ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 63–70

УДК 519.624.2

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕЙ[1)]

© 2019 г. С. В. Гаврилов

(119991 Москва, Ленинские горы, МГУ ВМК, Россия)

e-mail: gvrlserg@gmail.com

Поступила в редакцию 27.03.2018 г.

В настоящей работе рассматривается обратная задача для уравнения Лапласа в двусвязной двумерной области. По данным Дирихле и Неймана на известной внешней границе области требуется определить неизвестную внутреннюю границу, на которой функция принимает постоянное значение. В работе доказана единственность решения поставленной обратной задачи. Предложен итерационный численный метод определения неизвестной границы. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Библ. 16. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, неизвестная граница, численный метод.

DOI: 10.1134/S0044466919010095

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть Ω – ограниченная односвязная двумерная область, а кривая Γ_0 является ее границей. Пусть Ω_1 – односвязная область, ограниченная кривой Γ_1 такая, что $\overline{\Omega_1} \in \Omega$ и область $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\Omega_1}$ является двусвязной. Кривые Γ_0 и Γ_1 гладкие: $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^2$.

Пусть функция $u(M)$ такова, что: $u \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega_0})$,

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega_0, \tag{1}$$

$$u(M) = a, \quad M \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$u(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{3}$$

здесь a – постоянная величина, а $f(M)$ – функция, непрерывная на Γ_0.

В настоящей работе исследуется обратная задача для краевой задачи (1)–(3), состоящая в определении внутренней границы Γ_1 по данным Неймана для функции $u(M)$ на внешней границе Γ_0. Такую математическую задачу можно рассматривать как частный случай задачи электроимпедансной томографии для среды с кусочно-постоянной проводимостью [1]–[4], которая принимает два значения: в области Ω_0 проводимость конечна и постоянна, а в области Ω_1 значение проводимости постоянно и столь велико, что область Ω_1 можно считать идеальным проводником. Известно, что потенциал стационарного электрического поля в идеально проводящей среде принимает постоянное значение (см. [5]). Этому физическому принципу соответствует условие (2) в краевой задаче (1)–(3). Будем полагать, что значение проводимости в области Ω_0 равно 1.

В работе [6] доказана единственность определения неизвестной границы Γ_1 в обратной задаче для краевой задачи (1)–(3) с дополнительным условием Неймана на границе Γ_0 при известном значении постоянной $a = 0$ в уравнении (2), предложен численный метод решения этой обрат-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке бюджета факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, гос. рег. АААА-А16-116021510092-2.

ной задачи, основанный на использовании конформных отображений. В настоящей работе значение a предполагается неизвестным, для этого случая доказывается теорема о единственности решения обратной задачи определения границы Γ_1, излагается итерационный численный метод определения неизвестной границы. В ряде работ (см. [7]–[9] и цитированную в них литературу) рассматривается задача обнаружения трещин или дефектов в области с постоянной проводимостью по совокупности нескольких пар данных Дирихле и Неймана на части ее внешней границы. Исследуемые в этих работах математические задачи близки к задаче, рассматриваемой в настоящей работе, однако имеют принципиальные отличия.

2. СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим некоторые свойства краевой задачи (1)–(3). Если границы Γ_0 и Γ_1, а также значения функции $u(M)$ на этих границах заданы, то задача (1)–(3) представляет собой задачу Дирихле для уравнения Лапласа, которая имеет единственное решение при любых значениях $f(M)$ и a [10]. В случае, если значение a неизвестно, для обеспечения единственности решения краевой задачи необходимо дополнительное условие. Покажем, что таким условием может быть обращение в ноль интеграла от нормальной производной функции $u(M)$ по внешней границе

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dl_P = 0. \tag{4}$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть функция $u(M)$ является решением задачи Дирихле* (1)–(3) *с функцией $f(M) \equiv 0$ и значением $a \neq 0$, тогда*

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dl_P \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ (без ограничения общности). Гармоническая функция $u(M)$ принимает максимальное и минимальное значения на границах области Ω_0 и для всех $M \in \overline{\Omega_0}$ выполнено $0 \le u(M) \le a$. Тогда

