точка, являющаяся чебышёвским центром, будет удовлетворять соотношению (3.1), то есть являться одним из решений задачи (1.1).

Замечание 3.1. Простые примеры показывают, что если чебышевский центр компакта D является одновременно точкой минимума функции $\varkappa(x)$, он может быть неединственным решением задачи (1.1) (см. пример 5.1).

Нетрудно видеть, что из второй части теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. Если $x^* \in \partial D$ и при этом

$$x^* \in \operatorname{int} \operatorname{co} Q^R(x^*),$$

то точка x^*, являясь чебышёвским центром компакта D, будет единственным решением задачи (1.1), то есть $C_{\varkappa} = \{x^*\}$.

Следствие 3.3. Пусть D – выпуклый компакт. Если $x^* \in C_\varkappa$ и при этом $x^* \notin D$, то $Q^\rho(x^*) = \{x_R\}$, где точка x_R является чебышёвским центром компакта D и $[x^*, x_R] \subset C_\varkappa$.

Доказательство. Проекция точки $x^* \notin D$ на выпуклый компакт D состоит из единственной точки, то есть $Q^\rho(x^*) = \{x_R\}$. Гиперплоскость $\pi = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle x^* - x_R, x - x_R \rangle = 0\}$ является опорной к D, причем

$$\langle x^* - x_R, x - x_R \rangle \le 0 \quad \forall x \in D. \tag{3.5}$$

Поскольку $x^* \in C_\varkappa$, то по теореме 3.1 имеем $x_R \in \operatorname{co} Q^R(x^*)$. Тогда по теореме Каратеодори (напр., [21, гл. 1]), существуют точки $\{y_i\}_{i=\overline{1,m}} \subset Q^R(x^*)$, положительные числа $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $2 \le m \le p+1$, такие, что

$$x_R = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i. \tag{3.6}$$

Так как $x_R \in \pi$ и $Q^R(x^*) \subset D$, то из (3.5), (3.6) следует $\{y_i\}_{i=\overline{1,m}} \subset \pi$ и поэтому

$$x_R \in \pi \bigcap \operatorname{co} Q^R(x^*). \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что для точек $x(\alpha) = \alpha x^* + (1-\alpha)x_R \in [x^*, x_R]$ при $\alpha \in [0,1)$

$$Q^R(x(\alpha)) = \pi \bigcap Q^R(x^*), \quad Q^\rho(x(\alpha)) = \{x_R\}.$$

Поэтому, ввиду (3.7), выполняется соотношение

$$\operatorname{co} Q^R(x(\alpha)) \bigcap \operatorname{co} Q^\rho(x(\alpha)) \ne \emptyset,$$

что по теореме 3.1, означает, что $x(\alpha) \in C_\varkappa$. В частности, при $\alpha = 0$ получаем $x_R \in C_\varkappa$. А поскольку точка $x_R \in \partial D$, то, в соответствии со следствием 3.1, она является чебышёвским центром компакта D.

Обозначим через

$$C_\varkappa(D) = \{y \in D : \varkappa(y) = \min_{x \in D} \varkappa(x)\}.$$

Из следствия 3.3, очевидно, вытекает

Следствие 3.4. Если D – выпуклый компакт, то $C_\varkappa \cap D \ne \emptyset$, а точнее

$$C_\varkappa(D) = C_\varkappa \bigcap D.$$

Замечание 3.2. Примеры показывают, что если компакт D не является выпуклым, то возможна ситуация $C_\varkappa \cap D = \emptyset$ и даже $C_\varkappa \cap \operatorname{co} D = \emptyset$.

Следствие 3.5. Если D – строго выпуклое тело, то решение задачи (1.1) является единственным, то есть $C_\varkappa = \{x^*\}$, причем $x^* \in \operatorname{int} D$.

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что решение задачи

$$\varkappa(x) \to \min_{x \in D}$$

состоит из единственной точки: $C_\varkappa(D) = \{x^*\}$. В силу следствия 3.4, получаем $x^* \in C_\varkappa$.

