УДК 517.575

О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ[1)]

© 2019 г. В. В. Карачик

(454080 Челябинск, пр-т Ленина, 76, ЮУр Гос. ун-т, Россия)

e-mail: karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 25.05.2018 г.
Переработанный вариант 23.07.2018 г.

Определяется элементарное решение бигармонического уравнения. С помощью свойств многочленов Гегенбауэра получено разложение этого элементарного решения и некоторой связанной с ним функции в ряд по полной системе ортогональных на единичной сфере однородных гармонических многочленов. Затем строится функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре в случае размерности пространства больше двух $n > 2$. При $n > 4$ получено разложение функции Грина по полной системе ортогональных на единичной сфере однородных гармонических многочленов. С помощью этого разложения вычислен интеграл по единичному шару с ядром из функции Грина от однородного гармонического многочлена, умноженного на положительную степень нормы независимой переменной. Найдена функция Грина в случае $n = 2$. Библ. 25.

Ключевые слова: функция Грина, бигармоническое уравнение, задача Дирихле.

DOI: 10.1134/S0044466919010113

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно (см., например, [1]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре при $n \geq 2$ имеет вид

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \tag{1}$$

где

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n > 2, \\ -\ln|x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{2}$$

есть элементарное решение уравнения Лапласса (см. [1]). Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [2], [3]. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ в явном виде построена в [4], а функция Грина для задачи Робена в круге в [5]–[7]. Отметим также работы [8], [9], которые посвящены построению функции Грина для задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре и работы [10], [11], где найден оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальных данных. В работах [12], [13] найдена функция Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона. В работах [14], [15] дано представление функции Грина для классических внешней и внутренней задач Неймана для уравнения Пуассона в единичном шаре.

Работа устроена следующим образом. Сначала, в леммах 1 и 2 из разд. 2 дается представление функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в виде рядов по полной системе ортогональных на единичной сфере гармонических многочленов $\left\{H_m^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_m, m \in \mathbb{N}_0\right\}$. За-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

тем, в теореме 1 из разд. 3, с помощью представления производящей функции для многочленов Гегенбауэра $C_k^{\lambda}[t]$ порядка $\lambda = n/2 - 2$ в виде (8), связи многочленов Гегенбауэра порядка $n/2 - 2$ и порядка $n/2 - 1$ из леммы 5 и разложения (11), получено представление элементарного решения бигармонического уравнения $E_4(x, \xi)$ в виде (10). После этого в теореме 2 из разд. 4, на основании лемм 6–8 построена функция Грина $G_4(x, \xi)$ задачи Дирихле (3), (4) в виде (19). В теореме 3 получено разложение функции Грина $G_4(x, \xi)$ по системе $\left\{H_m^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_m, m \in \mathbb{N}_0\right\}$. В теореме 4 вычислен интеграл по единичному шару S с ядром из функции Грина $G_4(x, \xi)$ от функции вида $f(x) = |x|^{2l} H_m(x)$, где $H_m(x)$ – однородный степени $m \in \mathbb{N}_0$ гармонический многочлен и $l \in \mathbb{R}_+$. Наконец, в теореме 5 построена функция Грина при $n = 2$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\right\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(\bar{S})$. Рассмотрим в S однородную задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial S} = 0, \tag{4}$$

где ν – единичная внешняя нормаль к сфере ∂S.

Пусть $\left\{H_k^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\right\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ ортогональных сферических гармоник (см., например, [16]), нормированных так, что

$$\int_{\partial S} \left(H_k^{(i)}(\xi)\right)^2 ds_\xi = \omega_n,$$

где

$$h_k = \frac{2k + n - 2}{n - 2}\binom{k + n - 3}{n - 3}, \quad n > 2; \quad h_k = 2, \quad n = 2,$$

есть размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k (см. [17]), а ω_n – площадь единичной сферы ∂S.

Лемма 1. *Справедливо следующее представление элементарного решения* (2) *уравнения Лапласа*:

$$E(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k + n - 2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \quad n > 2,$$
$$E(x, \xi) = -\ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{-2k}}{2k} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \quad n = 2,$$

для $|\xi| < |x|$. *Здесь ряды* 1) *сходятся равномерно по* ξ *при* $|\xi| < a < |x|$ *и фиксированном* x; 2) *сходятся равномерно по* x *при* $|\xi| < a < |x|$ *и фиксированном* ξ. *Если* $|x| < |\xi|$, *то в полученном представлении справа переменные* x *и* ξ *надо поменять местами*.

Доказательство. В [18, Лемма 3] доказано первое представление леммы и утверждения о равномерной сходимости рядов, которое в силу схожести рядов распространяется и на второе представление леммы. Докажем его. Преобразуем выражение

$$F(x, \xi) = -\ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{-2k}}{2k} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi)$$

при $n = 2$ и $|\xi| < |x|$. В этом случае $h_k = 2$. Полагая $(x_1, x_2) = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $(\xi_1, \xi_2) = r(\cos\psi, \sin\psi)$ будем иметь $H_k^{(1)}(x) = \sqrt{2}\rho^k \cos k\varphi$, $H_k^{(2)}(x) = \sqrt{2}\rho^k \sin k\varphi$ и соответственно $H_k^{(1)}(\xi) = \sqrt{2} r^k \cos k\psi$,

$H_k^{(2)}(\xi) = \sqrt{2}r^k \sin k\psi$, поскольку эти многочлены образуют базис и нормированны должным образом

$$\int_{\partial S} \left(H_k^{(1)}(x)\right)^2 ds_x = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi = 2\pi = \omega_2.$$

Поэтому при $r < \rho$ будем иметь

$$F(x,\xi) = -\ln\rho + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{-2k}}{k} \rho^k r^k (\cos k\varphi \cos k\psi + \sin k\varphi \sin k\psi) = -\ln\rho + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k \cos k(\varphi - \psi).$$

Известно следующее разложение в ряд Фурье:

$$\ln\left(1 - 2q\cos\varphi + q^2\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos n\varphi,$$

верное при $|q| < 1$. Из него находим

$$F(x,\xi) = -\ln\rho - \frac{1}{2}\ln\left(1 - 2\frac{r}{\rho}\cos(\varphi - \psi) + \frac{r^2}{\rho^2}\right) =$$

$$= -\ln\rho - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\rho^2}\left(\rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi) + r^2\right) = -\ln\rho + \ln\rho -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi) + r^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\rho^2\cos^2\varphi - 2r\rho\cos\varphi\cos\psi + \right.$$

$$\left. + r^2\cos^2\psi + \rho^2\sin^2\varphi - 2r\rho\sin\varphi\sin\psi + r^2\sin^2\psi\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left((\rho\cos\varphi - r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi - r\sin\psi)^2\right) =$$

$$= -\ln\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} = -\ln|x - \xi| = E(x,\xi).$$

Если повторить вывод этой формулы в случае $|x| < |\xi|$ (в этом случае $q = \rho/r < 1$), то получим симметричность $E(x,\xi)$.