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_M} = \lim_{P \to M} \frac{u(P) - u(M)}{\rho_{MP}} = \lim_{P \to M} \frac{u(P)}{\rho_{MP}} \ge 0, \quad M \in \Gamma_0;$$

здесь n_M – внутренняя нормаль к Γ_0 в точке M, точка $P \in \Omega_0$ находится на этой нормали, а ρ_{MP} – расстояние между точками M и P. Из этого следует, что

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dl_P \ge 0.$$

Предположим, что этот интеграл равен нулю, тогда $\partial u(M)/\partial n_M = 0$ для всех $M \in \Gamma_0$. Из одновременного равенства нулю условий Дирихле и Неймана на внешней границе по теореме Хольмгрена (см. [11], [12]) следует, что $u(M) \equiv 0$, $M \in \overline{\Omega_0}$. Приходим к противоречию с условием (2), значит,

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dl_P > 0.$$

Для случая $a < 0$ доказательство аналогично.

Теорема 1. *Краевая задача* (1)–(3) *с неизвестным значением a и дополнительным условием* (4) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть существует два решения краевой задачи: $u'(M)$ и $u''(M)$. Рассмотрим разность этих функций $v = u' - u''$. Эта функция является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega_0, \quad v(M) = 0, \quad M \in \Gamma_0, \quad v(M) = u'(M) - u''(M), \quad M \in \Gamma_1,$$

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} dl_P = 0.$$

Если $v(M) \neq 0$, $M \in \Gamma_1$, то получаем противоречие с леммой 1, значит значения функций $u'(M)$ и $u''(M)$ на границе Γ_1 совпадают и $u'(M) \equiv u''(M)$, $M \in \overline{\Omega_0}$ в силу едиственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Заметим, что условие (4) является естественным для задачи электроимпедансной томографии: равенство нулю интеграла от нормальной производной электрического потенциала по границе Γ_0 с учетом постоянной проводимости в области Ω_0 соответствует закону сохранения электрического заряда для стационарной замкнутой системы [3], [5].

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую обратную задачу для краевой задачи (1)–(3). Пусть кривая Γ_0 и непостоянная функция $f(M)$ на Γ_0 заданы, а кривая Γ_1 неизвестна. Требуется определить Γ_1, если для решения $u(M)$ краевой задачи (1)–(3) задано условие Неймана:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_M} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad \int\limits_{g(P)dl_P} = 0, \tag{5}$$

где $g(M)$ – известная функция, непрерывная на Γ_0. Для случая, когда функция $u(M)$ обращается на Γ_1 в ноль ($a = 0$), единственность определения неизвестной внутренней границы по данным Дирихле и Неймана на Γ_0 доказана в [6]. В настоящей работе формулируется теорема о единственности решения поставленной обратной задачи при неизвестном значении a. Ее доказательство основано на применении теоремы Хольмгрена и леммы 1.

Теорема 2. *Обратная задача* (1)–(3), (5), *состоящая в определении неизвестной границы* Γ_1 *при неизвестном значении* a, *имеет не более одного решения*.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть Γ_1' и Γ_1'' – две кривые, ограничивающие несовпадающие односвязные области Ω_1 и Ω_1 соответственно. Пусть функции $u'(M)$ и $u''(M)$ – решения соответствующих краевых задач (1)–(3), (5). Возможны 3 случая взаимного расположения областей Ω_1' и Ω_1''.

Случай 1: $\overline{\Omega_1'}$ и $\overline{\Omega_1''}$ не имеют общих точек. Рассмотрим область $G = \Omega \backslash (\overline{\Omega_1'} \cup \overline{\Omega_1''})$. Область G является непустой и связной, а ее граница содержит кривые Γ_0, Γ_1' и Γ_1''. С учетом (3) и (5) по теореме Хольмгрена функции $u'(M)$ и $u''(M)$ совпадают на множестве $\overline{G}$. Тогда для функции $u'(M)$ выполнено условие $u'(M) \equiv \mathrm{const}$, $M \in \Gamma_1''$, следовательно, в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа $u'(M) \equiv \mathrm{const}$, $M \in \overline{\Omega_1''}$. Так как $\overline{\Omega_1''} \backslash \overline{\Omega_1'}$, то гармоническая в области $\Omega \backslash \Omega_1$ функция $u'(M)$ является константой, что противоречит условию (3).

