ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 3–20

УДК 519.633

О КОНТРОЛЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

© 2019 г. В. Г. Корнеев

(199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7-9, СПбГУ, Россия)

e-mail: vad.korneev2011@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.09.2017 г.

В статье для приближенных решений уравнений реакции-диффузии рассматривается новый способ получения апостериорных оценок погрешности. В качестве модельной используется задача $\Delta u + \sigma u = f$ в Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$ с произвольным постоянным коэффициентом реакции $\sigma \geq 0$. Для решений метода конечных элементов доказываются оценки, которые для краткости называются согласованными и характеризуются тем, что по порядку точности они одинаковы с не улучшаемыми в этом отношении априорными оценками. Согласованность предполагает также, что точность таких оценок обеспечивается тестирующими потоками, удовлетворяющими только соответствующим требованиям аппроксимации без удовлетворения уравнениям баланса. В связи с этим область практической применимости согласованных апостериорных оценок погрешности является весьма широкой, так как для вычисления входящих в них тестирующих потоков могут быть использованы многочисленные процедуры восстановления потоков, интенсивно развивавшиеся для индикаторов погрешности метода невязок. Они обеспечивают не только стандартные порядки аппроксимации, но и суперсходимость восстановленных потоков. Достоинствами рассматриваемого семейства апостериорных оценок являются их гарантированная точность по порядку, отсутствие необходимости удовлетворения уравнениям баланса в процедурах восстановления потоков и существенно более широкая область эффективности по сравнению с другими апостериорными оценками. Библ. 34.

Ключевые слова: апостериорные оценки погрешности, уравнения реакции-диффузии, метод конечных элементов, процедуры восстановления потоков, точные по порядку оценки.

DOI: 10.1134/S0044466919010125

ВВЕДЕНИЕ

Для успешного контроля погрешности численных решений гарантированная апостериорная оценка погрешности должна удовлетворять условиям достаточной точности и быстродействия, то есть близости к оптимальной по вычислительной работе. Естественно ожидать, в частности, что вычислительная стоимость оценки погрешности не превышает стоимости численного решения задачи. К числу распространенных относятся апостериорные оценки энергетической нормы погрешности, содержащие в правой части два основных слагаемых, одно из которых есть L_2-норма невязки, вычисляемая с помощью приближенного решения и некоторого тестирующего потока. Для определенности в качестве достаточно характерного примера приближенных решений будем рассматривать решения метода конечных элементов. Для эллиптических уравнений второго порядка, как правило, применяют МКЭ класса C с решениями из конечномерного подпространства пространства $C(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Вторые производные таких приближенных решений, как и первые производные от соответствующих им компонент потоков, нужные для вычисления невязки, не определены. Поэтому для вычисления оценок погрешности используют более гладкие тестирующие потоки, которые находят по потокам МКЭ посредством специальных процедур. Их называют *процедурами восстановления потоков*, от них существенно зависит точность и вычислительная сложность апостериорной оценки.

Таким образом, развитие многочисленных в настоящее время процедур восстановления потоков было мотивировано необходимостью повышения гладкости потоков без потери точности. Если $\mathbb{V}_h(\Omega)$ – пространство конечно-элементных функций и u_{fem} – решение МКЭ, $u_{\text{fem}} \in \mathbb{V}_h(\Omega)$, то для вычислимости невязочного слагаемого апостериорной оценки достаточно определить тестирующую вектор-функцию потока $\mathbf{y}, \mathbf{y}^\top = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, как элемент пространства $\mathbf{V}_h(\Omega) = (\mathbb{V}_h(\Omega))^m$, где m — размерность области Ω, h — размер сетки, или конечномерного подпространства пространства $\mathbf{H}(\Omega, \mathrm{div})$. Можно, например, в качестве $\mathbf{y}$ взять ортогональную L_2-проекцию потока МКЭ на $\mathbf{V}_h(\Omega)$. Такой алгоритм достаточно прост, его вычислительная стоимость во многих случаях линейна, так как он требует решения системы алгебраических уравнений с малозаполненной матрицей, имеющей при использовании, например, квазиоднородных сеток равномерное по h диагональное преобладание. Значительное внимание уделялось процедурам, в которых нахождение сглаженного потока сводится к решению вспомогательных локальных задач аппроксимации, нередко с одновременным удовлетворением уравнений баланса или уравнений равновесия для задач механики твердого тела. Совершенствованию этих процедур посвящена весьма обширная литература (см., в частности, [1]–[8]).

Процедуры восстановления потоков получают, исходя из трех требований:

α) сохранения порядков точности в энергетической и других нормах, одинаковых с потоком, определяемым приближенным решением краевой задачи;

β) получения сбалансированных, т.е. удовлетворяющих уравнениям баланса, см. (6), или частично сбалансированных восстановленных потоков, обеспечивающих поэлементные равенства нулю или достаточную малость невязки;

γ) линейной или почти линейной вычислительной сложности.

В статье термин *апостериорная мажоранта* используется для правой части апостериорной оценки. Очевидно, что требование β) усложняет процедуры вычисления оценок, делает их менее универсальными, более зависимыми от свойств краевых задач. Однако за счет его выполнения удается обнулить слагаемое в апостериорной мажоранте, содержащее норму невязки, или уменьшить ее до величины, сопоставимой по порядку малости с оцениваемой нормой погрешности приближенного решения. Примером последовательной реализации такого подхода является работа [8] и предшествующие ей работы [2], [9].

Термин *согласованная апостериорная оценка погрешности* в настоящей работе имеет отношение к степени точности оценок. Он применяется к апостериорным оценкам, которые на тестирующих потоках, удовлетворяющих требованиям α), γ), имеют порядки точности, совпадающие с порядками точности соответствующих априорных оценок погрешности. Очевидно, согласованная апостериорная оценка погрешности неулучшаема по порядку точности, если в этом смысле неулучшаема априорная оценка погрешности численного метода. Заметим, что в зарубежной литературе параллельный термин "consistency" понимается часто в более слабом смысле как обращение мажоранты в ноль при подстановке в нее точного решения задачи.

Мажоранты энергетической нормы погрешности, как правило, содержат в качестве слагаемого L_2-норму невязки, умноженную на $1/\sqrt{\sigma}$, где σ — коэффициент реакции в уравнении реакции-диффузии. Для случая $\sigma \equiv 0$ известны также апостериорные мажоранты погрешности, в которых множитель перед указанной нормой является константой. Как легко убедиться, на тестовых потоках, удовлетворяющих только требованиям α) и γ), мажоранты обоих указанных типов могут завышать оценку мажорируемой нормы погрешности в h^{-1} раз и более. Это говорит о том, что такие мажоранты, примеры которых приведены в разд. 1, не являются согласованными. Как отмечалось, применение тестовых потоков, учитывающих все требования α)–γ), способно выправить положение, однако известные эффективные способы сглаживания потоков с одновременным удовлетворением уравнениям баланса и сохранением порядков точности не являются простыми. Кроме того, они, как правило, получены для уравнений конкретного вида и схем их решения первого порядка точности, то есть не являются универсальными. В то же время есть другая возможность повышения точности, позволяющая одновременно упростить процедуры восстановления потоков. В данной работе с использованием новых приемов вывода, кратко изложенных в работах [10]–[12], доказываются согласованные апостериорные оценки. В них перед упомянутой выше L_2-нормой невязки появляется множитель h. Это не только на порядок повышает точность апостериорной оценки, но и устраняет необходимость, чтобы тестирующий поток удовлетворял уравнениям баланса.

У работы есть и другой мотив. Ряд популярных в настоящее время апостериорных оценок для уравнения реакции-диффузии имеет описанную выше структуру правой части, которая обязана своим появлением Обэну [13]. Его оценка эффективна при больших σ, но в ней присутствует упоминавшееся слагаемое с L_2-нормой невязки, умноженной на $1/\sqrt{\sigma}$, в связи с чем точность оценки падает при $\sigma \to 0$ и при $\sigma = 0$ она теряет смысл. Попытки усовершенствовать мажоранту Обэна в лучшем случае приводили к мажорантам, определенным для всех $\sigma \geq 0$, но, тем не менее, при относительно небольших коэффициентах реакции не обеспечивающим порядок точности, гарантированный известными априорными оценками. Мажоранты, предлагаемые в данной работе, определены для всех $\sigma \geq 0$, при $\sigma \geq ch^{-2}$, $c = \mathrm{const}$, совпадают с мажорантой Обэна, при $0 \leq \sigma \leq ch^{-2}$ не теряют точность и являются согласованными с неулучшаемыми по порядку априорными оценками.