Предположим, что $x^* \in \partial D$. Построим в этой точке опорную гиперплоскость к D:

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle v_0, x - x^* \rangle = 0\}.$$

Поскольку D – строго выпуклое тело, то можно считать, что

$$\langle v_0, x - x^* \rangle < 0 \quad \forall x \in D, \quad x \ne x^*,$$

а значит, и

$$\langle v_0, x - x^* \rangle < 0 \quad \forall x \in Q^R(x^*).$$

Это, с учетом $Q^{\rho}(x^*) = \{x^*\}$, делает невыполнимым условие оптимальности (3.1) в точке x^*. То есть мы получили противоречие с тем, что $x^* \in C_{\varkappa}$. Таким образом $x^* \in \operatorname{int} D$.

Отсутствие других точек в $C_{\varkappa}$, не принадлежащих D, вытекает из выпуклости множества $C_{\varkappa}$ и тем учетом, что $x^* \in \operatorname{int} D$.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Полученный нами критерий решения будет использован здесь для обоснования существования решения задачи (1.1).

Введем следующие дополнительные обозначения:

$\operatorname{Aff} D$ – аффинная оболочка компакта D;

$\operatorname{Lin} D = \operatorname{Aff} D - x_0$ – несущее пространство компакта D. Здесь x_0 – любая точка из D. То есть $\operatorname{Lin} D$ – пересечение всех пространств, содержащих $\operatorname{Aff} D - x_0$;

$\dim(\operatorname{Lin} D)$ – размерность несущего пространства;

$(\operatorname{Lin} D)^{\perp}$ – ортогональное пространство к $\operatorname{Lin} D$;

$$C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D) = \{y \in \operatorname{Aff} D : \varkappa(y) = \min_{x \in \operatorname{Aff} D} \varkappa(x)\}.$$

Теорема 4.1. 1. *Решение задачи* (1.1) *существует.*

2. *Множество решений $C_{\varkappa}$ является ограниченным тогда и только тогда, когда*

$$\dim(\operatorname{Lin} D) = p.$$

3. *Если* $\dim(\operatorname{Lin} D) < p$, *то*

$$C_{\varkappa} = C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D) + (\operatorname{Lin} D)^{\perp}. \tag{4.1}$$

Доказательство. (а) Предположим, что существует точка x_0 и $r > 0$ такие, что $\partial D \subset S(x_0, r)$, то есть граница компакта D располагается на сфере, и, кроме того, $\dim(\operatorname{Lin} D) = p$. Очевидно, в этом случае $\varkappa(x_0) = 0$ и $C_{\varkappa} = \{x_0\}$.

(б) Рассмотрим случай, когда

$$\partial D \not\subset S(y, r) \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad r > 0, \tag{4.2}$$

$$\dim(\operatorname{Lin} D) = p. \tag{4.3}$$

Докажем, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$R(x) - \rho(x) \ge \delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{4.4}$$

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ и $\{\delta_k\}_{k=1,2,\dots} : \delta \downarrow 0$, $k \to \infty$ такие, что

$$R(x_k) - \rho(x_k) < \delta_k. \tag{4.5}$$

Если $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ – ограниченная последовательность, то без ограничения общности можно считать, что она сходится: $x_k \to x^*$, $k \to \infty$. Тогда, переходя в (4.5) к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $R(x^*) - \rho(x^*) = 0$. Это дает включение, $\partial D \subset S(x^*, R(x^*))$, что противоречит (4.2).

Если же $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – неограниченная последовательность, то можно считать $R(x_k) \to \infty$, $k \to \infty$. Вместе с (4.5) это означает, что компакт D можно поместить в шаровой слой сколь угодно большого радиуса и сколь угодно тонкий, что противоречит (4.3). Итак, (4.4) доказано.