Случай 2: $\overline{\Omega_1'}$ и $\overline{\Omega_1''}$ пересекаются, но не вложены друг в друга, т.е. не выполнено $\overline{\Omega_1'} \subset \Omega_1''$ или $\overline{\Omega_1''} \subset \Omega_1'$. По теореме Хольмгрена функции $u'(M)$ и $u''(M)$ совпадают на связном подмножестве $W \in \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1' \cup \Omega_1'')$, содержащем кривую Γ_0. Так как $\overline{\Omega_1'}$ и $\overline{\Omega_1''}$ не вложены друг в друга, то подмножество W содержит хотя бы одну общую точку кривых Γ_1' и Γ_1''. Из этого следует, что значения функций $u'(M)$ и $u''(M)$ на этих кривых совпадают. Будем считать, что множество $\Omega_1' \backslash \overline{\Omega_1''}$ не пусто (в противном случае рассмотрим множество $\Omega_1'' \backslash \overline{\Omega_1'}$). Из этого множества можно выделить непустую односвязную область G', граница которой состоит из точек, принадлежащих кривым Γ_1' или Γ_1''. Внутри области G' функция $u''(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границе принимает постоянное значение, следовательно, является константой всюду в $\overline{G'}$. По аналогии с предыдущим случаем получаем противоречие с условием (3).

Случай 3. Имееет место вложение, пусть $\overline{\Omega_1''} \subset \Omega_1'$. По теореме Хольмгрена функции $u'(M)$ и $u''(M)$ совпадают на множестве $\overline{\Omega} \backslash \Omega_1'$. Пусть $u''(M) \equiv a$, $M \in \Gamma_1'$ и $u''(M) \equiv b$, $M \in \Gamma_1''$. Из условия (5) и равенства нулю интеграла от нормальной производной гармонической функции по границе области, в которой она определена, следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u''(P)}{\partial n_P} dl_P = 0.$$

Это условие выполняется и для гармонической в области $\Omega_1'\backslash\overline{\Omega_1''}$ функции $v = u'' - a$. Заметим, что функция v удовлетворяет условиям леммы 1, следовательно, равенство нулю интеграла от нормальной производной этой функции по кривой Γ_1 может выполняться только при $a = b$. Последнее означает, что функция $u''(M)$ является константой. Получаем противоречие с условием (3).

Таким образом, исключены все возможные случаи взаимного расположения различных областей Ω_1' и Ω_1'', следовательно, эти области совпадают, и по теореме Хольмгрена также совпадают $u'(M)$ и $u''(M)$.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для численного решения обратной задачи (1)–(3), (5) предлагается метод, основанный на принципах, использованных в работах [13]–[15] для построения численных методов решения задач электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости. Метод основан на представлении функций $u(M)$ в виде суммы потенциалов простого слоя, построении нелинейного операторного уравнения относительно функции, задающей неизвестную границу Γ_1, и решении полученного уравнения итерационным методом.

Воспользуемся условием гладкости на функцию $u(M) \in C^1(\overline{\Omega_0})$ и продифференцируем уравнение (2) по направлению касательной l_M к кривой Γ_1. Получим следующее уравнение, эквивалетное уравнению (2) в случае, если значение a неизвестно:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l_M} = 0, \quad M \in \Gamma_1. \tag{6}$$

Представим функцию $u(M)$ в виде суммы потенциалов простого слоя:

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\frac{1}{\rho_{MP}} dl_P + \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\frac{1}{\rho_{MP}} dl_P, \quad M \in \Omega_0. \tag{7}$$

Используя введенное представление для функции $u(M)$, уравнения (3), (4), (6), а также свойства потенциала простого слоя, получаем следующую систему интегральных уравнений для плотностей потенциалов $\mu(M)$, $\nu(M)$:

$$\int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\frac{1}{\rho_{MP}} dl_P + \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\frac{1}{\rho_{MP}} dl_P = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial l_M}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln \frac{\partial}{\partial l_M}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = 0, \quad M \in \Gamma_1, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} dl_M \left[\pi\mu(M) + \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_M}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_M}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P\right] = 0, \tag{10}$$

где n_M – внешняя нормаль к кривой Γ_0 в точке M.