Лемма 2. *Для $x,\xi \in S$ и $|\xi| < |x|$ справедливо следующее представление функции Грина $G(x,\xi)$ задачи Дирихле*:

$$G(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)} - 1}{2k + n - 2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \quad n > 2,$$

$$G(x,\xi) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k)} - 1}{k} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \quad n = 2.$$

При $|\xi| > |x|$ в полученном представлении справа переменные x и ξ надо поменять местами.

Доказательство. Поскольку $|x/|x|| = 1$, а $||x|\xi| = |x||\xi| < 1$, то по лемме 1 имеем

$$E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + n - 2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \tag{5}$$

а значит, из формулы (1) при $n > 2$ и $|\xi| < |x|$ находим

$$G(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)} - 1}{2k + n - 2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi).$$

Аналогично выводится и вторая формула леммы.

Исследуем теперь бигармоническое уравнение. Рассмотрим следующую функцию, определенную при $n \geq 2$:

$$E_4(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n > 4, \quad n = 3, \\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n = 4, \\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1), & n = 2, \end{cases} \tag{6}$$

которую по аналогии с функцией $E(x,\xi)$ назовем элементарным решением бигармонического уравнения.

Лемма 3. *Функция $E_4(x,\xi)$, определенная при $\xi \neq x$, удовлетворяет равенству*

$$\Delta_\xi E_4(x,\xi) = -E(x,\xi),$$

и, значит, является бигармонической при $\xi \neq x$.

Доказательство. Пусть $n > 4$ или $n = 3$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}|x-\xi|^{4-n} = \left(2-\frac{n}{2}\right)2(\xi_i - x_i)|x-\xi|^{2-n} = (4-n)(\xi_i - x_i)|x-\xi|^{2-n}$$

и, значит,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}|x-\xi|^{4-n} = (4-n)\left((x-\xi)^{2-n} + (2-n)(\xi_i - x_i)^2|x-\xi|^{-n}\right).$$

Поэтому

$$\Delta_\xi|x-\xi|^{4-n} = (4-n)\sum_{i=1}^n\left(|x-\xi|^{2-n} + (2-n)(\xi_i - x_i)^2|x-\xi|^{-n}\right) =$$

$$= (4-n)\left(n|x-\xi|^{2-n} + (2-n)|x-\xi|^{-n}\sum_{i=1}^n\left(\xi_i - x_i^2\right)\right) = 2(4-n)|x-\xi|^{2-n}.$$

Отсюда следует доказываемое равенство

$$\Delta_\xi E_4(x,\xi) = -\frac{1}{(n-2)}|x-\xi|^{2-n} = -E(x,\xi).$$

При $n = 4$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\ln|x-\xi| = \frac{(\xi_i - x_i)}{(x-\xi)^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\ln|x-\xi| = \frac{|x-\xi|^2 - 2(\xi_i - x_i)^2}{|x-\xi|^4}$$

и, значит,

$$\Delta_\xi\left(-\frac{1}{4}\ln|x-\xi|\right) = -\frac{1}{4}\frac{2|x-\xi|^2}{|x-\xi|^4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{|x-\xi|^2} = -E(x,\xi).$$

При $n = 2$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}|x-\xi|^2\ln|x-\xi| = 2(\xi_i - x_i)\ln|x-\xi| + |x-\xi|^2\frac{\xi_i - x_i}{|x-\xi|^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}|x-\xi|^2\ln|x-\xi| = 2\ln|x-\xi| + 4\frac{(\xi_i - x_i)^2}{|x-\xi|^2} + |x-\xi|^2\frac{|x-\xi|^2 - 2(\xi_i - x_i)^2}{|x-\xi|^4}$$

и, значит,

$$\Delta_\xi\left(|x-\xi|^2\ln|x-\xi|\right) = 4\ln|x-\xi| + 4.$$

Поэтому

$$\Delta_\xi\left(\frac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1)\right)=\ln|x-\xi|+1-1=-E(x,\xi).$$

Лемма доказана.

Обозначим через $C_k^\lambda[t]$ многочлен Гегенбауэра степени k. Он может быть представлен в виде [17, с. 177]

$$C_k^\lambda[t]=\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(\lambda)_{k-m}}{m!(k-2m)!}(2t)^{k-2m}, \tag{7}$$

где $(\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$, причем $(\lambda)_0=1$. Нетрудно подсчитать, что $C_0^\lambda[t]=1$ и

$$C_1^\lambda[t]=\sum_{m=0}^{0}\frac{(-1)^0(\lambda)_1}{0!1!}(2t)^1=2\lambda t.$$

В дальнейшем изложении будем считать, что $C_k^\lambda[t]=0$ при $k<0$. Для $|\xi|=1$, $|x|<1$ и $m>2$ верно следующее представление (см. [19]):

$$|x-\xi|^{2-m}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{m/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k,$$

где (x,ξ) обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Если здесь положить $m=n-2$ и считать, что $n>4$, то получим

$$|x-\xi|^{4-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k. \tag{8}$$

Лемма 4. *Следующая функция*:

$$C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k$$

при $n>4$ *и* $|\xi|=1$ *является бигармоническим многочленом степени* $k\in\mathbb{N}_0$ *по* x.