Востребованность апостериорных оценок погрешности вычислительной практикой зависит от простоты вычисления входящих в них постоянных. В связи с этим для погрешности решений метода конечных элементов в работе получены согласованные апостериорные оценки двух типов, отличающихся способами определения постоянных. В оценках одного из них постоянные зависят от свойств области и постоянных в оценках аппроксимации в $H^1(\Omega)$ функций из пространства $H^2(\Omega)$ конечно-элементными функциями. В оценках другого типа постоянные зависят только от локальных свойств аппроксимации в $L_2(\Omega)$ и устойчивости в $H^1(\Omega)$ проекционного оператора $H^1(\Omega) \to \mathbb{V}_h(\Omega)$, в качестве которого используется квазиинтерполяционный оператор [14]. Подчеркнем, что предлагаемые оценки являются гибкими в том смысле, что они остаются гарантированными апостериорными оценками и при грубых значениях постоянных.

Неулучшаемость по порядку точности полученных апостериорных оценок погрешности решений метода конечных элементов подтверждается в работе доказательством их согласованности с неулучшаемыми априорными оценками, а также оценкой, которую можно назвать почти обратной. Обратной является оценка апостериорной мажоранты погрешности энергетической нормой погрешности, под почти обратной понимается оценка, отличающаяся от обратной присутствием в правой части дополнительного малого члена.

Работа организована следующим образом. Раздел 1 является вводным. В нем формулируется краевая задача реакции-диффузии, кратко обсуждаются известные апостериорные оценки энергетической нормы погрешности, близкие по структуре рассматриваемым в данной работе, но не всегда согласованные. В разд. 2 предлагается новая апостериорная оценка погрешности приближения точного решения краевой задачи произвольной достаточно гладкой функцией v, удовлетворяющей главным краевым условиям. Ее можно рассматривать как усовершенствованную оценку работы [13], с которой она совпадает при σ, превосходящем некоторое критическое значение σ_*. Соответствующая мажоранта представлена в нескольких вариантах, с разными способами определения σ_*. Наиболее простой способ отвечает варианту, применимому к приближенным решениям v методом Галеркина с координатными функциями из пространства $H^2(\Omega)$. Этот вариант имеет непосредственное отношение к изогеометрическому анализу, (см. [15]), в котором применяются координатные функции повышенной гладкости. Мажоранты разд. 2 являются достаточно общими, в них не учитываются специальные свойства приближенных методов, кроме гладкости приближенных решений. Апостериорным оценкам погрешности решений МКЭ посвящены разд. 3 и 4. В первом из них доказываются две оценки, см. теоремы 5 и 6, различающиеся значениями двух основных постоянных. При этом постоянные оценки теоремы 6 определяются только аппроксимационными свойствами конечно-элементных функций. В случаях использования линейных треугольных и тетраэдральных конечных элеменов они выражаются через постоянные в оценках аппроксимации посредством квазиинтерполяционного проекционного оператора работы [14]. В разд. 4 обсуждаются свойства полученных апостериорных оценок. Устанавливается их согласованность с априорными оценками погрешности, для МКЭ первого порядка получена почти обратная оценка. Указываются некоторые возможные обобщения.

В дальнейшем $\|\phi\|_{H^k(\mathcal{G})}$ — норма в соболевском пространстве $H^k(\mathcal{G})$ на области $\mathcal{G}$

$$\|\phi\|^2_{H^k(\mathcal{G})} = \|\phi\|^2_{L_2(\mathcal{G})} + \sum_{l=1}^{k} |\phi|^2_{H^l(\mathcal{G})}, \quad |\phi|^2_{H^l(\mathcal{G})} = \sum_{|q|=l} \int_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial^l \phi}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_m^{q_m}} \right)^2 dx,$$

где $\|\phi\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = \int_{\mathcal{G}} \phi^2 dx$ и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $q_k \geq 0$, $|q| = q_1 + q_2 + \ldots + q_m$. Если $\mathcal{G} = \Omega$, для $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ и $|\cdot|_{H^k(\Omega)}$ будут использоваться также более простые обозначения $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_k$ и $|\cdot|_k$ соответственно. Если на всей границе $\partial\Omega$ или ее части Γ_D поставлено однородное краевое условие Дирихле, то для соответствующих подпространств функций из пространства $H^1(\Omega)$ используются обозначения $\mathring{H}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v_{\partial\Omega} = 0\}$ и $\mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v_{\Gamma_D} = 0\}$. Нам понадобятся также пространства $\mathring{H}^1(\Omega, \Delta) = \{v \in \mathring{H}^1(\Omega) : \Delta v \in L_2(\Omega)\}$, $\mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega, \Delta) = \{v \in \mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega) : \Delta v \in L_2(\Omega)\}$ и пространство $H^{-1}(\Omega)$, определение которого можно найти, например, в [4], [16], [17].

Под $\mathbb{V}_h(\Omega)$ имеется в виду подпространство $\mathring{\mathbb{V}}_h(\Omega) = \{v \in \mathbb{V}_h(\Omega) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

Везде ниже предполагается, что на $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, задан комплекс геометрически совместных, вообще говоря, криволинейных конечных элементов, занимающих области τ_r, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$. Конечные элементы определяются посредством неособенных достаточно гладких отображений $x = \mathcal{X}^{(r)}(\xi)$: $\tau_\Delta \to \tau_r$ базисного конечного элемента, заданного на стандартном треугольнике или тетраэдре τ_Δ. Пространство, натянутое на координатные функции базисного элемента, есть пространство $\mathcal{P}_p$ полиномов степени не выше $p \in \mathbb{N}^+$. При $p > 1$ для конечно-элементного пространства иногда используется также обозначение $\mathbb{V}_h(\Omega) = \mathbb{V}_{h,p}(\Omega)$. Если упоминания других условий нет, всегда предполагается, что отображения удовлетворяют обобщенным условиям квазиоднородности с параметром сетки $h > 0$. При этом h можно понимать как максимальный из диаметров конечных элементов. Условия квазиоднородности отображений (конечно-элементной сетки), как и обобщенные условия однородности формы, для МКЭ с криволинейными конечными элементами можно найти, например, в [18, разд. 3.2]. Вид постоянных апостериорных оценок существенно упрощается, если выполнено используемое нами в некоторых случаях условие:

$\mathcal{A}$) Ω — полигональная область $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, τ_r — совместные m-мерные симплексы (с плоскими гранями и соответственно прямолинейными ребрами, сторонами), образующие триангуляцию области Ω и удовлетворяющие условиям квазиоднородности.

В приложениях и далее, как правило, $\mathbb{V}_h(\Omega) \subset C(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. В то же время в изогеометрическом анализе применяются вычислительные схемы решения эллиптических уравнений 2-го порядка, основанные на более гладких конечномерных пространствах $\mathbb{V}_h(\Omega) = \mathbb{V}^1_h(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap \cap H^2(\Omega)$, см., например, [15]. Верхний индекс в обозначении $\mathbb{V}^l_{h,p}(\Omega)$ соответствует включению $\mathbb{V}^l_{h,p}(\Omega) \subset C^l(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)$.

1. МОДЕЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ПРИМЕРЫ МАЖОРАНТ

Одними из наиболее ранних являются апостериорные мажоранты погрешности работы Обэна [13]. Проиллюстрируем одну из них на модельной задаче

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}u \equiv -\operatorname{div}(\mathbf{A}\operatorname{grad} u) + \sigma u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega,\\ u|_{\Gamma_D} = \psi_D, \quad -\mathbf{A}\nabla u \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_N} = \psi_N,\end{gathered} \tag{1}$$

где Γ_D, Γ_N — непересекающиеся, для простоты односвязные, части границы $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\operatorname{mes}\Gamma_D > 0$, $\mathbf{v}$ — внутренняя нормаль к границе, $\mathbf{A}$ — симметричная $m \times m$ матрица, удовлетворяющая неравенствам

$$\mu_1 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \le \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \le \mu_2 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad 0 < \mu_1, \mu_2 = \text{const}, \tag{2}$$

при любых $x \in \Omega$ и $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$. Коэффициент реакции $\sigma \ge 0$ считаем постоянным и в некоторых случаях кусочно-постоянным $\sigma|_{\tau_r} = \sigma_r = \text{const}$, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$. Границу области Ω, коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ и правую часть f всегда предполагаем достаточно гладкими и, по крайней мере, $f \in L_2(\Omega)$, если требования к их гладкости не конкретизированы.

Прежде всего представляют интерес оценки погрешности в энергетической норме

$$|||w||| = \left(\|w\|^2_{\mathbf{A}} + \|\sqrt{\sigma}w\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}, \quad \|w\|^2_{\mathbf{A}} = \int_\Omega \nabla w \cdot \mathbf{A}\nabla w. \tag{3}$$

Для векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ введем также пространства $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L_2(\Omega))^m$, $\mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div}) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\text{: } \operatorname{div}\mathbf{y} \in L_2(\Omega)\right\}$ и норму $]\!]y[\![_{\mathbf{A}^{-1}} = \left(\int_\Omega \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\right)^{1/2}$.