Для параметризации кривых Γ_0 и Γ_1 в полярной системе координат сделаем дополнительное предположение относительно класса неизвестных кривых Γ_1. Пусть известна точка M_0, являющаяся общим центром звездности для всех кривых из этого класса, и кривые Γ_1 задаются в полярной системе координат с центром в точке M_0 функциями $r(\psi) : r(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$, причем $\|r\|_{C^2[0,2\pi]} \le c_0$, где c_0 – фиксированное число. Будем считать, что внешняя граница Γ_0 задается в той же полярной системе координат функцией $R(\psi) : R(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$.

Запишем уравнения (8)–(10) в полярной системе координат. Пусть на кривой Γ_0 точки $M(x_M, y_M)$ и $P(x_P, y_P)$ имеют следующие представления в полярной системе координат: $x_M = R(\psi)\cos\psi$, $y_M = R(\psi)\sin\psi$, $x_P = R(\varphi)\cos\varphi$, $y_P = R(\varphi)\sin\varphi$. Аналогично на кривой Γ_1 точки $M(x_M, y_M)$ и $P(x_P, y_P)$ имеют следующие представления: $x_M = r(\psi)\cos\psi$, $y_M = r(\psi)\sin\psi$, $x_P = r(\zeta)\cos\zeta$, $y_P = r(\zeta)\sin\zeta$. Обозначим $f(\psi) = f(R(\psi)\cos\psi, R(\psi)\sin\psi)$, $\mu(\psi) = \mu(R(\psi)\cos\psi, R(\psi)\sin\psi)$, $\nu(\psi) = \nu(r(\psi)\cos\psi, r(\psi)\sin\psi)$.

Уравнение (8) в полярных координатах принимает вид

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi,\psi)\mu(\varphi)d\varphi + \int_0^{2\pi} M(\zeta,\psi;r)\nu(\zeta)d\zeta = f(\psi), \quad 0 \le \psi \le 2\pi, \tag{11}$$

где функции $N(\varphi,\psi)$ и $M(\zeta,\psi;r)$ определяются в виде

$$N(\varphi,\psi) = -0.5\ln(R^2(\psi) + R^2(\varphi) - 2R(\psi)R(\varphi)\cos(\psi-\varphi))\sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)},$$
$$M(\zeta,\psi;r) = -0.5\ln(R^2(\psi) + r^2(\zeta) - 2R(\psi)r(\zeta)\cos(\psi-\zeta))\sqrt{r^2(\zeta) + r'^2(\zeta)}.$$

В обозначении $M(\zeta,\psi;r)$ подчеркивается зависимость этой функции от функции $r(\psi)$. Аналогичное обозначение будет далее использоваться для всех функций, зависящих от $r(\psi)$.

Переходя к полярным координатам в уравнении (9), получаем

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi,\psi;r)\mu(\varphi)d\varphi + \int_0^{2\pi} Q(\zeta,\psi;r)\nu(\zeta)d\zeta = 0, \quad 0 \le \psi \le 2\pi, \tag{12}$$

где

$$P(\varphi,\psi;r) = \frac{R(\varphi)r'(\psi)\cos(\psi-\varphi) - R(\varphi)r(\psi)\sin(\psi-\varphi) - r'(\psi)r(\psi)}{r^2(\psi) + R^2(\varphi) - 2r(\psi)R(\varphi)\cos(\psi-\varphi)} \frac{\sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)}}{\sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi)}},$$

