ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 128–134

УДК 519.635

ГЛАДКОСТЬ ПО ВЯЗКОСТИ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА НАВЬЕ–СТОКСА

© 2019 г. В. И. Качалов

(111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ "МЭИ", Россия)

e-mail: vikachalov@rambler.ru

Поступила в редакцию 23.03.2018 г.

В работе рассматривается эволюционное уравнение типа Навье–Стокса. Благодаря наличию в нем билинейного операторного члена, удается ввести малый параметр и вести по нему разложение решения. Основной целью работы является нахождение условий обычной (не асимптотической) сходимости получающихся при этом рядов. Библ. 9.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, уравнение Бюргерса, преобразование Хопфа–Коула, псевдоаналитическое решение, метод регуляризации С.А. Ломова, уравнение теплопроводности.

DOI: 10.1134/S0044466919010101

1. ВВЕДЕНИЕ

В 2003 г. вышла статья О.А. Ладыженской [1], посвященная уравнениям Навье–Стокса. Ч. Фефферман из Принстонского университета [2] сформулировал шестую проблему тысячелетия в терминах гладкости решения задачи Коши для этих уравнений по пространственным переменным. О.А. Ладыженская, как это следует из списка ее научных трудов, занималась этой проблемой почти полвека, и один из главных вопросов относительно этих уравнений ставила следующим образом: дают ли уравнения Навье–Стокса вместе с начальным и краевым условиями детерминистическое описание динамики несжимаемой жидкости или не дают? В статье [1] представлены результаты, относящиеся к существованию, единственности и регулярности решений этих уравнений.

Целью настоящей работы является доказательство обычной (не асимптотической) сходимости рядов по степеням вязкости, представляющих решения операторных уравнений типа Навье–Стокса – так можно назвать уравнения Навье–Стокса, записанные как эволюционные в банаховом пространстве [3]. Такой подход к изучаемой проблеме характерен для метода регуляризации С.А. Ломова (см. [4]), разработанного для решения сингулярно возмущенных задач. Одним из основных методов решения таких задач, как известно, является метод погранфункций Васильевой–Бутузова–Нефёдова (см. [5], [6]), позволяющий строить решения в виде асимптотически сходящихся рядов. В рамках метода регуляризации был создан аппарат построения так называемых псевдоаналитических (псевдоголоморфных) решений сингулярно возмущенных уравнений (см. [4]), т.е. решений, представимых рядами по степеням малого параметра, сходящимися в обычном смысле (см. [7]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В банаховом пространстве E будем изучать нелинейную начальную задачу

$$u_t - Au = B(u,u), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

где A – линейный неограниченный замкнутый оператор с областью определения D, всюду плотной в E; $B(u,v)$ – билинейный оператор, ограниченный по первой переменной и замкнутый по второй переменной, с областью определения $D \times D$ (см. [3]).

Пусть $u_0 = \nu\Phi(\nu)$, причем вектор $\Phi(\nu)$ аналитичен в точке $\nu = 0$. Сделаем замену $u = \nu w$, тогда получим задачу Коши

$$\begin{gathered} w_t - Aw = \nu B(w,w), \\ w(0) = \Phi(\nu), \end{gathered} \tag{2}$$

решение которой будем искать в виде ряда по степеням малого параметра, коэффициенты которого также зависят от ν, причем не всегда регулярным образом:

$$w(t,\nu) = w_0(t,\nu) + \nu w_1(t,\nu) + \ldots + \nu^n w_n(t,\nu) + \ldots. \tag{3}$$

Такие решения в теории сингулярных возмущений, в случае сходимости ряда (3) в некоторой окрестности значения $\nu = 0$, называются псевдоголоморфными (псевдоаналитическими), а само понятие псевдоаналитичности было введено С.А. Ломовым при построении общей теории сингулярных возмущений на основе метода регуляризации (см. [4], [7]).