Теорема 1 (Aubin, 1975). *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$, $0 < \sigma = \mathrm{const}$, $\psi_D \in H^1(\Omega)$, $\psi_N \in L_2(\Gamma_N)$, u *— решение краевой задачи* (1), $u \in H^1(\Omega)$, v *— любая функция из* $H^1(\Omega)$, *удовлетворяющая краевому условию на* Γ_D. *Тогда для любого* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$, *удовлетворяющего на* Γ_N *краевому условию* $\mathbf{z}\cdot\mathbf{v} = \psi_N$, *имеем*

$$|\!|\!| v - u |\!|\!|^2 \le\,]\!]\mathbf{A}\nabla v + \mathbf{z}[\![^2_{\mathbf{A}^{-1}} + \frac{1}{\sigma}\|f - \sigma v - \operatorname{div}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4}$$

Доказательство. Оценка (4) — частный случай результатов [13], см., например, Теорему 22 Введения и Теоремы 1.2, 1.4, 1.6 гл. 10.

Очевидно, при $\sigma \to 0$ оценка (4) Обэна теряет точность и при $\sigma = 0$ утрачивает смысл. При $\sigma = 0$ можно использовать мажоранту Репина и Фролова [19]. Пусть для простоты $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\psi_D \equiv 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, и $\sigma \equiv 0$. Тогда

$$\|\nabla(v-u)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le (1+\epsilon)\|\nabla v + \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c_\Omega\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\|\nabla\cdot\mathbf{z} - f\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\epsilon > 0, \tag{5}$$

где v и $\mathbf{z}$ — произвольные фукция и вектор-функция из $\mathring{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$ соответственно, а c_Ω — постоянная из неравенства Фридрихса.

Апостериорную оценку $|\!|\!| v - u |\!|\!| \le \|\mathbf{A}\nabla u_{\mathrm{fem}} + \boldsymbol{\tau}\|^2_{\mathbf{A}^{-1}}$, которая содержит вектор-функцию потока τ, удовлетворяющую уравнению баланса

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_2}{\partial x_2} = f - \sigma u, \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v} = \psi_N, \tag{6}$$

можно найти у Михлина [20]. При $\sigma = 0$ существуют простые способы построения вектор-функций $\boldsymbol{\tau}$ и коррекции произвольных вектор-функций $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$ до вектор-функций $\boldsymbol{\tau}$, удовлетворяющих уравнению баланса. Ряд таких способов был предложен в работах [21], [22], где рассмотрены также приемы коррекции вектор-фунций конечно-элементных потоков $-\nabla u_{\mathrm{fem}} = \mathbf{z}_{\mathrm{fem}}$ до $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{z}_{\mathrm{fem}})$ для решений $v = u_{\mathrm{fem}}$ МКЭ, как и для приближенных решений другими методами. Они позволяют, кроме того, получить апостериорные оценки погрешности со свободной вектор-функцией $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$ в правой части. Ограничимся, как и выше, однородной задачей Дирихле для уравнения Пуассона, предположив дополнительно, что область выпуклая, и пусть T_k — проекции области Ω на оси x_{3-k}, а уравнения левой и нижней частей границы имеют вид $x_k = a_k(x_{3-k})$, $x_{3-k} \in T_k$. Если β_k — произвольные ограниченные функции, для которых $\beta_1 + \beta_2 \equiv 1$, то согласно [21], [22]

$$\|\nabla(v-u)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \|\nabla v + \mathbf{z}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{k=1,2}\left\|\int\limits_{a_k(x_{3-k})}^{x_k}\beta_k\,(f - \nabla\cdot\mathbf{z})(\eta_k, x_{3-k})\,d\eta_k\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{7}$$

То, что в (7) справа под знаком норм стоит не невязка, а интегралы от нее, может повысить точность мажоранты. Кроме того, имеется дополнительная свободная функция, β_1 или β_2, ее правильный выбор (например, с использованием найденного приближенного решения v) тоже может способствовать минимизации правой части по $\mathbf{z}$. Оценивая одномерные интегралы под знаком L_2-нормы, приходим к оценке (5) с несколько превосходящей c_Ω постоянной.

Рядом авторов предпринимались попытки модифицировать мажоранту (4) с целью обеспечения приемлемой точности при всех $\sigma \ge 0$ (см., например, [23], [24]). Мажоранта [24] для $\forall\sigma = \mathrm{const} \ge 0$ имеет вид

$$|\!|\!| v - u |\!|\!|^2 \le (1+\epsilon)\,]\!]\mathbf{A}\nabla v + \mathbf{z}[\![^2_{\mathbf{A}^{-1}} + \frac{1}{\sigma + \dfrac{\varepsilon}{c_\Omega(1+\epsilon)}}\|f - \sigma v - \operatorname{div}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

В эффективной для МКЭ апостериорной оценке работы [8] применяются сбалансированные тестирующие потоки, вычисляемые посредством предложенного в ней алгоритма линейной сложности. Для записи ее понадобятся обозначения: h_r – диаметр области τ_r, Π_r^p: $L_2(\tau_r) \to \mathcal{P}_p(\tau_r)$ – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\tau_r)$, $\|\cdot\|_{\tau_r,\mathbf{A}^{-1}}$ – норма $\|\cdot\|_{\mathbf{A}^{-1}}$ для области $\Omega = \tau_r$.

Ниже, в Теоремах 2 и 3, для простоты считаем $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\psi_D \equiv 0$ и условие $\mathcal{A}$) выполненным.

Теорема 2 (Ainsworth and Vejchodsky, 2015). *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *– слабое решение задачи,* $u_{\text{fem}} \in \overset{\circ}{\mathbb{V}}(\Omega)$ *– решение МКЭ. Тогда существует* $\mathbf{z} \in \mathbf{V}(\Omega) \subset [\mathbb{V}_{h,2}(\Omega)]^m$ *со следующими свойствами:*

i) $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \text{div})$ *вычисляется посредством локальных процедур, имеет линейную вычислительную сложность*,

ii) *для всех* $x \in \tau_r$ *и* $r \in \mathcal{R}_* = \left\{r : \sqrt{\sigma}h_r < 1\right\}$ *удовлетворяет уравнениям*

$$\Pi_r^1 f - \sigma_r u_{\text{fem}} + \operatorname{div}\mathbf{z} = 0, \tag{9}$$

iii) *для индикатора* $\eta_{\tau_r}(\mathbf{z})$ *ошибки* $e_{\text{fem}} = u - u_{\text{fem}}$, *определяемого выражениями*

$$\begin{gathered}\eta_{\tau_r}^2(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \nabla u_{\text{fem}}\|_{L_2(\tau_r)}^2 \qquad \forall r \in \mathcal{R}_*,\\ \eta_{\tau_r}^2(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \nabla u_{\text{fem}}\|_{L_2(\tau_r)}^2 + \frac{1}{\sigma_r}\left\|\Pi_r^1 f - \sigma_r u_{\text{fem}} + \operatorname{div}\mathbf{z}\right\|_{L_2(\tau_r)}^2 \qquad \forall r \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{R}_*,\end{gathered} \tag{10}$$

справедливы оценки

$$|||e_{\text{fem}}|||^2 \le \sum_{\tau_r \in \mathcal{T}_h}\left[\eta_{\tau_r}(\mathbf{z}) + \operatorname{osc}_{\tau_r}(f)\right]^2, \tag{11}$$

$$\eta_\Omega^2(\mathbf{z}) = \sum_{r\in\mathcal{R}}\eta_{\tau_r}^2(\mathbf{z}) \le \mathbb{C}\left[|||e_{\text{fem}}|||^2 + \sum_{r\in\mathcal{R}}\operatorname{osc}_{\tau_r}^2(f)\right], \tag{12}$$

где $\operatorname{osc}_{\tau_r}(f) = \min\left\{\frac{h_r}{\pi}, \frac{1}{r}\right\}\left\|f - \Pi_r^1 f\right\|_{L_2(\tau_r)}$.

Доказательство. Теорема – один из результатов Эйнсворта и Вейходского, см. [8], [9]. Заметим, что в этих работах оценки (11), (12) получены при несколько более общих условиях. В частности, $\Gamma_N \neq \emptyset$, а оценка (12) дана также в локальном варианте.

Приведем еще одну мажоранту, полученную Чеддади и др. в [6] для приближенных решений задачи реакции-диффузии методом центрированных конечных объемов. В ней условие (9) поточечного удовлетворения уравнениям равновесия заменено более слабым. Введем обозначения: $\mathcal{D}_h$ – двойственное по отношению к $\mathcal{T}_h$ подразделение области Ω; $\mathcal{S}_h$ – мелкая симплициальная сетка, индуцированная разбиением $\mathcal{D}_h$; D – многогранник с центром в вершине триангуляции $\mathcal{T}_h$ и содержащий все симплексы мелкой сетки с этой вершиной, h_D – его диаметр; $\mathcal{D}_h^{\text{int}}$ – множество, включающее все многранники D, для которых $\partial D \cap \partial\Omega = \emptyset$. За дополнительной информацией относительно этих обозначений отсылаем к [6].