а функция $Q(\zeta,\psi;r)$ задается в виде

$$Q(\zeta,\psi;r) = \frac{r(\zeta)r'(\psi)\cos(\psi-\zeta) - r(\zeta)r(\psi)\sin(\psi-\zeta) - r'(\psi)r(\psi)}{r^2(\psi) + r^2(\zeta) - 2r(\psi)r(\zeta)\cos(\psi-\zeta)} \frac{\sqrt{r^2(\zeta) + r'^2(\zeta)}}{\sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi)}}.$$

Уравнение (9) после перехода к полярным координатам принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\left(\pi\mu(\psi) + \int_0^{2\pi} S(\varphi,\psi)\mu(\varphi)d\varphi + \int_0^{2\pi} T(\zeta,\psi;r)\nu(\zeta)d\zeta\right)\sqrt{R^2(\psi) + R'^2(\psi)}d\psi = 0. \tag{13}$$

Здесь функции $S(\varphi,\psi)$ и $T(\zeta,\psi;r)$ определяются уравнением

$$S(\varphi,\psi) = \frac{R(\varphi)R'(\psi)\sin(\psi-\varphi) + R(\varphi)R(\psi)\cos(\psi-\varphi) - R^2(\psi)}{R^2(\psi) + R^2(\varphi) - 2R(\psi)R(\varphi)\cos(\psi-\varphi)} \frac{\sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)}}{\sqrt{R^2(\psi) + R'^2(\psi)}},$$
$$T(\zeta,\psi;r) = \frac{r(\zeta)R'(\psi)\sin(\psi-\zeta) + r(\zeta)R(\psi)\cos(\psi-\zeta) - R^2(\psi)}{R^2(\psi) + r^2(\zeta) - 2R(\psi)r(\zeta)\cos(\psi-\zeta)} \frac{\sqrt{r^2(\zeta) + r'^2(\zeta)}}{\sqrt{R^2(\psi) + R'^2(\psi)}}.$$

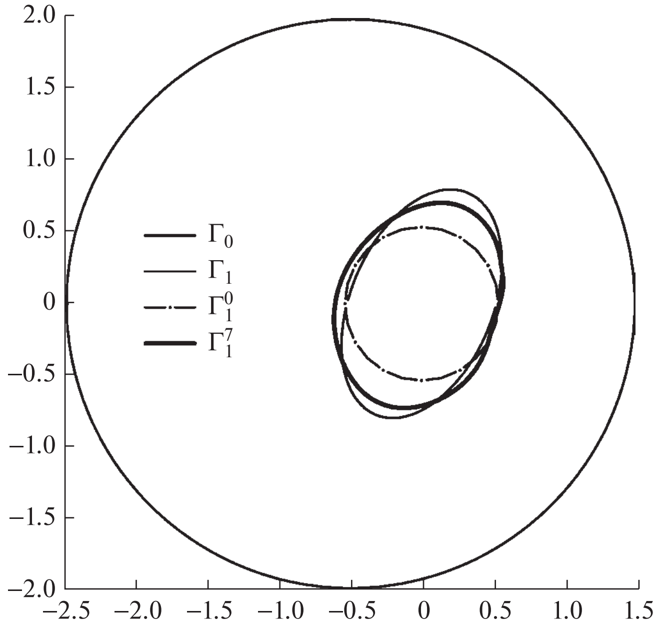
Используя представление (7) и введенную полярную систему координат, получаем из условия (5) для нормальной производной функции $u(M)$ на границе Γ_0 следующее уравнение:

$$\pi\mu(\psi;r) + \int_0^{2\pi} S(\varphi,\psi)\mu(\varphi;r)d\varphi + \int_0^{2\pi} T(\zeta,\psi;r)\nu(\zeta;r)d\zeta = g(\psi), \quad 0 \le \psi \le 2\pi, \tag{14}$$

где $g(\psi) = g(R(\psi)\cos\psi, R(\psi)\sin\psi)$. Полученное уравнение будем трактовать как операторное уравнение

$$A[f]r = g \tag{15}$$

относительно неизвестной функции $r(\psi)$, задающей границу Γ_1. Для вычисления функции $(A[f]r)(\psi)$, являющейся результатом действия оператора $A[f]$ на функцию $r(\psi)$, необходимо при



Фиг. 1. Результаты первого вычислительного эксперимента. Внешняя граница Γ_0 – тонкая сплошная линия; точная внутренняя граница Γ_1 – тонкая сплошная линия; начальное приближение Γ_1^0 – штрихпунктирная линия; кривая Γ_1^7, полученная на 7-й итерации, – толстая сплошная линия.