Доказательство. Используя представление (7) многочлена Гегенбауэра, можно записать

$$C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k=\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n/2-2)_{k-m}}{m!(k-2m)!}|x|^{2m}(2(x,\xi))^{k-2m}=\sum_{m=0}^{k/2}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m},$$

где $(n,2)_k=n(n+2)\ldots(n+2k-2)$ – обобщенный символ Похгаммера [19]. Отсюда видно, что это многочлен степени k по x. Используя равенства

$$\Delta(x,\xi)^m=m(m-1)|\xi|^2(x,\xi)^{m-2},\quad \Delta|x|^{2l}=2l(2l+n-2)|x|^{2l-2},$$

нетрудно убедиться, что

$$\Delta|x|^{2l}(x,\xi)^m=m(m-1)|\xi|^2|x|^{2l}(x,\xi)^{m-2}+2l(2l+n-2+2m)|x|^{2l-2}(x,\xi)^m.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\Delta|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m}&=(k-2m)(k-2m-1)|\xi|^2|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2}+\\&+2m(2k-2m+n-2)|x|^{2m-2}(x,\xi)^{k-2m}\end{aligned}$$

и, значит, верна следующая цепочка равенств:

$$\Delta C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \Delta\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m-2)!}|\xi|^2|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2} +$$
$$+\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m+1}}{(2m-2)!!(k-2m)!}|x|^{2m-2}(x,\xi)^{k-2m} + 2\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m-2)!!(k-2m)!}|x|^{2m-2}(x,\xi)^{k-2m} =$$
$$= \left(|\xi|^2-1\right)\sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m-2)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2} - 2\sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m-1}}{(2m)!!(k-2m-2)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2} =$$
$$= -2(n-4)\sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m-2}}{(2m)!!(k-2m-2)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2} = -2(n-4)C_{k-2}^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^{k-2}.$$

Аналогично нетрудно получить

$$\Delta C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \Delta\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m} =$$
$$= (|\xi|^2-1)\sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m-2)!}|x|^{2m}(x,\xi)^{k-2m-2} = 0.$$

Поэтому многочлен $C_k^{n/2-2}[(x/|x|,\xi)]|x|^k$ бигармонический при $|\xi|=1$.

Лемма 5. *При $n>4$ и $k\in\mathbb{N}_0$ справедливо равенство*

$$C_k^{n/2-2}[t] = \frac{n-4}{2k+n-4}\left(C_k^{n/2-1}[t] - C_{k-2}^{n/2-1}[t]\right). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть сначала $k\ge 2$. Справедливы равенства

$$C_k^{n/2-1}[t] - C_{k-2}^{n/2-1}[t] = \sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m)!}t^{k-2m} -$$
$$-\sum_{m=0}^{[k/2-1]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m-2}}{(2m)!!(k-2m-2)!}t^{k-2m-2} = \sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m}}{(2m)!!(k-2m)!}t^{k-2m} +$$
$$+\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-2,2)_{k-m-1}}{(2m-2)!!(k-2m)!}t^{k-2m} = \frac{2k+n-4}{n-4}\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m-2)!!(k-2m)!}t^{k-2m} + \frac{(n-2,2)_k}{k!}t^k.$$

Последний член можно преобразовать к виду

$$\frac{(n-2,2)_k}{k!}t^k = \frac{2k+n-4}{n-4}\frac{(n-4,2)_k}{k!}t^k$$

и, значит,

$$C_k^{n/2-1}[t] - C_{k-2}^{n/2-1}[t] = \frac{2k+n-4}{n-4}\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^m(n-4,2)_{k-m}}{(2m-2)!!(k-2m)!}t^{k-2m} = \frac{2k+n-4}{n-4}C_k^{n/2-2}[t].$$

Отсюда следует равенство (9).

Если считать, как отмечено выше, что $C_{-2}^{n/2-1}[t]=0$ и $C_{-1}^{n/2-1}[t]=0$, тогда равенство (9) верно при $k=0$ (значения $C_0^\lambda[t]$ и $C_1^\lambda[t]$ были вычислены выше):

$$C_0^{n/2-2}[t] = 1 = \frac{n-4}{n-4}C_0^{n/2-1}[t]$$

и при $k = 1$ имеем

$$C_1^{n/2-2}[t] = 2(n/2-2)t = (n-4)t = \frac{n-4}{2+n-4}(n-2)t = \frac{n-4}{2+n-4}2(n/2-1)t = \frac{n-4}{2+n-4}C_1^{n/2-1}[t].$$

Лемма полностью доказана.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО РЕШЕНИЯ

Теперь можно построить важное представление функции $E_4(x,\xi)$.

Теорема 1. *Пусть $n > 4$. Для функции $E_4(x,\xi)$ при $|x| < |\xi|$ справедливо представление*

$$E_4(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|\xi|^2}{2k+n-4} - \frac{|x|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi). \tag{10}$$

При $|\xi| < |x|$ соответствующая формула для $E_4(x,\xi)$ получается из формулы (10) *перестановкой местами переменных x и ξ.*

Доказательство. Известно (см. [17]), что если $\left\{S_k^{(i)}(\xi)\colon i = 1, \ldots, h_k\right\}$ – произвольная полная ортонормированная система сферических гармоник степени k и $|x| = |\xi| = 1$, то справедливо равенство

$$\frac{C_k^{n/2-1}[(x,\xi)]}{C_k^{n/2-1}[1]} = \frac{\omega_n}{h_k}\sum_{i=1}^{h_k}S_k^{(i)}(x)S_k^{(i)}(\xi),$$

где $C_k^{n/2-1}[1] = C_{k+n-3}^{k}$. Отсюда, положив $S_k^{(i)}(x) = \left(1/\sqrt{\omega_n}\right)H_k^{(i)}(x)$, получим

$$\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi) = \frac{2k+n-2}{n-2}C_k^{n/2-1}[(x,\xi)]. \tag{11}$$

Следовательно, при $|\xi| = 1$ и $|x| < 1$ будем иметь

$$C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \frac{n-2}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Рассмотрим бигармонический многочлен $C_k^{n/2-2}[(x/|x|,\xi)]|x|^k$ из леммы 4. Преобразуем его, используя равенство (9) из леммы 5. Будем иметь

$$C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \frac{n-4}{2k+n-4}\left(C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k - |x|^2C_{k-2}^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^{k-2}\right).$$