Теорема 3 (Cheddadi et al., 2011). *Пусть* u_h *– решение методом центрированных конечных объемов,* $e_h = u - u_h$, *вектор-функция* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \text{div})$ *удовлетворяет уравнениям*

$$(f - \nabla\mathbf{z} - \sigma u_h, 1)_{\mathcal{D}} = 0 \qquad \forall\mathcal{D} \in \mathcal{D}_h^{\text{int}}, \tag{13}$$

и $\theta_D = \min(C_D h_D^2, \sigma_D^{-1})$, *где* C_D *– постоянная из неравенства Пуанкаре для многогранника* $\mathcal{D}$. *Тогда*

$$|||e_h|||^2 \le \eta_\Omega^2(\mathbf{z}) = \sum_{D\in\mathcal{D}_h}\left[\|\nabla u_h + \mathbf{z}\|_{L_2(D)} + \sqrt{\theta_D}\,\|f - \sigma u_h - \nabla\cdot\mathbf{z}\|_{L_2(D)}\right]^2. \tag{14}$$

Доказательство. См. [6].

Мажоранты (5)–(8) имеют известные достоинства, но при применении к решениям МКЭ и других сеточных методов не являются согласованными. Воспользуемся (5), наиболее простой и универсальной из них, для решения МКЭ $v = u_{\text{fem}}$ задачи (1) при $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\psi_D \equiv 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, и $\sigma = 0$. Для установления несогласованности достаточно рассмотреть решения МКЭ повышенной гладкости, например, принадлежащие пространству $\mathbb{V}_h(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Допустим, $u \in H^l(\Omega)$, тогда для $k = 0, 1, 2$ справедливы априорные оценки

$$\|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq ch^{l-k} \|u\|_{H^l(\Omega)}, \quad k \leq l \leq p + 1. \tag{15}$$

В частности, если $f \in L_2(\Omega)$ и, следовательно, $u \in H^2(\Omega)$, см. ниже (39), то согласно (15) левая часть (5) оценивается сверху как $\mathbb{O}(h^2)$. В то же время при выборе $\mathbf{z} = \nabla v$ первое слагаемое правой части обращается в ноль, но слагаемое $c_\Omega\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\|\nabla \cdot \mathbf{z} - f\|^2_{L_2(\Omega)}$ $\forall \epsilon > 0$, оценивается сверху только постоянной. Оценки (15) *неулучшаемы по порядку* на пространстве $u \in H^2(\Omega)$. Для двумерных областей $\Omega \in \mathbb{R}^2$ это подтверждено, например, оценками работы [25] соответствующих поперечников Колмогорова. Отсюда следует существование функций $f \in L_2(\Omega)$, для которых $u \in H^2(\Omega)$, а второе слагаемое правой части (5) оценивается *снизу* постоянной. То есть порядки малости левой и правой частей апостериорной оценки различны и величина $\mathbb{O}(h^2)$, стоящая слева, оценивается мажорантой с порядком единицы. Если $l > 2$, то левая и правая части оцениваются с несогласованными порядками $\mathbb{O}(h^{2(l-k)})$ и $\mathbb{O}(h^{2(l-k-1)})$ соответственно. Несогласованность апостериорной мажоранты (8) при $\sigma \leq ch^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2$, $c = \text{const}$, с априорными оценками устанавливается так же. Мажоранта (7) в общем случае также является несогласованной.

Несогласованность, очевидно, сохраняется, если применяются конечные элементы класса C, а тестовый поток находится посредством какой-либо процедуры восстановления потока, удовлетворяющей только требованиям α), γ).

Оценки (11), (14) можно назвать условно согласованными. Они доказаны только в случае выполнения для тестовых вектор-функций $\mathbf{z}$ уравнений (9), (13), отвечающих требованию β). Процедуры восстановления таких потоков $\mathbf{z}$ не всегда относятся к простым и не являются универсальными, так как для других задач (например, с другими коэффициентами в старших членах уравнения) и других схем МКЭ, например, более высоких порядков точности, их надо конструировать заново.

2. СОГЛАСОВАННАЯ АПОСТЕРИОРНАЯ МАЖОРАНТА ПОГРЕШНОСТИ

Ниже будет получена гарантированная, надежная (см. определения терминов в [8]) робастная апостериорная оценка погрешности, вычисляемая и сохраняющая точность при $\forall\sigma \in [0, \infty)$. Более того, будет показано, что при $\sigma \in [0, \sigma_*]$ она является согласованной для приближенных решений задач с достаточно гладкими данными, получаемых с помощью квазиоднородных МКЭ, где σ_* есть некоторое критическое значение коэффициента реакции. Для точного решения u краевой задачи (1) и любого приближения v из $\mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ определим σ_* посредством неравенства

$$\frac{\|u - v\|^2_{\mathbf{A}}}{\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)}} \geq \sigma_* > 0. \tag{16}$$

Если $v = u_G$ есть решение методом Галеркина из подпространства $\mathcal{V}(\Omega) \subset \mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega, \Delta)$, то условие (16) может быть ослаблено:

$$\frac{\|u - v\|^2_{\mathbf{A}}}{\|u - Qu\|^2_{L_2(\Omega)}} \geq \sigma_* > 0, \tag{17}$$

где Q — оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на $\mathcal{V}(\Omega)$, т.е. такой, что для любой $\phi \in L_2(\Omega)$ имеем

$$(Q\phi, \psi)_\Omega = (\phi, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Значение σ_* может определяться неравенством (17) и при v из произвольного подпространства $\mathcal{V}(\Omega) \subset \mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, но возникают дополнительные требования к тестирующему потоку $\mathbf{z}$. Например, достаточно, чтобы он удовлетворял равенствам (33).

Положим $\hat{f}(x) = \prod_r^1 f$ при $x \in \tau_r$, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$. В теореме, формулируемой ниже, области τ_r можно считать произвольными выпуклыми липшицевыми подобластями декомпозиции области

$$\Omega = \text{interior}\left\{\bigcup_1^{\mathcal{R}} \overline{\tau}_r\right\}, \quad \tau_r \cup \tau_{r'} = \varnothing, \quad r \neq r', \quad \text{diam}[\tau_r] = h_r,$$

для которых выполняются неравенства Пуанкаре, см. [26],

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|\phi - c\|_{L_2(\tau_r)} \leq \frac{h_r}{\pi} |\phi|_{H^1(\tau_r)}, \quad \phi \in H^1(\tau_r).$$

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma_D = \partial\Omega$, *выполнены условия теоремы* 1 *и* σ_* *удовлетворяет неравенству* (16). *Тогда*

$$|\!|\!|v - u|\!|\!|^2 \leq \Theta \mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, f, v, \mathbf{z}), \tag{18}$$

где

$$\mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, f, v, \mathbf{z}) = \Big[ ]\!]\mathbf{A}\nabla v + \mathbf{z}[\![^2_{\mathbf{A}^{-1}} + \theta \|f - \sigma v - \text{div}\,\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)} \Big], \tag{19}$$

и

$$\Theta = \begin{cases} 2/(1 + \kappa) & \forall \sigma \in [0, \sigma_*] \\ 1 & \forall \sigma > \sigma_* \end{cases}, \quad \theta = \begin{cases} 1/\sigma_* & \forall \sigma \in [0, \sigma_*] \\ 1/\sigma & \forall \sigma > \sigma_* \end{cases} \tag{20}$$

при $\kappa = \sigma/\sigma_*$. *Также для* $\sigma \in [0, \sigma_*]$ *и* $\sigma \geq \sigma_*$, *соответственно, справедливы оценки*

$$|\!|\!|v - u|\!|\!|^2 \leq \Theta_1 \mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, \hat{f}, v, \mathbf{z}) + \sum_r \frac{h_r^2}{\varepsilon\pi^2} \int_{\tau_r} \left(f - \prod_r^1 f \right)^2 dx \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{21}$$

$$|\!|\!|v - u|\!|\!|^2 \leq \Theta_2 \mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, \hat{f}, v, \mathbf{z}) + \sum_r \frac{1}{\sigma} \int_{\tau_r} \left(f - \prod_r^1 f \right)^2 dx, \tag{22}$$

в которых

$$\Theta_1 = \begin{cases} (2 + \varepsilon)/(1 + \kappa), & 0 \leq \sigma \leq \sigma_*/(1 + \varepsilon), \\ 1 + \varepsilon, & \sigma_*/(1 + \varepsilon) \leq \sigma \leq \sigma_*, \end{cases}$$

и

$$\Theta_2 = 1 + \frac{1}{1 + \kappa^{-1}}.$$

Если $v = u_G$ — *решение метода Галеркина из подпространства* $\mathcal{V}(\Omega) \subset \mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega, \Delta)$, *то оценка* (18)–(20) *справедлива при* σ_*, *удовлетворяющем неравенству* (17) *и* $\mathbf{z} = \mathbf{z}_G := -\mathbf{A}\nabla u_G$, *то есть*

$$\begin{gathered} |\!|\!|u_G - u|\!|\!|^2 \leq \Theta \mathcal{M}_G(\sigma, \sigma_*, f, u_G, \mathbf{z}_G), \\ \mathcal{M}_G(\sigma, \sigma_*, f, u_G, \mathbf{z}_G) = \theta \|f - \sigma u_G - \text{div}\,\mathbf{z}_G\|^2_{L_2(\Omega)}. \end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство. Очевидно, при $\sigma \geq \sigma_*$ мажоранта (18)–(20) совпадает с мажорантой (4), в то время как для $\sigma \in [0, \sigma_*]$ мажоранты (18)–(20) и (4) существенно различны. Поэтому нужно рассмотреть только случай $\sigma < \sigma_*$.