(в) Теперь покажем, что при выполнении условий (4.2), (4.3) решение задачи (1.1) не только существует, но и ограничено. Для этого, очевидно, достаточно доказать ограниченность нижнего лебегова множества функции $\varkappa(x)$. Действительно, зафиксируем некоторую точку x_0. Тогда, используя (4.4), получаем

$$G^{\varkappa}(x_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^p : \varkappa(x) \le \varkappa(x_0)\} \subset \{x \in \mathbb{R}^p : R^2(x) - (R(x) - \delta)^2 \le \varkappa(x_0)\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) \le \alpha_0\}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\varkappa(x_0) + \delta}{2\delta}}.$$

Но множество

$$\{x \in \mathbb{R}^p : R(x) \le \alpha_0\} = \{x \in \mathbb{R}^p : \max_{y \in D} \|x - y\| \le \alpha_0\} = \bigcap_{y \in D} B(y, \alpha_0)$$

является ограниченным.

(г) Рассмотрим теперь оставшийся случай $\dim(\operatorname{Lin} D) < p$.

Нетрудно видеть, что из пунктов (а), (б), (в) вытекает не только существование решения задачи

$$\varkappa(x) \to \min_{x \in \operatorname{Aff} D},$$

но и ограниченность множества $C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D)$, при этом $C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D) \subset C_{\varkappa}$.

Очевидно, для произвольных точек

$$y \in C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D), \quad z \in (\operatorname{Lin} D)^{\perp}$$

выполняется

$$Q^R(y + z) = Q^R(y), \quad Q^{\rho}(y + z) = Q^{\rho}(y).$$

Следовательно, условие оптимальности (3.1) будет выполняться для точки $y + z$ также, как и для точки y. Тем самым мы показали, что решение задачи существует и

$$C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D) + (\operatorname{Lin} D)^{\perp} \subset C_{\varkappa}. \tag{4.6}$$

Чтобы показать обратное для (4.6) выключение, возьмем произвольную точку $y \in C_{\varkappa}$, $y \notin \operatorname{Aff} D$, и пусть точка z является проекцией точки y на $\operatorname{Aff} D$. Очевидно, $Q^R(z) = Q^R(y)$, $Q^{\rho}(z) = Q^{\rho}(y)$ и, следовательно, для точки z, как и для точки y, выполняется условие оптимальности, то есть $z \in C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D)$. И поскольку $y - z \in (\operatorname{Lin} D)^{\perp}$,

$$y = z + (y - z) \in C_{\varkappa}(\operatorname{Aff} D) + (\operatorname{Lin} D)^{\perp},$$

то обратное к (4.6) включение доказано. Тем самым мы доказали п. 3. теоремы.

(д) Итак, мы доказали, что решение в любом случае существует и формулу (4.1) в случае $\dim(\operatorname{Lin} D) < p$. Если $\dim(\operatorname{Lin} D) = p$, то из пунктов (а), (б), (в) следует ограниченность множества решений $C_{\varkappa}$. С другой стороны, если $\dim(\operatorname{Lin} D) < p$, то множество C, как это видно из (4.1), является неограниченным. Тем самым утверждение 2 теоремы тоже доказано.

5. СВЯЗЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ (1.1), (1.2), (1.3) В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В этом разделе задачи (1.1), (1.2), (1.3) рассматриваются на плоскости, причем компакт D будем считать выпуклым телом.

Обозначим через

$$C_{\varphi} = \{y \in D : \varphi(y) = \min_{x \in D} \varphi(x)\}, \quad C_{\psi} = \{y \in D : \psi(y) = \min_{x \in D} \psi(x)\}$$

множества решений задач (1.2) и (1.3) соответственно.

Известно (см. [10], [11]), что решение задачи (1.2) для случая евклидовой нормы, как и для любой другой нормы со строго выпуклым шаром, является единственным, то есть $C_{\varphi} = \{x^*\}$, причем $x^* \in \operatorname{int} D$. В [20] доказано, что в двумерном случае эта точка является одним из решений задачи (1.3), то есть $x^* \in C_{\psi}$. Мы покажем, что эта точка будет также одним из решений задачи (1.1) и в целом справедлива

Теорема 5.1. *Пусть размерность пространства* $p = 2$. *Если* $D \subset \mathbb{R}^2$ *является выпуклым телом, то*

$$C_\varphi = C_\psi \bigcap C_\varkappa. \tag{5.1}$$

Доказательство. Случай, когда D является шаром, является, очевидно, тривиальным. Поэтому в дальнейшем можно считать

$$R(x) > \rho(x), \quad Q^R(x) \bigcap Q^\rho(x) = \emptyset \quad \forall x \in D. \tag{5.2}$$