заданных $f(\psi)$ и $r(\psi)$ решить систему интегральных уравнений (11)–(13) и определить плотности потенциалов $\mu(\psi;r)$, $\nu(\psi;r)$, а затем вычислить значение интегрального оператора, стоящего в левой части уравнения (14).

Для решения построенного операторного уравнения (15) используем итерационный метод. В качестве начального приближения неизвестной кривой $r_0(\psi)$ выберем окружность. Радиус окружности выбирается так, чтобы на нем достигался минимум функционала невязки в уравнении (15). Эта задача сводится к минимизации функции одной переменной и решается стандартными методами (см. [16]). Пусть $r_n(\psi)$ – функция, полученная на n-м шаге итерационного процесса. Для нахождения функции $r_{n+1}(\psi)$ уравнение (15) линеаризуется в окрестности функции $r_n(\psi)$ и получается линейное операторное уравнение для функции $\rho_n(\psi)$, представляющей собой поправку к функции $r_n(\psi)$

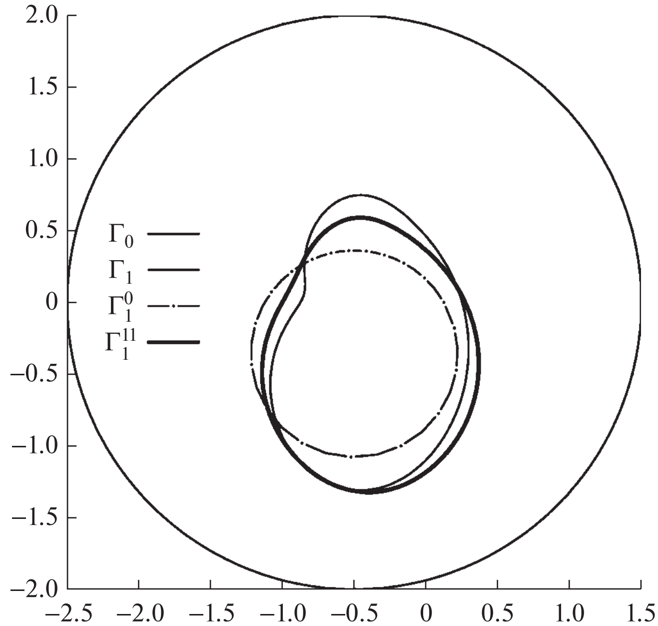
$$\hat{A}[f,g,r_n]\rho_n = \hat{g}[f,g,r_n]. \tag{16}$$

В результате решения этого уравнения определяется функция $\rho_n(\psi)$, позволяющая найти $r_{n+1}(\psi)$:

$$r_{n+1}(\psi) = r_n(\psi) + \rho_n(\psi), \quad n = 0,1,2,\dots . \tag{17}$$

Численная реализация предложенного метода проводится следующим образом. На отрезке $[0,2\pi]$ вводятся две сетки, одна используется для функций, определенных на границе Γ_0, другая – для функций на границе Γ_1. В уравнениях (11)–(14), (16) все функции заменяются на сеточные аналоги, а интегралы на квадратурные формулы. В результате задача решения уравнения (16) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для неизвестной сеточной функции $\rho_n(\psi_i)$. Для решения полученной СЛАУ применяется метод регуляризации Тихонова. Величина параметра регуляризации согласовывается с точностью задания исходной информации и с шагом итерационного процесса n.