Чтобы не загромождать доказательство второстепенными деталями, считаем $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ и $\psi_D \equiv 0$. Для решения задачи u, произвольных функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и вектор-функции $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \mathrm{div})$ имеем

$$\begin{gathered}|||v - u|||^2 = \int_\Omega [\nabla(v - u)\cdot\nabla(v - u) + \sigma(v - u)(v - u)] = \\ = \int_\Omega [(\nabla v + \mathbf{z})\cdot\nabla(v - u) - (\mathbf{z} + \nabla u)\cdot\nabla(v - u) + \sigma(v - u)(v - u)].\end{gathered}\tag{24}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое правой части и применяя неравенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \left(a_1^2 + \frac{1}{\sigma_*}a_2^2\right)^{1/2}\left(b_1^2 + \sigma_* b_2^2\right)^{1/2},\tag{25}$$

найдем, что

$$\begin{gathered}|||v - u|||^2 = \|\nabla(u - v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sigma\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left[\|\nabla v - \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_*}\|f - \sigma v - \operatorname{div}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}\times \\ \times\left[\|\nabla(u - v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sigma_*\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}.\end{gathered}\tag{26}$$

Неравенство (16) при любом $\beta \in (0,1]$ позволяет преобразовать второй множитель в правой части (26) к виду

$$\begin{gathered}\|\nabla(u - v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sigma_*\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)} = |||u - v|||^2 + (\sigma_* - \sigma)\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)} \le \\ \le |||u - v|||^2 + (\sigma_* - \sigma)\left[\frac{\beta}{\sigma_*}\|\nabla(u - v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (1 - \beta)\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)}\right] = \\ = \left[1 + (\sigma_* - \sigma)\frac{\beta}{\sigma_*}\right]\|\nabla(u - v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + [(1 - \beta)(\sigma_* - \sigma) + \sigma]\|u - v\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{gathered}\tag{27}$$

Выбор $\beta = 1/(1 + \kappa)$ делает отношение множителей перед второй и первой нормой в правой части (27) равным σ. Подстановка такого β в (27) и затем (27) в (26) приводит к неравенству

$$|||v - u|||^2 \le \frac{2}{1 + \kappa}\left[\|\nabla v - \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_*}\|f - \sigma v - \operatorname{div}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}|||v - u|||,\tag{28}$$

эквивалентному (18) при $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Для доказательства оценки (21) преобразуем (24) к виду

$$\begin{gathered}|||v - u|||^2 = \int_\Omega [\nabla(v - u)\cdot\nabla(v - u) + \sigma(v - u)(v - u)]dx = \\ = \int_\Omega \{(\nabla v + \mathbf{z})\cdot\nabla(v - u) + [\nabla\cdot\mathbf{z} + \Delta u + \sigma(v - u)](v - u)\}dx = \\ = \int_\Omega \{(\nabla v + \mathbf{z})\cdot\nabla(v - u) + [\nabla\cdot\mathbf{z} - \hat f + \sigma v](v - u) + (\hat f - f)(v - u)\}dx.\end{gathered}\tag{29}$$

Интеграл от последнего слагаемого в правой части (29) разобьем на интегралы по τ_r, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$, и каждый из них оценим с помощью неравенства Пуанкаре:

$$\begin{gathered}\int_{\tau_r}(\hat f - f)(v - u)dx = \int_{\tau_r}(\hat f - f)(v - u - c)dx \le \\ \le \|\hat f - f\|_{L_2(\tau_r)}\inf_{c\in\mathbb{R}}\|v - u - c\|_{L_2(\tau_r)} \le \frac{d_r}{\varepsilon\pi}\|\hat f - f\|_{L_2(\tau_r)}\left(\varepsilon|v - u|_{H^1(\tau_r)}\right).\end{gathered}\tag{30}$$

Чтобы получить (21), достаточно теперь подставить (30) в (29), применить к правой части неравенство Коши-Буняковского и при оценке правой части воспользоваться неравенством (27), выбрав β из условия $\sigma\left[1 + \varepsilon + (\sigma_* - \sigma)\dfrac{\beta}{\sigma_*}\right] = (1 - \beta)(\sigma_* - \sigma) + \sigma$.

Если принять

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\kappa^{-1}}\right),$$

неравенство (22) следует из оценок

$$\begin{gathered} |||v-u|||^2 \le \left[\|\nabla v - \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma}\|\hat{f} - \sigma v - \operatorname{div}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma}\|\hat{f} - f\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2} \times \\ \times\left[\|\nabla(u-v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\sigma\|u-v\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}, \\ \|u-v\|^2_{L_2(\Omega)} \le \beta\|u-v\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-\beta)\frac{1}{\sigma_*}\|\nabla(u-v)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \end{gathered} \tag{31}$$

вторая из которых есть следствие неравенства (16).

Перейдем к доказательству оценки (23). Для $e = v - u$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$ имеем

$$|||e|||^2 = \int_\Omega \{(\nabla v + \mathbf{z})\cdot\nabla e + [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}]e\}dx. \tag{32}$$

Предположим, $\mathbf{z}$ удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega (f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z})\psi dx = 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{V}(\Omega), \tag{33}$$

на конечно-элементном пространстве $\mathcal{V}(\Omega)$. Если $v \in \mathcal{V}(\Omega)$, то для фукции $e_\circ = (Qu - u)$ имеем

$$e - Qe = v - u - Qv + Qu = Qu - u = e_\circ$$

и

$$\begin{gathered} \int_\Omega [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}]edx = \beta\int_\Omega [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}](e - Qe)dx + (1-\beta)\times \\ \times\int_\Omega [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}]edx = \beta\int_\Omega [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}]e_\circ dx + (1-\beta)\int_\Omega [f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}]edx. \end{gathered} \tag{34}$$

Подставив (34) в (32), применив неравенство Коши и неравество (17), получим

$$|||e|||^2 \le= \left\{\|\nabla v + \mathbf{z})\|^2 + \left[\frac{\beta}{\sigma_*} + \frac{1-\beta}{\sigma}\right]\|f - \sigma v - \nabla\cdot\mathbf{z}\|^2\right\}^{1/2}\left\{(1+\beta)\|e\|_0^2 + (1-\beta)\sigma\|e\|_0^2\right\}^{1/2}. \tag{35}$$

Выбор $\beta = (1-\kappa)/(1+\kappa)$ приводит к оценке, совпадающей по виду с (18)–(20), но при σ_*, удовлетворяющим неравенству (17). Заметим теперь, что при $\mathcal{V}(\Omega) \subset \mathring{H}^1_{\Gamma_D}(\Omega, \Delta)$ тождество (33) имеет место. Кроме того, при $\mathbf{z} = -\mathbf{A}\nabla u_G$ норма $]\!]\mathbf{A}\nabla v + \mathbf{z}[\![_{\mathbf{A}^{-1}}$ равна нулю, что доказывает оценку (23).

Замечание 1. Есть другие способы получения мажорант (18)–(20) и мажоранты (21), (22). Для простоты положим $\mathbf{A} \equiv \mathbf{I}$ и $\Gamma_D = \partial\Omega$. Можно рассмотреть вспомогательную задачу

$$-\Delta u + \Bbbk u = f_{\lambda,\sigma}, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{36}$$

с произвольным $\Bbbk \ge \sigma_*$ и $f_{\lambda,\sigma} = f + (\Bbbk - \sigma)u$, решение которой совпадает с решением задачи (1) при указанных $\mathbf{A}$ и Γ_D. Воспользуемся мажорантой Обэна для аппроксимаций решения задачи (36), в качестве которых можно взять аппроксимации v решений задачи (1). После подстановки в оценку Обэна правой части $f_{\lambda,\sigma} = f + (\Bbbk - \sigma)u$, воспользовавшись неравенством Коши с ε, неравенством (16) и выполнив несложные манипуляции, получим вспомогательную мажоранту. Минимизируя ее по $\mathbb{K}$ и параметрам типа β и ε, придем к мажорантам теоремы 2, но с несколько отличающимися значениями Θ и θ. Изменяя выбор β, ε, можно управлять весами перед первой и второй нормами в правой части.