(а) Функция $\varphi(x) = R(x) - \rho(x)$, как разность выпуклой и вогнутой функции, является выпуклой на D. Ее субдифференциал в точках $x \in \operatorname{int} D$, как это следует из лемм 2.1, 2.4 и теоремы Моро-Рокафеллара имеет вид

$$\underline{\partial \varphi}(x) = \underline{\partial R}(x) - \overline{\partial \rho}(x), \tag{5.3}$$

где $\underline{\partial R}(x)$ и $\overline{\partial \rho}(x)$ определяются формулами (2.1) и (2.3) соответственно.

Как отмечено выше, множество C_φ состоит из единственной точки: $C_\varphi = \{x^*\}$, причем $x^* \in \operatorname{int} D$. Эта точка, являясь минимумом выпуклой функции, обязана удовлетворять условию $0_2 \in \underline{\partial \varphi}(x^*)$. А значит, в силу (5.3), выполняется соотношение

$$\underline{\partial R}(x^*) \bigcap \overline{\partial \rho}(x^*) \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

Учитывая формулы (2.1) и (2.3), а также (5.2), из (5.4) вытекает существование точек y_1^R, y_2^R из $Q^R(x^*)$ и точек z_1^ρ, z_2^ρ из $Q^\rho(x^*)$ таких, что имеет место пересечение отрезков

$$\left[\frac{x^* - y_1^R}{\left\|x^* - y_1^R\right\|}, \frac{x^* - y_2^R}{\left\|x^* - y_2^R\right\|}\right] \bigcap \left[\frac{x^* - z_1^\rho}{\left\|x^* - z_1^\rho\right\|}, \frac{x^* - z_2^\rho}{\left\|x^* - z_2^\rho\right\|}\right] \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

(б) Докажем, что

$$x^* \in C_\varkappa. \tag{5.6}$$

В силу теоремы 3.1, для этого достаточно показать

$$\left[y_1^R, y_2^R\right] \bigcap \left[z_1^\rho, z_2^\rho\right] \neq \emptyset. \tag{5.7}$$

Без потери общности можно считать, что $x^* = 0_2$. Тогда соотношение (5.5) эквивалентно

$$\left[y_1^R, y_2^R\right] \bigcap \left[x_1^\rho, x_2^\rho\right] \neq \emptyset, \tag{5.8}$$

где $x_i^\rho = \dfrac{R(x^*)}{\rho(x^*)} z_i^\rho$, $i = 1, 2$, причем $\left\|x_1^\rho\right\| = \left\|x_2^\rho\right\| = R(x^*)$.

Из (5.8) следует, что точки x_1^ρ и x_2^ρ располагаются по разные стороны от прямой π_1, проходящей через точки y_1^R и y_2^R. Если $0_2 \in \left[y_1^R, y_2^R\right]$, то, очевидно, вместе с (5.8) будет выполняться и (5.7). Поэтому остается рассмотреть случай, когда

$$y^* = \frac{y_1^R + y_2^R}{2} \neq 0_2$$

и, таким образом, прямую π_1 можно записать в виде

$$\pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle y^*, x - y^* \rangle = 0\}.$$

Факт расположения точек x_1^ρ и x_2^ρ по разные стороны от прямой π_1 можно выразить так

$$\left\langle y^*, x_1^\rho - y^* \right\rangle > 0, \tag{5.9}$$

$$\left\langle y^*, x_2^\rho - y^* \right\rangle < 0. \tag{5.10}$$

Из (5.10), с учетом $R(x^*) > \rho(x^*)$, следует

$$\left\langle y^*, z_2^\rho - y^* \right\rangle < 0,$$

то есть точка z_2^ρ располагается по ту же сторону от прямой π_1, что и точка x_2^ρ. Поэтому, чтобы доказать (5.7), осталось показать, что точка z_1^ρ удовлетворяет неравенству $\left\langle y^*, z_1^\rho - y^* \right\rangle \geq 0$.