Вспомним равенство (8). Из него при $|\xi| = 1$ и $|x| < 1$ получим

$$|x-\xi|^{4-n} = \sum_{k=0}^{\infty}C_k^{n/2-2}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n-4}{2k+n-4}C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k -$$
$$- |x|^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n-4}{2k+n-4}C_{k-2}^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n-4}{2k+n-4}C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k -$$
$$- |x|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n-4}{2k+n}C_k^{n/2-1}\left[\left(\frac{x}{|x|},\xi\right)\right]|x|^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n-2}{2k+n-2}\left(\frac{n-4}{2k+n-4} - |x|^2\frac{n-4}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Снимем ограничение $|\xi| = 1$, но при этом будем считать, что $|x| < |\xi|$. В этом случае $|x/|\xi|| < 1$ и $|\xi/|\xi|| = 1$ и, значит, имеем

$$|x-\xi|^{4-n} = |\xi|^{4-n}\left|\frac{x}{|\xi|}-\frac{\xi}{|\xi|}\right|^{4-n} = (n-2)(n-4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-4)}}{2k+n-2}\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{|x|^2/|\xi|^2}{2k+n}\right)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi) = (n-2)(n-4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|\xi|^2}{2k+n-4}-\frac{|x|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi),$$

откуда с учетом определения (6) функции $E_4(x,\xi)$ следует (10).

Для окончательного доказательства теоремы заметим, что в формуле (11) переменные x и ξ равноправны и, значит, если поменять их местами, то при выводе формулы для $E_4(x,\xi)$ при условии $|\xi| < |x|$ мы получим формулу (10), в которой переменные x и ξ переставлены местами. Теорема доказана.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Начнем построение функции Грина задачи (3), (4).

Лемма 6. *Пусть $n > 4$. Для бигармонической функции $E_4(x/|x|,|x|\xi)$ при $x,\xi \in S$ справедливо представление*

$$E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi), \tag{12}$$

в котором ряды сходятся равномерно по $x \in \overline{S}$ при $\xi \in S$.

Доказательство. Обозначим $\hat{x} = |x|\xi$ и $\hat{\xi} = x/|x|$. Тогда $|\hat{\xi}| = 1$ и $|\hat{x}| = |x||\xi| < |\hat{\xi}|$. Воспользуемся формулой (10) для представления функции $E_4(\hat{\xi},\hat{x})$

$$E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right) = E_4(\hat{\xi},\hat{x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{|\hat{x}|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(\hat{x})H_k^{(i)}(\hat{\xi}) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{x^2|\xi|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

В силу леммы 1 полученные ряды сходятся равномерно по $|x| \le 1$ при $|\xi| \le a < 1$, так как $|\hat{x}| = |x||\xi| < a < 1 = |\hat{\xi}|$. Бигармоничность функции $E_4(x/|x|,|x|\xi)$ по обеим переменным при $\xi \in S$ и $x \in \overline{S}$ следует из равенства

$$|x/|x|-|x|\xi|^{4-n} = |x/|x|-|x|\xi|^{2-n}|x/|x|-|x|\xi|^2,$$

поскольку функция $|x/|x|-|x|\xi|^{2-n}$ гармоническая (это преобразование Кельвина гармонической функции [21]) и

$$\left|\frac{x}{|x|}-\xi|x|\right|^2 = \frac{|x|^2}{|x|^2}-2\left(\frac{x}{|x|},\xi|x|\right)+|\xi|^2|x|^2 = 1-2(x,\xi)+|\xi|^2|x|^2, \tag{13}$$

а произведение таких функций — бигармоническая функция. При $n = 3$ бигармоничность $E_4(x/|x|,|x|\xi)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Замечание 1. Функция в правой части формулы (12) симметрична относительно x и ξ, а по левой части этого сразу не видно. Однако в силу (13) симметрия есть.

Нетрудно видеть, что функция

$$\hat{E}_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right) \tag{14}$$

обладает свойством $\hat{E}_4(x,\xi)\big|_{\partial S} = 0$. В гармоническом случае эта разность давала функцию Грина (1) задачи Дирихле. В бигармоническом случае этого мало. Вычислим нормальную производную функции $\hat{E}_4(x,\xi)$ на ∂S. Для этого используем однородный оператор (см. [20]) $\Lambda u = \sum_{k=1}^{n} x_i u_{x_i}$, который очевидно обладает свойством $\left(\Lambda u - \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial S} = 0$.

Лемма 7. *При $\xi \in S$ и $x \in \partial S$ справедливо равенство*

$$\Lambda \hat{E}_4(x,\xi) = \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть точка $\xi \in S$ фиксированна. Если воспользоваться теоремой 1 при $|\xi| < |x|$ и леммой 6, то будем иметь

$$\hat{E}_4(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n} \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \left(\frac{1}{2k+n-4} - \frac{|x|^2 |\xi|^2}{2k+n} \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi),$$

а при $|x| < |\xi|$ переменные x и ξ следует поменять местами. Применим оператор Λ к этому равенству. В силу равномерной сходимости рядов при $|\xi| < |x|$ и $\xi \in S$, $x \in \overline{S}$ (см. леммы 1 и 6), дифференцирование можно внести под знак суммы. Затем перейдем к пределу при $x \to \partial S$ под знаком суммы, которое опять возможно в силу равномерной сходимости рядов по x. Будем иметь

$$\Lambda_x \hat{E}_4(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \left(-\frac{(k+n-4)}{2k+n-4} + \frac{(k+n-2)|\xi|^2}{2k+n} - \right.$$
$$\left. - \frac{k}{2k+n-4} + \frac{(k+2)|\xi|^2}{2k+n} \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi).$$

Лемма доказана.

Замечание 2. При фиксированном $\xi \in S$ справедливо равенство

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \hat{E}_4(x,\xi)\Big|_{\partial S} = \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi \right)\Big|_{\partial S}. \tag{16}$$

Действительно, используя формулу (5) из леммы 2 в равенстве (15) и свойства оператора Λ, получаем равенство (16).