3. МАЖОРАНТЫ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для конкретных классов приближенных решений и, в частности, для решений МКЭ критические значения σ_* коэффициента реакции в полученных мажорантах погрешности могут быть уточнены.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\sigma \equiv \text{const}$, $\psi_D \equiv 0$, $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, *конечно-элементный комплекс порождает пространство* $\mathbb{V}_{h,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, *и* $e_{\text{fem}} = u_{\text{fem}} - u$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|e_{\text{fem}}\|_0 \leq c_\dagger h \|e_{\text{fem}}\|_{\mathbf{A}}, \quad c_\dagger = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1} c_\circ c_{\text{ap}}, \tag{37}$$

с постоянными c_o, c_{ap}, *определенными ниже, см.* (39), (46).

Доказательство. Рассмотрим задачу нахождения решения $\chi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегрального тождества

$$a_\Omega(\chi, v) + (\chi, v)_\Omega = (F, v)_\Omega \quad \forall v \in \mathring{H}^1(\Omega), \tag{38}$$

в котором $a_\Omega(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \mathbf{A} \nabla w dx$. Если область Ω достаточно гладкая и $\sigma \geq 0$, то

$$\|\chi\|_2 \leq c_\text{o} \|F\|_0, \quad c_\text{o} = c_\text{o}(\Omega) = \text{const}, \tag{39}$$

при любой $F \in L_2(\Omega)$. Действительно, для $\sigma \leq 1$ неравенство выполняется [27]. В случае $\sigma \geq 1$, очевидно,

$$\|\chi\|_0 \leq \sigma^{-1} \|F\|_0, \tag{40}$$

и, применив (39) для задачи

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A} \operatorname{grad} \chi) = F_\sigma, \quad F_\sigma = F - \sigma\chi, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0, \tag{41}$$

найдем

$$\|\chi\|_2 \leq c_\text{o} \|F_\sigma\|_0 \leq c_\text{o} \left(\|F\|_0 + \sigma \|\chi\|_0\right) \leq 2c_\text{o} \|F\|_0. \tag{42}$$

Осталось только переобозначить постоянную в (39).

Введем обозначения u_o, u_1 и u_s для функций, минимизирующих $\|u - \phi\|_0^2$, $\|u - \phi\|_{\mathbf{A}}^2$, и $h^{-2} \|u - \phi\|_{0,\Omega}^2 + \|u - \phi\|_{\mathbf{A}}^2$ соответственно среди всех $\phi \in \mathring{\mathbb{V}}_h(\Omega)$ и обозначения для соответствующих погрешностей $e_\text{o} = u_\text{o} - u$, $u_{\text{fe}} = u_{\text{fe}} - u$ и $e_s = u_s - u$. Так как u_{fem} минимизирует $|||u - \phi|||^2$, $\phi \in \mathring{\mathbb{V}}_h(\Omega)$, то

$$\|e_{\text{fem}}\|_{\mathbf{A}}^2 + \sigma \|e_{\text{fem}}\|_0^2 \leq \|u - \tilde{u}\|_{\mathbf{A}}^2 + \sigma \|u - \tilde{u}\|_0^2, \tag{43}$$

где $\tilde{u}$ может быть любой из функций $\tilde{u} = u_\text{o}, u_{\text{fe}}, u_s$. Если принять во внимание неравенства $\|e_{\text{fem}}\|_0 \geq \|e_\text{o}\|_0$ и $\|e_{\text{fem}}\|_{\mathbf{A}} \geq \|e_{\text{fe}}\|_{\mathbf{A}}$, вытекающие из определения функций u_o и u_{fe}, то из (43) следует

$$\|e_{\text{fem}}\|_0 \leq \|e_{\text{fe}}\|_0, \quad \|e_{\text{fem}}\|_{\mathbf{A}} \leq \|e_\text{o}\|_{\mathbf{A}}. \tag{44}$$

Пусть $\phi \in \mathring{H}_1(\Omega)$ – решение краевой задачи

$$a_\Omega(v, \phi) = (v, e_{\text{fe}})_\Omega \quad \forall v \in \mathring{H}_1(\Omega). \tag{45}$$

Очевидно, $e_{\text{fe}} \in L_2(\Omega)$ и, как следствие (39), и симметричности билинейной формы $a_\Omega(\cdot,\cdot)$, имеем $\phi \in H^2(\Omega)$ и

$$\|\phi\|_2 \leq c_\text{o} \|e_{\text{fe}}\|_0.$$

Аппроксимируем ϕ какой-либо функцией $\phi_{\text{ap}} \in \mathring{\mathbb{V}}_{h,p}(\Omega)$. Можно использовать функцию $\phi_{\text{ap}} \in \mathring{\mathbb{V}}_{h,1}(\Omega) \subset \mathring{\mathbb{V}}_{h,p}(\Omega)$, которую в случае выполнения условия $\mathscr{A}$) получаем посредством квазиинтерполяционного оператора Скотта-Жанга [14]. В общем случае можно также понимать ϕ_{ap} как решение МКЭ, или L_2-проекцию или интерполяцию из $\mathring{\mathbb{V}}_{h,1}(\Omega)$ или $\mathring{\mathbb{V}}_{h,p}(\Omega)$. Заметим, что так как в лемме используется только значение постоянной c_{ap} в оценке

$$|\phi - \phi_{\text{ap}}|_1^2 \leq c_{\text{ap}}^2 h^2 \|\phi\|_2^2 \leq c_\text{o}^2 c_{\text{ap}}^2 h^2 \|e_{\text{fe}}\|_0^2, \tag{46}$$

а не сама функция ϕ_{ap}, то под ϕ_{ap} можно иметь в виду ту из перечисленных аппроксимаций, которая позволяет найти лучшее значение постоянной.

Оценивая $\|e_{\rm fe}\|_0$ посредством приема Обэна-Нитше [13] для задачи (45) и оценки (46), получаем

$$\begin{gathered}\|e_{\rm fe}\|_0^2 = \frac{1}{\mu_1} a_\Omega(e_{\rm fe}, \phi) \le \frac{1}{\mu_1} \inf_{w\in\, \mathring{\mathbb{V}}_h(\Omega)} |a_\Omega(e_{\rm fe}, \phi - w)| \le \\ \le \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1}\|e_{\rm fe}\|_{\mathbf{A}} \inf_{w\in\, \mathring{\mathbb{V}}_h(\Omega)} |\phi - w|_1 \le \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1}\|e_{\rm fe}\|_{\mathbf{A}} |\phi - \phi_{\rm ap}|_2 \le \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1} c_{\rm o} c_{\rm ap} h \|e_{\rm fe}\|_{\mathbf{A}} \|e_{\rm fe}\|_0,\end{gathered} \tag{47}$$

что вместе с первым неравенством (44) и определениями функций $e_{\rm fe}$, $e_{\rm fem}$ приводит к оценке (37).

Теорема 5. *Пусть* $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\psi_D \equiv 0$, $0 \le \sigma \le \sigma_* = 1/(c_\dagger h)^2$, *где* $c_\dagger = \dfrac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1} c_{\rm o} c_{\rm ap}$, *и* $u \in \mathring{H}_1(\Omega, \Delta)$. *Пусть также конечно-элементный комплекс порождает пространство* $\mathring{\mathbb{V}}^0_{h,p}(\Omega) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$, $p \ge 1$, *и* $u_{\rm fem}$ *— решение метода конечных элементов. Тогда для любого* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, {\rm div})$

$$\begin{gathered}|\!|\!| e_{\rm fem} |\!|\!|^2 \le \frac{2}{1 + c_\dagger^2 h^2 \sigma} \mathcal{M}^{(1)}_{\rm fem}(\sigma, f, \mathbf{z}), \\ \mathcal{M}^{(1)}_{\rm fem}(\sigma, f, \mathbf{z}) = \Big[ ]\!]\mathbf{A}\nabla u_{\rm fem} + \mathbf{z}[\![^2_{\mathbf{A}^{-1}} + c_\dagger^2 h^2 \|f - \sigma u_{\rm fem} - {\rm div}\,\mathbf{z}\|^2_{L_2(\Omega)} \Big].\end{gathered} \tag{48}$$

Если конечно-элементный комплекс удовлетворяет условию $\mathcal{A}$), *то при* $\sigma \le \sigma_*/(1 + \varepsilon)$ *справедлива также оценка*

$$|\!|\!| e_{\rm fem} |\!|\!|^2 \le \frac{2 + \varepsilon}{1 + c_\dagger^2 h^2 \sigma} \mathcal{M}^{(1)}_{\rm fem}(\sigma, \hat{f}, \mathbf{z}) + \sum_r \frac{h_r^2}{\varepsilon\pi^2} \int_{\tau_r} \Big(f - \prod_r^1 f \Big)^2 dx \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{49}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{M}^{(1)}_{\rm fem}(\sigma, f, \mathbf{z}) = \mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, f, v, \mathbf{z})$, теорема есть прямое сдедствие теоремы 4 и леммы 1.