Предположим противное

$$\left\langle y^*, z_1^\rho - y^* \right\rangle < 0. \tag{5.11}$$

Из (5.9) и (5.11) следует, что отрезки $\left[y_1^R, y_2^R\right]$ и $\left[z_1^\rho, x_1^\rho\right]$ пересекаются в некоторой точке z^*, являющейся внутренней для каждого из этих отрезков. То есть существуют $\alpha_0 \in (0,1)$ и $\beta_0 \in (0,1)$ такие, что

$$z^* = \alpha_0 y_1^R + (1-\alpha_0) y_2^R, \tag{5.12}$$

$$z^* = \beta_0 z_1^\rho + (1-\beta_0) x_1^\rho = \left(\beta_0 + (1-\beta_0)\frac{R(x^*)}{\rho(x^*)}\right) z_1^\rho. \tag{5.13}$$

Построим опорную прямую к кругу $B(x^*, \rho(x^*))$ в точке z_1^ρ

$$\pi_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left\langle z_1^\rho, x - z_1^\rho \right\rangle = 0\right\}.$$

Так как $z_1^\rho \in Q^\rho(x^*)$, то прямая π_2 одновременно является опорной и к выпуклому телу D, причем

$$\left\langle z_1^\rho, x - z_1^\rho \right\rangle \le 0 \quad \forall x \in D. \tag{5.14}$$

Прямая

$$\pi_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \left\langle z^*, x - z^* \right\rangle = 0\}$$

с учетом (5.13) является параллельной к π_2 и поскольку $R(x^*) > \rho(x^*)$ не касается тела D, то есть

$$\left\langle z^*, x - z^* \right\rangle < 0 \quad \forall x \in D. \tag{5.15}$$

С другой стороны, из (5.12) вытекает

$$\left\langle z^*, y_1^R - z^* \right\rangle = (1-\alpha_0)\left\langle z^*, y_1^R - y_2^R \right\rangle,$$
$$\left\langle z^*, y_2^R - z^* \right\rangle = -\alpha_0 \left\langle z^*, y_1^R - y_2^R \right\rangle.$$

Это противоречит (5.15), так как $y_i^R \in D$, $i = 1, 2$. Таким образом, соотношение (5.7), а вместе с тем и (5.6), доказано.

в) Ранее в [20] было доказано, что

$$C_\varphi = \{x^*\} \subset C_\psi.$$

Поэтому с учетом (5.6) мы имеем

$$C_\varphi \subset C_\varkappa \bigcap C_\psi,$$

и нам осталось доказать, что множество $C_\varkappa \bigcap C_\psi$ состоит из единственной точки.

В самом деле, предположим $y^* \in C_\varkappa \bigcap C_\psi$. По теореме 3.1 имеем

$$\mathrm{y}^* \in C \Leftrightarrow \mathrm{co}\, Q^R(y^*) \bigcap \mathrm{co}\, Q^\rho(y^*) \ne \emptyset.$$

Используя формулы (2.1) и (2.3), нетрудно показать, что это условие оптимальности эквивалентно выполнению соотношения

$$R(y^*)\underline{\partial R}(y^*) \bigcap \rho(y^*)\overline{\partial \rho}(y^*) \ne \emptyset. \tag{5.16}$$

С другой стороны, в [20] доказано

$$y^* \in C_\psi \Leftrightarrow \rho(y^*)\underline{\partial R}(\mathrm{y}^*) \bigcap R(y^*)\overline{\partial \rho}(y^*) \ne \emptyset. \tag{5.17}$$

Теперь нетрудно показать, что из (5.16), (5.17) следует выполнение соотношения

$$\underline{\partial R}(y^*) \bigcap \overline{\partial \rho}(y^*) \ne \emptyset, \tag{5.18}$$

которое (см. [11]) является критерием решения задачи (1.2), то есть, $y^* \in C_\varphi$, а значит, $y^* = x^*$.