Лемма 8. *Пусть $w(x)$ – гармоническая в S, непрерывная в $\overline{S}$ функция, с ограниченными на ∂S производными, тогда бигармоническая функция*

$$v(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2} w(x) \tag{17}$$

обладает свойством

$$v\big|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = w(x)\big|_{\partial S}. \tag{18}$$

Доказательство. Из (17) видно, что $v(x)$ – бигармоническая в S функция и $v\big|_{\partial S} = 0$. Кроме того, имеем

$$\Lambda v(x) = \Lambda \frac{|x|^2 - 1}{2} w(x) = |x|^2 w(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda w(x)$$

и, значит, в силу ограниченности на ∂S функции $\Lambda w(x)$, второе условие из (18) тоже выполнено. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $n \geq 3$. *Функция*

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) \tag{19}$$

является функцией Грина задачи Дирихле (3), (4). *Функция Грина* $G_4(x,\xi)$ — *бигармоническая при* $x,\xi \in S$ *и* $x \neq \xi$. *Решение задачи* (3), (4) *при* $f \in C^1(\bar{S})$ *можно записать в виде*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Пусть $n > 4$ или $n = 3$ и $\xi \in S$ фиксировано. Докажем, что функция $G_4(x,\xi)$ бигармоническая при $x \in S$ и $x \neq \xi$ и удовлетворяет однородным условиям (4). Бигармоничность функции $G_4(x,\xi)$ при $x \in S$ и $x \neq \xi$ следует из леммы 3, леммы 6 и леммы 8 (гармоничность $E(x/|x|, |x|\xi)$ известна [1]). Далее, как уже отмечалось выше, при $\xi \in S$ справедливо равенство $\hat{E}_4(x,\xi)\big|_{\partial S} = 0$, а значит, так как функция $E(x/|x|, |x|\xi)$ ограничена по $x \in \bar{S}$, первое условие из (4) выполнено

$$G_4(x,\xi)\big|_{\partial S} = 0. \tag{20}$$

Докажем второе условие. Рассмотрим гармоническую по $x \in S$ функцию

$$w(x) = \frac{|\xi|^2-1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right).$$

В этих обозначениях, по замечанию 2 из леммы 7 и по лемме 8, с учетом (14) найдем

$$\frac{\partial}{\partial\nu} G_4(x,\xi)\bigg|_{\partial S} = \frac{\partial}{\partial\nu}\hat{E}_4(x,\xi)\bigg|_{\partial S} - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{|x|^2-1}{2} w(x)\right)\bigg|_{\partial S} = w(x)\big|_{\partial S} - w(x)\big|_{\partial S} = 0. \tag{21}$$

Случай $n > 4$ или $n = 3$ доказан. Пусть $n = 4$. Бигармоничность $E_4(x,\xi)$ при $x \neq \xi$ доказана в лемме 3. Если обозначить (с точностью до множителя -4)

$$E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \ln\left|\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2\right| \frac{1}{2}\ln t,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \frac{-\xi_i + x_i|\xi|^2}{t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = -2\frac{(-\xi_i + x_i|\xi|^2)^2}{t^2} + \frac{|\xi|^2}{t}$$

при $i = 1, \ldots, 4$ и, значит, получим

$$\Delta E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = -2\frac{|\xi|^2(1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2)}{t^2} + 4\frac{|\xi|^2}{t} = 2\frac{|\xi|^2}{t} = \frac{2|\xi|^2}{\left|x/|x| - |x|\xi\right|^2} = \frac{2|\xi|^2}{|x|^2\left|x/|x|^2 - \xi\right|^2}.$$

Последняя функция является преобразованием Кельвина по x гармонической при $n = 4$ функции $2|\xi|^2/|x-\xi|^2$, а поскольку преобразование Кельвина сохраняет гармоничность [21], то эта функция гармоническая по $x \in S$, а значит, $E_4(x/|x|, |x|\xi)$ — бигармоническая функция.

Проверим граничные условия (4). Начнем со второго. Нетрудно вычислить

$$-4\Lambda_x E_4(x,\xi) = \Lambda_x \ln|x-\xi| = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^2} = \frac{|x|^2 - (x,\xi)}{|x-\xi|^2}$$

и

$$-4\Lambda_x E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \frac{1}{2}\Lambda_x \ln\left(1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 x_i \frac{-2\xi_i + 2x_i|\xi|^2}{1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2} = \frac{|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)}{\left|x/|x| - |x|\xi\right|^2},$$

а поэтому при $x \in \partial S$ имеем

$$\Lambda_x\left(E_4(x,\xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right)\right) = -\frac{1}{4}\frac{|x|^2 - |x|^2|\xi|^2}{|x/|x| - |x|\xi|^2} = \frac{|\xi|^2 - 1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{|x/|x| - |x|\xi|^2} =$$
$$= \frac{|\xi|^2 - 1}{2}E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \Lambda_x\left(\frac{|x|^2 - 1}{2}\frac{|\xi|^2 - 1}{2}E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right)\right).$$

Отсюда после перенесения функции справа в левую часть равенства получаем, что при $n = 4$ функция $G_4(x,\xi)$ из (19) при $x \in S$ удовлетворяет условию (21) $\frac{\partial}{\partial \nu}G_4(x,\xi)\Big|_{\partial S} = 0$. Условие (20) $G_4(x,\xi)|_{\partial S} = 0$, где $x \in S$, очевидно тоже выполнено.