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим серию начальных задач

$$\begin{gathered} w_{0,t} - Aw_0 = 0, \quad w_0(0,\nu) = \Phi(\nu), \\ w_{1,t} - Aw_1 = B(w_0,w_0), \quad w_1(0,\nu) = 0, \\ w_{2,t} - Aw_2 = B(w_0,w_1) + B(w_1,w_0), \quad w_2(0,\nu) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{n,t} - Aw_n = B(w_0,w_{n-1}) + \ldots + B(w_{n-1},w_0), \quad w_n(0,\nu) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Условие 1. Предположим, что A – инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t)$. В этих условиях все задачи серии (4) корректно разрешимы, при этом

$$\begin{gathered} w_0(t,\nu) = U(t)\Phi(\nu), \\ w_1(t,\nu) = \int_0^t U(t-\tau)B(w_0(\tau,\nu),w_0(\tau,\nu))d\tau, \\ w_2(t,\nu) = \int_0^t U(t-\tau)\left[B(w_0(\tau,\nu),w_1(\tau,\nu)) + B(w_1(\tau,\nu),w_0(\tau,\nu))\right]d\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n(t,\nu) = \int_0^t U(t-\tau)[\sum_{k=0}^{n-1} B(w_k(\tau,\nu),w_{n-k-1}(\tau,\nu))]d\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Далее, пусть D_0 – такое линейное многообразие, содержащееся в D, что выполнено следующее

Условие 2. 1. На D_0 можно ввести счетную монотонную систему норм $\|\cdot\|_k$ так, что $\forall v \in D$, $\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le \ldots$, и из сходимости по каждой из них вытекает сходимость по норме $\|\cdot\|$ пространства E.

2. Имеет место следующее представление:

$$D_0 = \bigcup_{C>0} Y^C,$$

где Y^C – множество векторов экспоненциального типа $\le C$, т.е. $\forall v \in Y^C$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|v\|_k \le e^{kC}$. Ясно, что $Y^{C_1} \subset Y^{C_2}$, когда $C_1 < C_2$.

3. Если $u \in Y^{C_1}$, $v \in Y^{C_2}$, то $\|B(u,v)\|_k \le C_2 e^{k(C_1+C_2)}$.

4. Оператор $U(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$ ограничен в счетно-нормированном пространстве D_0, т.е. $\exists q > 0 : \forall v \in D_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|U(t)v\|_k \le q \le \|v\|_k$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда если* $\Phi(\nu) \in D_0$ *при* $0 \le \nu \le \nu_0$, *то задача Коши* (2) *имеет псевдоголоморфное в точке* $\nu = 0$ *решение*.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $q = 1$. Заметим также, что неравенство в условии 3, в терминах экспонент, можно переписать в виде

$$\|B(u,v)\|_k \le e^{C_1 k} \frac{d}{dx}\left(e^{C_2 x}\right)\Big|_{x=k}.$$

Учитывая все это, приходим к выводу, что нормы $\|w_n\|_k$ в равенствах (5) следующим образом мажорируются функциями $P_n(k,t)$:

$$P_0(k,t) = e^{Cx}\Big|_{x=k},$$

$$P_1(k,t) = tC\, e^{2Cx}\Big|_{x=k},$$

$$P_2(k,t) = \int_0^t \left(P_0 P_{1,x} + P_1 P_{0,x}\right) d\tau\Big|_{x=k} = \frac{3}{2} C^2 t^2 e^{3Cx}\Big|_{x=k},$$

$$P_3(k,t) = \int_0^t \left(P_0 P_{2,x} + P_1 P_{1,x} + P_2 P_{0,x}\right) d\tau\Big|_{x=k} = \frac{8}{3} C^3 t^3 e^{4Cx}\Big|_{x=k},$$

$$P_4(k,t) = \int_0^t \left(P_0 P_{3,x} + P_1 P_{2,x} + P_2 P_{1,x} + P_3 P_{0,x}\right) d\tau\Big|_{x=k} \frac{125}{24} C^4 t^4 e^{5Cx}\Big|_{x=k},$$

$$P_5(k,t) = \int_0^t \left(P_0 P_{4,x} + P_1 P_{3,x} + P_2 P_{2,x} + P_3 P_{1,x} + P_4 P_{0,x}\right) d\tau\Big|_{x=k} = \frac{1236}{120} C^5 t^5 e^{6Cx}\Big|_{x=k},$$

....

Методом математической индукции можно доказать, что

$$P_n(k,t) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} C^n t^n e^{(n+1)Ck}, \tag{6}$$

откуда и следует сходимость ряда (3) в некоторой окрестности значения $\nu = 0$. Для этого докажем, что

$$1\frac{(n+1)^n}{n!} + 1\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!}\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{4^2}{3!}\frac{(n-2)^{n-3}}{(n-3)!} + \frac{5^3}{4!}\frac{(n-3)^{n-4}}{(n-4)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}1 = \frac{(n+2)^n}{n!}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (n+1-k)^{n-k}(k+1)^{k-1} = (n+2)^n.$$

Левая часть этого равенства в точности представляет собой формулу Лейбница

$$\left[f(w)g(w)\right]_{w=0}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{n-k}(0) g^{(k)}(0),$$

где

$$f(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^m}{m!} w^m, \quad g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^{m-1}}{m!} w^m$$

суть аналитические в некоторой окрестности точки $w = 0$ функции.