Отметим, что оценки (48), (49), как и более общие оценки теоремы 4, удобны для практического использования, в частности, потому что они остаются гарантированными апостериорными оценками при грубых оценках величины σ_*. Оценки (18)–(20) и (21) справедливы при любом $\sigma \in [1/c_\Omega, 1/(c_\dagger h)^2]$, где c_Ω — постоянная в неравенстве Фридрихса $\|\phi\|_0^2 \le c_\Omega |\phi|_1^2$ $\forall \phi \in \mathring{H}^1(\Omega)$. При наихудших значениях $\Theta = 2$ и $\theta = c_\Omega$, соответствующих $\sigma = 0$ и $\sigma_* = 1/c_\Omega$, оценка (18)–(20) совпадает с (5) при $\epsilon = 1$. При $\sigma > 0$ и более точном выборе σ_* коэффициенты Θ и θ улучшаются, а в условиях теоремы 5 оценки (18)–(20) и (21) превращаются в (48) и (49).

Сравнение с (11), (12) и (14) затрудняется тем, что тестирующий поток $\mathbf{z}$ в (11), (12) фиксирован, а в (14) удовлетворяет условиям (13). Предположим для простоты, что в (11)–(12) $\sigma = {\rm const}$. Аналогичный Θ коэффициент в (11) равен 2, а коэффициент θ равен нулю. Однако оценка (11), (12) получена только для решения МКЭ $u_{\rm fem} \in \mathring{\mathbb{V}}^0_{h,1}(\Omega)$ и построенного по нему фиксированного потока $\mathbf{z}$. Для таких $u_{\rm fem}$ и $\mathbf{z}$ соответствующее слагаемое в (21) тоже обращается в ноль. В то же время $\mathbf{z}$ — свободная вектор-функция в оценках Теорем 4 и 5, что дает возможность дополнительной минимизации правой части по $\mathbf{z}$.

Использованный в лемме способ нахождения постоянной $c_\dagger$ является достаточно общим и практически без изменений переносится на аналогичные апостериорные оценки погрешности решений МКЭ для эллиптических уравнений порядка $2n$, $n \ge 1$, см. Корнеев [12]. При этом наиболее сложной является оценка постоянной $c_{\rm o}$. Однако во многих ситуациях такая оценка известна. Например, если Ω — выпуклая область, то $|v|_2 \le \|\Delta v\|_0$ (см. [17], (6.5) гл. II), и, следовательно, при $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ и $\sigma \equiv 0$ имеем $c_{\rm o} \le 1$, а в общем случае $\sigma \ge 0$ на основании (42) заключаем, что $c_{\rm o} \le 2$. Необходимость нахождения постоянной $c_{\rm o}$ накладывает известные условия на гладкость границы и коэффицентов задачи. В то же время, если имеется квазиинтерполяционный оператор для получения аппроксимаций функций из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющий определенным требованиям, то можно убедиться в том, что постоянные в апостериорных оценках погрешности *зависят только от аппроксимационных свойств конечно-элементного пространства.* Например, таким требованиям удовлетворяет квазиинтерполяционный оператор работы [14], который используем ниже для иллюстрации этого утверждения. Сначала опишем сам оператор.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, – ограниченная липшицева область, на которой задана квазиоднородная триангуляция $\mathcal{T}_h$ с вершинами $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, и симплексами τ_r, диаметр которых не превышает h. Ради простоты предполагаем грани симплексов плоскими, записав условия квазиоднородности триангуляции в виде

$$0 < c_\Delta \leq \underline{\rho}_r / h_r, \quad \hat{\alpha}^{(1)} h \leq h_r \leq h, \tag{50}$$

где $\underline{\rho}_r$ и h_r – радиус наибольшей вписанной сферы и диаметр симплекса τ_r. Каждой вершине $x^{(i)}$ сопоставим $(m-1)$-мерный симплекс $\tau_i^{(m-1)}$, который является гранью одного из симплексов τ_r с вершиной $x^{(i)}$. Для m вершин симплекса $\tau_i^{(m-1)}$ используем также обозначения $z_l^{(i)}$, $l = 1, 2, \ldots, m$, считая для определенности, что $z_1^{(i)} = x^{(i)}$. Очевидно, выбор грани $\tau_i^{(m-1)}$ не единствен. Для $x^{(i)} \in \partial\Omega$ всегда выбираем одну из граней $\tau_i^{(m-1)} \subset \partial\Omega$. В формулировке результата Скотта Жанга используем также более простые обозначения $\mathbb{V}_\Delta(\Omega)$, $\mathring{\mathbb{V}}_\Delta(\Omega)$ и $\mathcal{V}_{\mathrm{tr}}(\partial\Omega)$ для пространства непрерывных кусочно-линейных функций $\mathbb{V}_{h,1}^0(\Omega)$, его подпространства функций, равных нулю на границе, и его ограничения на $\partial\Omega$ соответственно.

Определим функции $\theta_i \in \mathcal{P}_1\left(\tau_i^{(m-1)}\right)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\int_{\tau_i^{(m-1)}} \theta_i \lambda_l^{(i)} dx = \delta_{1,l}, \quad l = 1, 2, \ldots, m, \tag{51}$$

где $\lambda_l^{(i)}$ – барицентрические координаты в $\tau_i^{(m-1)}$, соответствующие вершинам $z_l^{(i)}$, и $\delta_{i,l}$ – символ Кронекера. Если $\phi_i \in \mathbb{V}_\Delta(\Omega)$ – базисные функции в $\mathbb{V}_\Delta(\Omega)$, определяемые равенствами $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, I$, то для любой $v \in H^1(\Omega)$ квазиинтерполяция $\mathcal{I}_h v$ есть функция

$$\mathcal{I}_h v = \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{\tau_i^{(m-1)}} \theta_i v dx \right) \phi_i(x). \tag{52}$$

Лемма 2. *Квазиинтерполяционный оператор* $\mathcal{I}_h : H^1(\Omega) \to \mathbb{V}_\Delta(\Omega)$ *является проекционным и имеет следующие свойства*:

a) $\mathcal{I}_h v : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{V}_\Delta(\Omega)$ *и, если* $v \in \mathbb{V}_\Delta(\Omega)$, *то* $\mathcal{I}_h v = v$,

b) $(v - \mathcal{I}_h v) \in \mathring{H}^1(\Omega)$, *если* $v|_{\partial\Omega} \in \mathcal{V}_{\mathrm{tr}}(\partial\Omega)$,

c) $\|v - \mathcal{I}_h v\|_{t,\Omega} \leq c_{\mathrm{sz}}(t,s) h^{s-t} \|v\|_{s,\Omega}$ *для* $t = 0, 1$, $s = 1, 2$ *и* $\forall v \in H^s(\Omega)$,

d) $|\mathcal{I}_h v|_{1,\Omega} \leq \breve{c}_{\mathrm{cs}} |v|_{1,\Omega}$ *и* $\|\mathcal{I}_h v\|_{1,\Omega} \leq \hat{c}_{\mathrm{cz}} \|v\|_{1,\Omega}$ $\forall v \in H^1(\Omega)$,

где $c_{\mathrm{sz}}(s,t)$, $\hat{c}_{\mathrm{cz}}$ *и* $\hat{c}$ *– положительные постоянные, зависящие от* c_Δ.

Доказательство. Лемма в более общей форме была доказана Скоттом и Жангом [14], в приведенной форме ее можно найти в [28].

Теорема 6. *Пусть* $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\psi_D \equiv 0$, $u \in \mathring{H}^1(\Omega, \Delta)$, *конечно-элементный комплекс удовлетворяет условию* $\mathcal{A}$) *и порождает пространство* $\mathring{\mathbb{V}}_\Delta(\Omega) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$ *и* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \mathrm{div})$. *Тогда при* $\sigma \in \left[0, 1/(c_{\mathrm{sz}}(0,1)h)^2\right]$ *для* $v = u_{\mathrm{fem}}$ *выполняется оценка*

$$|||v - u|||^2 \leq \Theta_{\mathrm{sz}} \mathcal{M}_{\mathrm{fem}}^{(2)}(\sigma, f, \mathbf{z}), \quad \mathcal{M}_{\mathrm{fem}}^{(2)}(\sigma, f, \mathbf{z}) = \mathcal{M}(\sigma, \theta_{\mathrm{sz}}^{-1}, f, u_{\mathrm{fem}}, \mathbf{z}), \tag{53}$$

в которой

$$\Theta_{\mathrm{sz}} = \frac{1 + \tilde{c}_{\mathrm{sz}}^2(1,1)}{1 + c_{\mathrm{sz}}^2(0,1) h^2 \sigma}, \quad \theta_{\mathrm{sz}} = c_{\mathrm{sz}}(0,1)^2 h^2, \tag{54}$$

и $\tilde{c}_{\mathrm{sz}}^2(1,1)$ *– постоянная, зависящая только от* c *и* $\hat{\alpha}^{(1)}$, *см.* (58).