Известно (см. [21, с. 25]), что интегралы типа потенциала

$$\int_S \frac{\rho(\xi)}{|x - \xi|^\alpha}d\xi$$

являются функциями класса $C^p(\mathbb{R}^n)$ при ограниченной интегрируемой функции $\rho(x)$, причем дифференцирование возможно под знаком интеграла при всяком целом неотрицательном p таком, что $\alpha + p < n$. В нашем случае $\alpha = n - 4$, а значит, для интеграла

$$u_1(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S E_4(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$p = 3$ и $u_1 \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, учитывая лемму 3, при $x \in S$ получаем

$$\Delta u_1(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S \Delta E_4(x,\xi)f(\xi)d\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

а значит, верно

$$\Delta^2 u_1(x) = \Delta\left(-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)f(\xi)d\xi\right) = f(x), \quad x \in S.$$

Условие $f \in C^1(\bar{S})$ необходимо для выполнения равенства $\Delta(\Delta u_1(x)) = f(x)$ в S (см. [1]). Далее, в силу леммы 6, функция

$$-E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2 - 1}{2}\frac{|\xi|^2 - 1}{2}E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right)$$

является бигармонической по x в S при любом $\xi \in S$ и ее можно дифференцировать по x под знаком интеграла по ξ любое число раз. Обозначая интеграл от этой функции, умноженной на $(1/\omega_n)f(\xi)$, по $\xi \in S$ через $u_2(x)$, находим

$$\Delta^2 u_2(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \Delta_x^2\left(E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) + \frac{|x|^2 - 1}{2}\frac{|\xi|^2 - 1}{2}E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right)\right)f(\xi)d\xi = 0.$$

Поэтому, учитывая (19), получаем

$$\Delta^2 u(x) \equiv \Delta^2 u_1(x) + \Delta^2 u_2(x) = f(x).$$

Наконец, в силу того, что $u \in C^3(\bar{S})$ из (20) и (21) найдем

$$u(x)|_{\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi)\Big|_{x\in\partial S} f(\xi)d\xi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial G_4(x,\xi)}{\partial \nu}\Big|_{x\in\partial S} f(\xi)d\xi = 0,$$

а значит, условия (4) для $u(x)$ выполнены. Теорема доказана.

Вид функции Грина, полученный в теореме 2, отличается от найденного в [8].

Замечание 3. Функцию Грина $G_4(x,\xi)$ с учетом леммы 3 можно записать в виде

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right) + \frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\Delta E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right).$$

Теорема 3. *Пусть $n > 4$. Функция $G_4(x,\xi)$ при $|\xi| < |x|$ может быть записана в виде*

$$G_4(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n}\right) - \frac{1}{2k+n-2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2k+n-4} - \frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n} + \frac{|x|^2-1}{2}\left(|\xi|^2-1\right)\right)\right)\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi). \tag{22}$$

При $|x| < |\xi|$ представление для $G_4(x,\xi)$ получается из (22) *перестановкой местами переменных x и ξ.*

Доказательство. В лемме 7 при $|\xi| < |x|$ было получено представление

$$\hat{E}_4(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\left(\frac{1}{2k+n-4} - \frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n}\right)\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi),$$

которое для $|x| < |\xi|$ получается из данного представления перестановкой местами переменных x и ξ. Вспоминая формулу (5) из леммы 2, формулу (14) для функции $\hat{E}_4(x,\xi)$ и определение функции $G_4(x,\xi)$ из (19) получим (22). Наконец, симметрия функции $G_4(x,\xi)$ и формулы (22) относительно x и ξ имеет место в силу замечания 1. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $f(x) = |x|^{2l} H_m(x)$, где $H_m(x)$ – однородный степени $m \in \mathbb{N}_0$ гармонический многочлен, $l \in \mathbb{R}_+$ и $n > 4$. Тогда имеем*

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1} G_4(x,\xi)f(\xi)d\xi = \frac{|x|^{2l+4} - 1 - (l+2)(|x|^2-1)}{C_{l,m}}H_m(x), \tag{23}$$

где $C_{l,m} = (2l+2)(2l+4)(2l+2m+n)(2l+2m+n+2)$.

Доказательство. Пусть сначала $f(x) = |x|^{2l} H_m^{(j)}(x)$, где $H_m^{(j)}(x)$ – некоторый многочлен из полной системы $\left\{H_m^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_m,\ m \in \mathbb{N}_0\right\}$ однородных степени $m \in \mathbb{N}_0$ ортогональных сферических гармоник и $l \in \mathbb{R}_+$. Обозначим левую часть формулы (23) через $u(x)$ и вычислим ее. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $|x| + \varepsilon < 1$ и $|x| - \varepsilon > 0$, тогда в силу интегрируемой особенности функции $G_4(x,\xi)$ имеем

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^1 \rho^{n-1}d\rho\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} G_4(x,\rho\xi)f(\rho\xi)ds_\xi =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{|x|-\varepsilon} + \int_0^{|x|+\varepsilon}\right)\rho^{n-1}d\rho\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} G_4(x,\rho\xi)f(\rho\xi)ds_\xi \equiv \lim_{\varepsilon\to +0}\left(I_1^\varepsilon(x) + I_2^\varepsilon(x)\right).$$

Здесь интеграл $I_1^\varepsilon(x)$ при $x = 0$ нужно опустить. Вычислим первый интеграл $I_1^\varepsilon(x)$. Поскольку в этом интеграле $|\xi| < |x| - \varepsilon \equiv a < |x|$, то по лемме 1 ряд из (22), представляющий функцию $G_4(x,\xi)$, сходится равномерно по ξ, а значит, интегрирование и суммирование можно поменять местами

$$I_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\int_0^{|x|-\varepsilon}\rho^{2l+m+n-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{\rho^2}{2k+n}\right) - \frac{1}{2k+n-2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2k+n-4} - \rho^2\frac{|x|^2}{2k+n} + \frac{|x|^2-1}{2}\left(\rho^2-1\right)\right)\right)d\rho\,\rho^k\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} H_k^{(i)}(\xi)H_m^{(j)}(\xi)ds_\xi.$$

Учитывая ортогональность многочленов системы $\left\{H_k^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_k,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$, будем иметь

$$I_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{|x|-\varepsilon} \rho^{2l+2m+n-1}\left(\frac{|x|^{-(2m+n-2)}}{2m+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2m+n-4} - \frac{\rho^2}{2m+n}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{1}{2m+n-4} - \rho^2\frac{|x|^2}{2m+n} + \frac{|x|^2-1}{2}\left(\rho^2-1\right)\right)\right) d\rho H_m^{(j)}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|x|^{-(2m+n-2)}}{2m+n-2}\left(\frac{|x|^2(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n}}{(2l+2m+n)(2m+n-4)} - \frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n+2}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n}}{(2m+n-4)(2l+2m+n)} - \frac{|x|^2(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n+2}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{|x|^2-1}{2}\left(\frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n+2}}{2l+2m+n+2} - \frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)\right)\right) H_m^{(j)}(x).$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{|x|^{2l+4}}{(2l+2m+n)(2m+n-4)} - \frac{|x|^{2l+4}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} - \right.$$
$$- \frac{|x|^{2l+2m+n}}{(2m+n-4)(2l+2m+n)} + \frac{|x|^{2l+2m+n+4}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} -$$
$$\left. - \frac{|x|^2-1}{2}\left(\frac{|x|^{2l+2m+n+2}}{2l+2m+n+2} - \frac{|x|^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)\right) H_m^{(j)}(x).$$