Пример 5.1. Для иллюстрации теоремы 5.1 возьмем в качестве выпуклого тела $D \subset \mathbb{R}^2$ разносторонний треугольник. Пусть x_R — центр окружности, на которой лежат вершины треугольника; x_ρ — центр вписанного круга; x^* — точка пересечения биссектрисы наименьшего угла и серединного перпендикуляра наибольшей стороны треугольника D. Очевидно, все точки (и только они) отрезка $[x_R, x^*]$ удовлетворяют соотношению (3.1) и, следовательно, $C_\varkappa = [x_R, x^*]$. Нетрудно также убедиться, что для точек отрезка $[x^*, x_\rho]$ (и только для них) выполняется критерий (5.17) решения задачи (1.3), то есть $C_\psi = [x^*, x_\rho]$. Точка x^* при этом удовлетворяет критерию (5.18) решения задачи (1.2).

Замечание 5.1. Покажем на примере, что уже в трехмерном случае решения задач (1.1), (1.2) и (1.3) могут не пересекаться.

Пример 5.2. Для построения выпуклого тела $D \subset \mathbb{R}^3$ возьмем точки

$$y_1^R = (4,4,0), \quad y_2^R = (4,-4,0),$$
$$z_1^\rho = (2,0,2), \quad z_2^\rho = (2,0,-2).$$

Обозначим через π_i, $i = 1,2$, полупространства

$$\pi_i = \left\{x \in R^3 : \left\langle x, z_i^\rho \right\rangle \le \left\| z_i^\rho \right\|^2 \right\}.$$

В качестве выпуклого тела берем

$$D = \pi_1 \bigcap \pi_2 \bigcap \mathrm{co}\left\{y_1^R, y_2^R, B(0_3, 4)\right\}.$$

1. Из построения вытекает, что для точки $x^* = (0,0,0)$

$$Q^R(x^*) = \left\{y_1^R, y_2^R\right\}, \quad Q^\rho(x^*) = \left\{z_1^\rho, z_2^\rho\right\}.$$

В соответствии с формулами (2.1)—(2.3) получаем

$$\underline{\partial R}(x^*) = \mathrm{co}\left\{\frac{x^* - y_1^R}{\left\|x^* - y_1^R\right\|}, \frac{x^* - y_2^R}{\left\|x^* - y_2^R\right\|}\right\} = \mathrm{co}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\},$$

$$\overline{\partial \rho}(x^*) = \mathrm{co}\left\{\frac{x^* - z_1^\rho}{\left\|x^* - z_1^\rho\right\|}, \frac{x^* - z_2^\rho}{\left\|x^* - z_2^\rho\right\|}\right\} = \mathrm{co}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Таким образом, $\underline{\partial R}(x^*) \bigcap \overline{\partial \rho}(x^*) = \{(-1/\sqrt{2}, 0, 0)\} \ne \emptyset$. То есть, удовлетворяется критерий (5.18) решения задачи (1.2) и точка $x^* = (0,0,0)$ является (см. [11]) единственным решением задачи (1.2): $C_\varphi = \{x^*\}$. Легко убедиться, что критерии (3.1) и (5.17) решения задач (1.1) и (1.3) в точке x^* не выполняются, то есть $x^* \notin C_\varkappa \bigcup C_\psi$.

2. Рассмотрим точку $x_\varkappa = (1,0,0)$. Для этой точки

$$Q^R(x_\varkappa) = \left\{y_1^R, y_2^R, y_3^R\right\}, \quad Q^\rho(x_\varkappa) = \left\{z_3^\rho, z_4^\rho\right\},$$

где $y_3^R = (-4,0,0)$, $z_3^\rho = (2.5, 0, 2.5)$, $z_4^\rho = (2.5, 0, -2.5)$.

Нетрудно проверить, что для точки $x_\varkappa$ выполняется соотношение (3.2), а следовательно, по теореме 3.1, имеем $C_\varkappa = \{x_\varkappa\}$ и, в то же время, соотношение (5.17) для этой точки не выполняется, поэтому $x_\varkappa \notin C_\psi$.