Приведем результаты вычислительных экспериментов по применению предложенного численного метода решения обратной задачи (1)–(3), (5). В первом вычислительном эксперименте в качестве границы Γ_0 была выбрана окружность радиуса 2, неизвестная граница Γ_1 представляла собой эллипс с большой полуосью 0.75, смещенный относительно центра внешней окружности



Фиг. 2. Результаты второго вычислительного эксперимента. Внешняя граница Γ_0 – тонкая сплошная линия; точная внутренняя граница Γ_1 – тонкая сплошная линия; начальное приближение Γ_1^0 – штрихпунктирная линия; кривая Γ_1^{11}, полученная на 11-й итерации, – толстая сплошная линия.

(см. фиг. 1). Значение функции $u(M)$ на Γ_0 задавалось в полярной системе координат с центром, совпадающим с центром окружности Γ_0 следующей формулой:

$$f(\psi) = 10(\exp[-4\sin^2(\psi/2)] - \exp[-4\cos^2(\psi/2)]).$$

Схема вычислительного эксперимента была такова. С заданными Γ_0, Γ_1 и $f(\psi)$ решалась краевая задача (1)–(4) и находилась функция $g(\psi)$, представляющая собой значение нормальной производной $u(M)$ на Γ_0. В эту функцию вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(\psi)$ такая, что $\|g(\psi) - g_\delta(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} / \|g(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} = 0.03$. Далее с функцией $g_\delta(\psi)$, взятой в качестве исходных данных, итерационным методом решалась обратная задача (1)–(3), (5). В качестве начального приближения неизвестной границы Γ_1 была определена окружность Γ_1^0 (см. фиг. 1). Расчеты проводились при выборе равномерных сеток на кривых Γ_0 и Γ_1, содержащих 200 и 100 узлов соответственно. На фиг. 1 представлен результат решения обратной задачи Γ_1^7, полученный на 7-й итерации. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

Во втором вычислительном эксперименте граница Γ_0, значение функции $u(M)$ на этой границе и параметры сеток были выбраны такие же, как в первом вычислительном эксперименте. Граница Γ_1 задавалась кубическим сплайном (см. фиг. 2). Уровень погрешности, вносимый в функцию $g_\delta(\psi)$: $\|g(\psi) - g_\delta(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} / \|g(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} = 0.03$. На фиг. 2 изображен результат решения обратной задачи Γ_1^{11}, полученный на 11-й итерации с начальным приближением Γ_1^0. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borcea L.* Electrical impedance tomography // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 99–136.
2. *Bruhl M., Hanke M.* Recent progress in electrical impedance tomography // Inverse Problems. 2003. V. 19. P. 65–90.
3. *Holder D.* Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications. Institute of Physics Publishing, 2004.

4. *Kang H., Seo J.K., Sheen D.* Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 113–23.
5. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1948.
6. *Kress R.* Inverse Dirichlet problem and conformal mapping // Math. and Comput. in Simulat. 2004. V. 66. P. 255–265.
7. *Friedman A., Vogelius M.* Determining Cracks by Boundary Measurements // Indiana University Math. Journal. 1989. V. 38. № 2. P. 497–525.
8. *Alessandrini G., Valenzuela A.D.* Unique determination of multiple cracks by two measurements // SIAM J. Control Optim. 1996. V. 34. № 3. P. 913–921.
9. *Bruhl M., Hanke M., Pidcock M.* Crack detection using electrostatic measurements // ESAIM: Math. Modelling and Numerical Analys. 2001. V. 35. № 3. P. 595–605.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
12. *Hedenmalm H.* On the uniqueness theorem of Holmgren // Math. Z. 2015. V. 281. P. 357–378.
13. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1476–1489.
14. *Gavrilov S.V., Denisov A.M.* A numerical method for solving a three-dimentional electrical impedance tomography problem in the case of the data given on part of the boundary // Math. Models and Comput. Simulat. 2016. V. 8. № 4. P. 369–381.
15. *Gavrilov S.V., Denisov A.M.* Numerical solution method for the electrical impedance tomography problem in the case of piecewise constant conductivity and several unknown boundaries // Differential Equat. 2016. V. 52. № 7. P. 877–886.
16. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.