Аналогично, используя симметричность $G_4(x,\xi)$, находим

$$I_2^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|+\varepsilon}^{1} \rho^{2l+2m+n-1}\left(\frac{\rho^{-(2m+n-2)}}{2m+n-2}\left(\frac{\rho^2}{2m+n-4} - \frac{|x|^2}{2m+n}\right) - \frac{1}{2m+n-2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2m+n-4} - \rho^2\frac{|x|^2}{2m+n} + \frac{|x|^2-1}{2}\left(\rho^2-1\right)\right)\right) d\rho H_m^{(j)}(x) =$$
$$= \frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+4}}{(2l+4)(2m+n-4)} - |x|^2\frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+2}}{(2m+n)(2l+2)} - \right.$$
$$- \frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n}}{(2m+n-4)(2l+2m+n)} + |x|^2\frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n+2}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} -$$
$$\left. - \frac{|x|^2-1}{2}\left(\frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n+2}}{2l+2m+n+2} - \frac{1-(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)\right) H_m^{(j)}(x).$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2^\varepsilon(x) = \frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{1-|x|^{2l+4}}{(2l+4)(2m+n-4)} - \frac{|x|^2-|x|^{2l+4}}{(2m+n)(2l+2)} - \frac{1-|x|^{2l+2m+n}}{(2m+n-4)(2l+2m+n)} + \right.$$
$$\left. + \frac{|x|^2-|x|^{2l+2m+n+4}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} - \frac{|x|^2-1}{2}\left(\frac{1-|x|^{2l+2m+n+2}}{2l+2m+n+2} - \frac{1-|x|^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)\right) H_m^{(j)}(x).$$

Отсюда получаем

$$u(x) = I_1^0(x) + I_2^0(x) = \frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{|x|^{2l+4}}{(2l+2m+n)(2m+n-4)} - \frac{|x|^{2l+4}}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} + \right.$$
$$+ \frac{1-|x|^{2l+4}}{(2l+4)(2m+n-4)} - \frac{|x|^2-|x|^{2l+4}}{(2m+n)(2l+2)} - \frac{1}{(2m+n-4)(2l+2m+n)} + \tag{24}$$
$$\left. + \frac{|x|^2}{(2m+n)(2l+2m+n+2)} - \frac{|x|^2-1}{2}\left(\frac{1}{2l+2m+n+2} - \frac{1}{2l+2m+n}\right)\right) H_m^{(j)}(x).$$

С помощью Mathematica вычислим коэффициенты при $|x|^{2l+4}\, H_m^{(j)}(x)$

$$\frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{1}{(2l+2m+n)(2m+n-4)} - \frac{1}{(2m+n)(2+2l+2m+n)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(2l+4)(2m+n-4)} + \frac{1}{(2l+2)(2m+n)}\right) = \frac{1}{C_{l,m}},$$

при $|x|^2\, H_m^{(j)}(x)$

$$\frac{1}{2(2m+n-2)}\left(-\frac{1}{(2l+2)(2m+n)} + \frac{1}{(2l+2m+n+2)(2m+n)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(2l+2m+n+2)} + \frac{1}{2(2l+2m+n)}\right) = -\frac{l+2}{C_{l,m}}$$

и при $H_m^{(j)}(x)$

$$\frac{1}{2(2m+n-2)}\left(\frac{1}{(2l+4)(2m+n-4)} - \frac{1}{(2l+2m+n)(2m+n-4)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(2l+2m+n+2)} - \frac{1}{2(2l+2m+n)}\right) = \frac{l+1}{C_{l,m}},$$

где $C_{l,m} = (2l+2)(2l+4)(2l+2m+n)(2l+2m+n+2)$. Подставляя найденные значения коэффициентов в (24), получаем

$$u(x) = \frac{|x|^{2l+4} - (l+2)|x|^2 + l + 1}{C_{l,m}} H_m^{(j)}(x),$$

что совпадает с (23) при $H_m(x) = H_m^{(j)}(x)$.

В силу полноты системы $\left\{H_m^{(i)}(x)\colon i = 1, \ldots, h_m, m \in \mathbb{N}_0\right\}$ для однородного гармонического многочлена $H_m(x)$ верно представление $H_m(x) = \sum_{j=1}^{h_m} \alpha_j H_m^{(j)}(x)$, а значит, для $f(x) = |x|^{2l}\, H_m(x)$ имеем

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1} G_4(x,\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{h_m} \alpha_j \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1} G_4(x,\xi)|\xi|^{2l}\, H_m^{(j)}(\xi) d\xi =$$
$$= \frac{|x|^{2l+4} - 1 - (l+2)\left(|x|^2 - 1\right)}{C_{l,m}} \sum_{j=1}^{h_m} \alpha_j H_m^{(j)} = \frac{|x|^{2l+4} - 1 - (l+2)\left(|x|^2 - 1\right)}{C_{l,m}} H_m(x).$$

Теорема доказана.

Результат теоремы совпадает с результатом, полученным в [22] при $m \in \mathbb{N}_0$. Метод построения этих решений был основан на разложениях типа Альманси [23], [24]. Отметим, что полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения были построены в [25]. Теорему 2 можно дополнить следующим утверждением.

Теорема 5. *Пусть* $n = 2$. *Следующая функция*:

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\left(E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) + \frac{1}{2}\right) \tag{25}$$

является функцией Грина задачи Дирихле (3), (4). *Функция Грина* $G_4(x,\xi)$ *бигармоническая при* $x, \xi \in S$ *и* $x \neq \xi$.