Введем в рассмотрение функцию

$$h(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^m}{(m+1)!} w^{m+1},$$

которая (см. [8]) является обратной к целой функции $w = ze^{-z}$, а значит, удовлетворяет равенству $h(w) = we^{h(w)}$ в некоторой окрестности точки $w = 0$. Далее заметим, что $f(w) = h'(w)$ и $g(w) = e^{h(w)}$, так как $wg(w) = h(w)$. Итак, имеем

$$[f(w)g(w)]_{w=0}^{(n)} = \left[h'(w)e^{h(w)}\right]_{w=0}^{(n)} = \left[\left(e^{h(w)}\right)'\right]_{w=0}^{(n)} = \left[e^{h(w)}\right]_{w=0}^{(n+1)} = g^{(n+1)}(0) = (n+2)^n,$$

и, тем самым, утверждение доказано.

Теорема 1 доказана.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Для построения примера нам понадобится утверждение, касающееся гладкости по малому коэффициенту диффузии решения задачи Коши в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{gathered} u_t = \nu \Delta u + f(t,x), \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и лапласиан $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$. Из формулы Пуассона, дающей решение этой задачи, непосредственно не следует его аналитичность по ν. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Пусть функции $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ допускают аналитические продолжения на $\mathbb{C}^n$, которые являются целыми функциями порядка $0 < \rho \le 2$, т.е. $|f(t,z)| < M_0 e^{|z|^\rho}$, $|\varphi(z)| < M_1 e^{|z|^\rho}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$ и некоторых положительных констант M_0 и M_1, причем M_1 зависит от t. Тогда для любого $T > 0$ в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ существует единственное аналитическое в точке $\nu = 0$ решение задачи* (7).

Доказательство. Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда по степеням ν:

$$u(t,x,\nu) = u_0(t,x) + \nu u_1(t,x) + \ldots + \nu^m u_m(t,x) + \ldots. \tag{8}$$

Коэффициенты этого ряда определим, подставив его в уравнение (7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ν. Тогда

$$\begin{gathered} u_{0,t} = f(t,x), \quad u_0(0,x) = \varphi(x), \\ u_{m,t} = \Delta u_{m-1}, \quad u_m(0,x) = 0, \quad m = 1,2,\ldots. \end{gathered}$$

Отсюда

$$u_0(t,x) = \int_0^t f(t_1,x)dt_1 + \varphi(x),$$

$$u_m(t,x) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_m} \Delta^m f\,(t_{m+1},x)\,dt_{m+1} + \frac{t^m}{m!}\Delta^m \varphi(x), \quad m = 1,2,\ldots.$$

Поскольку $\Delta^m f$ на конечном отрезке t и $\Delta^m \varphi$ оцениваются одинаковым образом, то оценим $\Delta^m g$ для $g(x)$ такой, что $|g(z)| < Me^{|z|^\rho}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$; $M > 0$ – некоторая константа.

Имеем

$$\left|\Delta^m g(z)\right|_{z=x} = \left|\left(\partial_{z_1}^2 + \ldots + \partial_{z_n}^2\right)^m g(z)\right|_{z=x} = \left|\sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha \left(\partial_{z_1}^{2\alpha_1} \ldots \partial_{z_n}^{2\alpha_n}\right) g(z)\right|_{z=x} =$$

$$= \left\{|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,\ C_m^\alpha - \text{биноминальные коэффициенты}\right\} =$$

$$= \left|\sum_{|\alpha|=m} \frac{C_m^\varepsilon}{(2\pi)^m (2\alpha_1)!} \oint_{|z_1 - x_1| = r_1} \frac{dz_1}{(z_1 - x_1)^{2\alpha_1 + 1}} \oint_{z_2 - x_2 = r_2} \frac{dz_2}{(z_2 - x_2)^{2\alpha_2 + 1}} \times\right.$$

$$\times \ldots \oint\limits_{|z_n - x_n| = r_n} \frac{g(z)dz_n}{(z_n - x_n)^{2\alpha_n + 1}} \Bigg| \le \Big\{\text{воспользуемся тем, что } |g(z)| < Me^{|z|^\rho} <$$