Замечание 5.2. Задача

$$R^p(x) - \rho^p(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p} \tag{5.19}$$

в случае $p = 2$ совпадает с задачей (1.1), а в общем случае имеет простой геометрический смысл. А именно, ее решение требует построения шаровой оболочки наименьшего объема, которая содержит границу компакта D. В [31] доказано, что целевая функция этой задачи является субдифференцируемой в смысле определения В.Ф. Демьянова—А.М. Рубинова (см. [24]), получена формула ее субдифференциала и необходимое условие решения этой задачи. Однако уже в трехмерном случае, то есть при $p = 3$, примеры показывают, что целевая функция может быть невыпуклой, даже в случае выпуклости компакта D. Это обстоятельство значительно осложняет исследование задачи (5.19).

Замечание 5.3. Выпуклость целевой функции задачи (1.1) и полученная формула ее субдифференциала позволяют использовать арсенал методов выпуклого программирования (см. [27]) для получения ее приближенного численного решения, в частности, методы субградиентного типа. Специфика субдифференциала (2.5) может отразиться и на разработке оригинальных методов.

Замечание 5.4. В заключение отметим следующее: если компакт D является выпуклым, то задачи (1.1) и (5.19) становятся представителями того класса задач по шаровым оценкам выпуклых компактов (см. [14]), решения которых могут быть выражены решением задачи о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа этого выпуклого компакта шаром фиксированного радиуса при некоторых значениях этого радиуса (см. [14], [32]).

Авторы выражают признательность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
2. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.
3. *Тот Л.Ф.* Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.
4. *D'Ocagne M.* Sur certaine figures minimales // Bull. Soc. Math. France, 1884. V. 12. P. 168–177.
5. *Lebesque H.* Sur quelques question de minimum, relatives and courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations // J. Math. Pures and Appl. 1921. V. 4. P. 67–96.
6. *Bonnesen T.* Uber das isoperimetrische Defizit ebener Figuren // Maht. Ann. 1924. Bd. 91. P. 252–268.
7. *Vincze St.* Über den Minimalkzeisring einer Eiline // Acta. Sci. Math. Acta. Univ. Szeged. 1947. Bd. 11. № 3. P. 133–138.
8. *Vincze I.* Über Kreisringe, die eine Eiline einschlissen // Studia Sci. Math. Hungarica. 1974. Bd. 9. № 1/2. P. 155–159.
9. *Kriticos N.* Über konvexe Flachen und eineschlissende Kugeln // Math. Ann. 1927. Bd. 96. P. 583–586.
10. *Barany I.* On the minimal ring containing the boundary of convex body // Acta. Sci. Math. Acta. Univ. Szeged. 1988. V. 52. № 1/2. P. 93–100.
11. *Дудов С.И.* Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 1. № 2. С. 64–75.
12. *Никольский М.С., Силин Д.Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 338–354.
13. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 13–38.
14. *Дудов С.И.* Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 9. С. 99–118.
15. *Макеев В.В.* Сколь круглая тень существует у выпуклого тела // Зап. науч. сем. ПОМИ, 2005. Т. 329. С. 67–78.
16. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 5. С. 763–778.
17. *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2010.
18. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* Характеризация устойчивости решения задачи об асферичности выпуклого тела // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 2. С. 20–28.
19. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* О методе приближенного решения задачи об асферичности выпуклого тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 10. С. 1668–1678.
20. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Математика. 2015. № 2. С. 45–58.
21. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
22. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
23. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
24. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
25. *Borwein J.M., Fitzpatrick S.P.* Existense of nearest points in Banach spases // Canad. J. Math. 1989. V. 61. P. 702–720.
26. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 530–542.
27. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации М: МЦНМО, 2011.
28. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
29. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of set and funtions // Math. Ops. Res. 1983. V. 8. № 2. P. 231–259.
30. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М.: Физматлит, 2006.
31. *Осипцев М.А., Дудов С.И.* О наименьшем по объему шаровом слое, содержащем границу выпуклого тела // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 59–61.
32. *Dudov S., Osiptsev M.* Uniform Estimation of a Convex Body by a Fixed-Radius Ball // J. of Optimization Theory and Applications. 2016. V. 171. № 2. P. 465–480.