Доказательство. Докажем, что функция $G_4(x,\xi)$ бигармоническая при $x \in S$ и $x \neq \xi$ и удовлетворяет однородным условиям (4). Бигармоничность функции

$$E_4(x,\xi) = \frac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi| - 1)$$

при $x \neq \xi$ была установлена в лемме 3. Исследуем функцию $E_4(x/|x|, |x|\xi)$. Аналогично случаю $n = 4$ обозначим

$$\ln\left|\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2\right| \equiv \frac{1}{2}\ln t.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\ln t = \frac{-\xi_i + x_i|\xi|^2}{t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{1}{2}\ln t = -2\frac{(-\xi_i + x_i|\xi|^2)^2}{t^2} + \frac{|\xi|^2}{t}$$

и, значит,

$$\Delta_x\frac{1}{2}\ln t = -2\frac{|\xi|^2\left(1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2\right)}{t^2} + 2\frac{|\xi|^2}{t} = 0,$$

т.е. $\ln|x/|x| - |x|\xi|$ — гармоническая по x функция. Так как множитель перед логарифмом равен $|x/|x| - |x|\xi|^2 = 1 - 2(x,\xi) + |x|^2|\xi|^2$, то функция $E_4(x/|x|, |x|\xi)$ при $n = 2$ бигармоническая по x при $x, \xi \in S$. Наконец, функция

$$\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\left(E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) + \frac{1}{2}\right)$$

бигармоническая, поскольку функция $E(x/|x|, |x|\xi)$ — гармоническая функция при $x \in S$.

Проверим граничные условия (4). Начнем со второго. Нетрудно видеть, что

$$\Lambda_x|x-\xi|^2 = 2\left(|x|^2 - (x,\xi)\right), \quad \Lambda_x\ln|x-\xi| = \frac{|x|^2 - (x,\xi)}{|x-\xi|^2},$$

а поэтому

$$4\Lambda_x E_4(x,\xi) = 2\left(|x|^2 - (x,\xi)\right)(\ln|x-\xi| - 1) + |x|^2 - (x,\xi) = \left(|x|^2 - (x,\xi)\right)(2\ln|x-\xi| - 1).$$

Аналогично случаю $n = 4$ имеем

$$\Lambda_x|x/|x| - |x|\xi|^2 = 2\left(|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)\right), \quad \Lambda_x\ln|x/|x| - |x|\xi| = \frac{|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)}{|x/|x| - |x|\xi|^2},$$

а поэтому, поскольку оператор Λ первого порядка, найдем

$$4\Lambda_x E_4(x/|x|, |x|\xi) = 2\left(|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)\right)(\ln|x/|x| - |x|\xi| - 1) +$$

$$+ |x/|x| - |x|\xi|^2\frac{|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)}{|x/|x| - |x|\xi|^2} = \left(|x|^2|\xi|^2 - (x,\xi)\right)(2\ln|x/|x| - |x|\xi| - 1).$$

Таким образом, при $x \in \partial S$ получим

$$4\Lambda_x(E_4(x,\xi) - E_4(x/|x|, |x|\xi)) = (2\ln|x/|x| - |x|\xi| - 1)\left(1 - |\xi|^2\right) =$$

$$= 4\left(-\ln|x/|x| - |x|\xi| + \frac{1}{2}\right)\frac{|\xi|^2-1}{2} = 4\left(\left(E(x/|x|, |x|\xi) + \frac{1}{2}\right)\frac{|\xi|^2-1}{2} =$$

$$= 4\Lambda_x\left(\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\left(E(x/|x|, |x|\xi) + \frac{1}{2}\right)\right).$$

После элементарных преобразований при $\xi \in S$ получим $\left.\frac{\partial}{\partial \nu} G_4(x,\xi)\right|_{x\in\partial S} = 0$. Условие $G_4(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0$, где $\xi \in S$ очевидно тоже выполнено. Дальнейшее доказательство повторяет конец доказательства теоремы 2, в силу которого дифференцирование и предельный переход можно внести под знак интеграла в

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi) f(\xi)d\xi.$$

Поэтому функция $u(x)$ задает решение задачи (3), (4) при $f \in C^1(\bar{S})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
2. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
3. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
4. *Constantin E., Pavel N.H.* Green function of the Laplacian for the Neumann problem in $\mathbb{R}^n_+$ // Libertas Math. 2010. V. XXX. P. 57–69.
5. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
6. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conf. Proc. 2014. V. 1611. P. 255–260.
7. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
8. *Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu.* Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Dokl. Math. 2008. V. 421. № 3. P. 528–530.
9. *Kal'menov T.Sh., Suragan D.* On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // Differ. Equ. 2012. V. 48. № 3. P. 441–445.
10. *Карачик В.В., Антропова Н.А.* О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сибирский ж. индустриальной матем. 2012. Т. XV. № 2. С. 86–98.
11. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 4–2. С. 550–558.
12. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics. 2018. V. 9. № 2. (Published online).
13. *Карачик В.В., Турметов Б.Х.* О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // Матем. труды. 2018. Т. 21. № 1. С. 17–34.
14. *Садыбеков М.А., Торебек Б.Т., Турметов Б.Х.* Представление функции Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа // Сибирский матем. журнал. 2017. Т. 58. № 1. С. 199–205.
15. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. V. 61. № 1. P. 104–123.
16. *Karachik V.V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proceedings of American Mathematical Society. 1998. V. 126. № 12. P. 3513–3519.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
18. *Karachik V.V.* A Neumann-type problem for the biharmonic equation // Siberian Adv. Math. 2017. V. 27. № 2. P. 103–118.
19. *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1674–1694.
20. *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
22. *Карачик В.В.* Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 8. С. 1038–1047.
23. *Карачик В.В.* Об одном разложении типа Альманси // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 3. С. 370–380.
24. *Карачик В.В.* Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Матем. труды. 2007. Т. 10. № 2. С. 142–162.
25. *Карачик В.В.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Ж. Сибирского федерального ун-та. Матем. и физ. 2012. Т. 5. № 4. С. 527–546.