$$< Me^{2|z-x|^\rho + 2|x|^\rho}\Big\} \le Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2(r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{\rho/2}}}{r_1^{2\alpha_1}\ldots r_n^{2\alpha_n}} \le$$

$$\le Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2n\left(r_1^2 + \ldots + r_n^2\right)}}{r_1^{2\alpha_1}\ldots r_n^{2\alpha_n}} \left\{\text{пусть } r_i = \left(\frac{\alpha_i}{n\rho}\right)^{1/\rho}, \quad i = \overline{1, n}\right\} =$$

$$= Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2n\frac{\alpha_1}{n\rho}}\ldots e^{2n\frac{\alpha_n}{n\rho}}}{\left(\frac{\alpha_1}{n\rho}\right)^{2\alpha_1/\rho}\ldots\left(\frac{\alpha_n}{n\rho}\right)^{2\alpha_1/\rho}} \le$$

$$\le Me^{2|x|^\rho} (n\rho e)^{2m/\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha \frac{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!}{\alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}} \le$$

$$\le \left\{\text{очевидно, что } \frac{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!}{\alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}} \le 2^m \alpha_1!\ldots\alpha_n! \le 2^m \alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n} \le 2^m m^m\right\} \le$$

$$\le M(n\rho e)^{2m/\rho} 2^m m^m e^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha = M(n\rho e)^{2m/\rho}(2n)^m m^m e^{2|x|^\rho},$$

$$\text{так как } \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha = n^m.$$

Значит, в полосе $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|u_m(t,x)| \le 2Me^{2|x|^\rho}(n\rho e)^{2m\rho}(2nT)^m \frac{m^m}{m!}, \tag{9}$$

если в качестве M взять $\max\{M_0, M_1\}$. В соответствии с признаком Даламбера ряд (8) сходится в указанной полосе в некоторой окрестности значения $\nu = 0$. Заметим, что сумма ряда $u(t,x,\nu)$ принадлежит тихоновскому классу корректности задачи Коши для параболических уравнений (см. [9]).

Замечание 1. Ряды указанного вида используются в математической физике уже давно (см. [9]). Однако в большинстве случаев их обычная сходимость только предполагается.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ задачу Коши

$$\begin{gathered} U_t - \nu(U_{xx} + U_{yy}) = -UU_x - VU_y, \\ V_t - \nu(V_{xx} + V_{yy}) = -UV_x - VV_y, \\ U(0,x,y) = \nu\varphi(x,y,\nu), \quad V(0,x,y) = \nu\psi(x,y,\nu), \end{gathered} \tag{10}$$

или в векторной форме

$$W_t + (W,\nabla)W = \nu\Delta W, \quad W\big|_{t=0} = F,$$

где $W = \{U,V\}^{\text{т}}$, $F = \{\nu\varphi, \nu\psi\}^{\text{т}}$, $\nabla = \bar{i}\,\partial_x + \bar{j}\,\partial_y$, $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Сделаем замену $W = \nu w$, причем пусть $w = \{u,v\}^{\text{т}}$, $f = \{\varphi,\psi\}$. Тогда имеем

$$w_t + (w,\nabla)w = \nu\Delta w, \quad w\big|_{t=0} = f$$

или

$$\begin{gathered} u_t - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = -\nu(uu_x + vu_y), \\ v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = -\nu(uv_x + vv_y), \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y,\nu), \quad v(0,x,y) = \psi(x,y,\nu). \end{gathered} \tag{11}$$

Решение этой системы будет в виде регулярных рядов по степеням вязкости:

$$u = u_0 + \nu u_1 + \ldots, \quad v = v_0 + v v_1 + \ldots . \tag{12}$$

Предположим, что φ и ψ аналитичны в точке $\nu = 0$ и являются функциями экспоненциального типа, т.е.

$$\exists C > 0\colon |\varphi(z_1, z_2, \nu)| \le e^{C(|z_1|+|z_2|)}, \quad |\psi(z_1, z_2, \nu)| \le e^{C(|z_1|+|z_2|)} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Члены u_0 и v_0 найдем без использования формулы Пуассона. Для этого к уравнениям

$$\begin{aligned} u_{0,t} &= \Delta u_0, \quad u_0(0, x, y) = \varphi(x, y, \nu), \\ v_{0,t} &= \Delta v_0, \quad v_0(0, x, y) = \psi(x, y, \nu) \end{aligned}$$

применим результат теоремы 2: функции $u_0(t, x, y, \nu)$ и $v_0(t, x, y, \nu)$ будут аналитическими в точке $\nu = 0$ в каждой полосе $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ и принадлежать тому же экспоненциальному типу, что и начальные данные.

Далее предположим, что $E = C(\mathbb{R}^2)$ с нормой $\|g\| = \sup\limits_{x, y \in \mathbb{R}^n} |g(x, y)|$. Определим систему норм следующим образом:

$$\|g\|_k = \max_{-k \le x, y \le k} |g(x, y)|,$$

и, наконец, введем в рассмотрение билинейный оператор $B(w_1, w_2) = (w_1, \nabla) w_2$.

Для определения u_1 и v_1 имеем систему

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu \Delta u_1 - u_0 u_{0,x} - v_0 u_{0,y}, \quad u_1|_{t=0} = 0, \\ v_1 &= \nu \Delta v_1 - u_0 v_{0,x} - v_0 v_{0,y}, \quad v_1|_{t=0} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

которую решим с помощью формулы Пуассона, произведя замену переменной (в скобках аргументы):

$$u_1(t, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} [-u_0 u_{0,x} - v_0 u_{0,y}]\left(\tau, x + 2\nu\sqrt{t-\tau}\xi, y + 2\nu\sqrt{t-\tau}\eta\right) e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi d\eta,$$

$$v_1(t, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} [-u_0 v_{0,x} - v_0 v_{0,y}]\left(\tau, x + 2\nu\sqrt{t-\tau}\xi, y + 2\nu\sqrt{t-\tau}\eta\right) e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi d\eta$$

и так далее.

Замечание 2. В отличие от большинства разложений решений сингулярно возмущенных уравнений в нашем случае главный член разложения зависит от малого параметра регулярным образом.

Замечание 3. В одномерном случае теорему 2 можно применить сразу после специальной подстановки. А именно, рассмотрим задачу Коши для уравнения Бюргерса

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= \nu u_{xx}, \\ u(0, x) &= \nu \varphi(x, \nu) \end{aligned} \tag{14}$$

в предположении аналитичности функции $\varphi(x, \nu)$ в точке $\nu = 0$ равномерно на компакте $X \subset \mathbb{R}$. Дополнительно потребуем, чтобы функция $\psi(x, \nu) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x \varphi(\xi) d\xi\right\}$ имела целое продолжение порядка $0 < \rho \le 2$ при каждом ν из некоторой окрестности значения $\nu = 0$. С помощью преобразования Хопфа–Коула $u = -2\nu w_x / w$ сведем задачу (14) к начальной задаче для уравнения теплопроводности

$$w_t = \nu w_{xx}, \quad w(0, x) = \psi(x, \nu). \tag{15}$$

Решение этой задачи Коши имеет следующий вид:

$$w(t, x, \nu) = \psi(x, \nu) + \nu t \psi''(x, v) + \ldots + \nu^n \frac{t^n}{n!} \psi^{(2n)}(x, \nu) + \ldots . \tag{16}$$

Как следует из доказательства теоремы 2, ряд (16) (и его производная по x) сходится равномерно на $[0,T]\times X$ в некоторой окрестности значения $\nu = 0$ при некотором $T > 0$, поэтому уравнение Бюргерса (14) имеет аналитическое по ν решение

$$u(t,x,\nu) = -2\nu \frac{\psi'(x,\nu) + \nu t\psi'''(x,\nu) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n+1)}(x,\nu) + \ldots}{\psi(x,\nu) + \nu t\psi''(x,\nu) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n)}(x,\nu) + \ldots}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дальнейшем изложенный в работе подход будет распространяться на другие задачи нелинейной математической физики. Это, на наш взгляд, является весьма важным не только для приложений, но и для развития качественной теории уравнений в частных производных. Дело в том, что теория регулярных возмущений изначально была аналитической и этот ее аспект был представлен теоремами Пуанкаре о разложении. Что же касается теории сингулярных возмущений, то здесь потребуются принципиально новые подходы, основанные на идеях алгебры и функционального анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнение Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи матем. наук. 2003. Т. 58. № 2(350). С. 45–78.
2. *Fefferman Ch.* Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation // http:claymath.arg/Millenium-Prise-Problems/Navier-Stokes-Equations. Cambridge, MA: Clay Mathematical Institute, 2000. P. 1–5.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. II. М.: Мир, 1984.
4. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
6. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32.
7. *Качалов В.И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 64–71.
8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексной переменной. М.: Наука, 1989.
9. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.