Доказательство. При любой $w \in \mathring{\mathbb{V}}_\Delta(\Omega)$ имеет место равенство

$$
\begin{gathered}
|||e_{\text{fem}}|||^2 = \int_\Omega [\nabla(e_{\text{fem}}) \cdot \nabla(e_{\text{fem}}) + \sigma e_{\text{fem}} e_{\text{fem}}] = \\
= \int_\Omega [(\nabla u_{\text{fem}} + \mathbf{z}) \cdot \nabla(e_{\text{fem}} + w) - (\mathbf{z} + \nabla u) \cdot \nabla(e_{\text{fem}} + w) + \sigma(u_{\text{fem}} - u)(e_{\text{fem}} + w)].
\end{gathered} \tag{55}
$$

Интегрируя по частям второе слагаемое под знаком интеграла в правой части и применяя неравенство Коши, при любом $\epsilon > 0$ получаем

$$
\begin{gathered}
|||e_{\text{fem}}|||^2 = \int_\Omega [(\nabla u_{\text{fem}} + \mathbf{z}) \cdot \nabla \geq (e_{\text{fem}} + w) + (\operatorname{div} \mathbf{z} + \Delta u + \sigma(u_{\text{fem}} - u))(e_{\text{fem}} + w)] \leq \\
\leq \left\{\|\nabla u_{\text{fem}} + \mathbf{z}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f - \sigma u_{\text{fem}} - \operatorname{div} \mathbf{z}\|_0^2\right\}^{1/2} \left\{\|\nabla(e_{\text{fem}} + w)\|_0^2 + \varepsilon(e_{\text{fem}} + w)_0^2\right\}^{1/2}.
\end{gathered} \tag{56}
$$

Согласно лемме 2 и определению оператора Q L_2-проекции на $\mathring{\mathbb{V}}_\Delta(\Omega)$ для разности $\phi - Q\phi$ при любой $\phi \in H^1(\Omega)$ выполняются неравенства

$$
\begin{gathered}
\|\phi - Q\phi\|_0 \leq \|\phi\|_0, \\
\|\phi - Q\phi\|_0 \leq c_{\text{sz}}(0,1)h\|\nabla\phi\|_0, \\
\|\nabla(\phi - Q\phi)\|_0 \leq \tilde{c}_{\text{cz}}(1,1)h\|\nabla\phi\|_0,
\end{gathered} \tag{57}
$$

где постоянная $\tilde{c}_{\text{cz}}(1,1)$ зависит только от c и $\hat{\alpha}^{(1)}$. Доказательства требует только последнее неравенство. Оно вытекает из соотношений

$$
\begin{gathered}
\|\nabla(\phi - Q\phi)\|_0 \leq \|\nabla(\phi - \mathcal{I}_h\phi)\|_0 + \|\nabla(\mathcal{I}_h\phi - Q\phi)\|_0 \leq \breve{c}_{\text{sz}}\|\nabla\phi\|_0 + c_{1,0}h^{-1}\|\mathcal{I}_h\phi - Q\phi\|_0 \leq \\
\leq \breve{c}_{\text{sz}}\|\nabla\phi\|_0 + c_{1,0}h^{-1}\left[\|\mathcal{I}_h\phi - \phi\|_0 + \|\phi - Q\phi\|_0\right] \leq (\breve{c}_{\text{sz}} + 2c_{1,0}c_{\text{sz}}(0,1))\|\nabla\phi\|_0,
\end{gathered}
$$

в которых $c_{1,0}$ — постоянная в обратном неравенстве $\|\nabla(\mathcal{I}_h\phi - Q\phi)\|_0 \leq c_{1,0}h^{-1}\|\mathcal{I}_h\phi - Q\phi\|_0$. Таким образом,

$$
\tilde{c}_{\text{sz}}(1,1) = \breve{c}_{\text{sz}} + 2c_{1,0}c_{\text{sz}}(0,1). \tag{58}
$$

Заметим, что третье неравенство (57), свидетельствующее об устойчивости в $H^1(\Omega)$ L_2-проекции, было получено в [29] другим путем соответственно с другим способом вычисления постоянной $\tilde{c}_{\text{sz}}(1,1)$. Он основан на локальных L_2-проекциях $Q_{\tau_r}\colon L_2(\tau_r) \to \mathcal{P}_1$.

Так как $w = Qe_{\text{fem}} \in \mathring{\mathbb{V}}_\Delta(\Omega)$, то можно принять $w = Qe_{\text{fem}}$. Если также использовать (57) и положить $\epsilon = \sigma_{\text{sz}} := (c_{\text{sz}}(0,1)h)^{-2}$, то придем к оценке

$$
\begin{gathered}
\|\nabla(e_{\text{fem}} + w)\|_0^2 + \sigma_{\text{sz}}\|e_{\text{fem}} + w\|_0^2 = \|\nabla(e_{\text{fem}} + w)\|_0^2 + \beta\sigma\|e_{\text{fem}} + w\|_0^2 + \\
+ (\sigma_{\text{sz}} - \beta\sigma)\|e_{\text{fem}} + w\|_0^2 \leq \tilde{c}_{\text{sz}}^2(1,1)\|\nabla e_{\text{fem}}\|_0^2 + \beta\sigma\|e_{\text{fem}}\|_0^2 + \frac{\sigma_{\text{sz}} - \beta\sigma}{\sigma_{\text{sz}}}\|\nabla e_{\text{fem}}\|_0^2.
\end{gathered} \tag{59}
$$

На основании (59) заключаем, что

$$
\|\nabla(e_{\text{fem})} + w\|_0^2 + \sigma_{\text{sz}}\|e_{\text{fem}} + w\|_0^2 \leq \frac{1 + \tilde{c}_{\text{sz}}^2(1,1)}{1 + \kappa}\left[\|\nabla e_{\text{fem}}\|_0^2 + \sigma\|e_{\text{fem}}\|_0^2\right], \tag{60}
$$

где $\kappa = \sigma/\sigma_{\text{sz}}$. Из (56) и (60) следует утверждение теоремы.

Замечание 2. Квазиинтерполяционный оператор $\mathcal{I}_h$ определен в [28] на триангуляциях, удовлетворяющих условиям квазиоднородности формы $0 < c_\Delta \leq \underline{\rho}_r/h_r, \quad h_r \leq h$, с сохранением свойств a), b) и свойствами c), d), принимающими вид

$$
\begin{gathered}
\|v - \mathcal{I}_h v\|_{t,\tau_r} \leq c_{\text{sz}}(t,s)h_r^{s-t}\|v\|_{s,\delta_r}, \quad t = 0, 1, \quad s = 1, 2, \quad \forall v \in H^1(\delta_r), \\
|\mathcal{I}_h v|_{1,\tau_r} \leq \breve{c}_{\text{sz}}|v|_{1,\delta_r} \quad \text{и} \quad \|\mathcal{I}_h v\|_{1,\tau_r} \leq \hat{c}_{\text{sz}}\|v\|_{1,\delta_r} \quad \forall v \in H^1(\delta_r),
\end{gathered} \tag{61}
$$

где $c_{sz}(t,s) = \text{const}$, $\delta_r = \text{interior}\{\cup_\varkappa \overline{\tau}_\varkappa : \overline{\tau}_\varkappa \cap \overline{\tau}_r \neq \varnothing\}$ и $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$. Более того, там же получены интерполяционные операторы $\mathcal{I}_{h,p} : H^1(\Omega) \to \mathbb{V}_{h,p}(\Omega)$, для которых также сохраняются свойства a), b), а в (61) $s = 1, 2, \ldots, p+1$. Эти факты ведут к ряду обобщений. Одно из них – распространение оценки (53)–(54) на конечно-элементные решения из пространств $\mathbb{V}_{h,p}(\Omega)$, $p > 1$. При этом в (53), (54) постоянные для оператора $\mathfrak{I}_h$ заменяются постоянными для оператора $\mathcal{I}_{h,p}$. Появляется также возможность обобщения (53), (54) на случай кусочно-постоянного коэффициента реакции $\sigma\big|_{\tau_r} = \sigma_r = \text{const} \geq 0$ при некоторых ограничениях на величины скачков, например, $|\sigma_r - \sigma_\varkappa| \leq c\min(\sigma_r, \sigma_\varkappa)$, $c = \text{const} \leq 1/2$, для любой пары конечных элементов τ_r, $\tau_\varkappa$, имеющих общие вершины. Для каждого конечного элемента получаем локальные значения $\Theta_{sz} = \Theta_{sz}^{(r)}$ и $\theta_{sz} = \theta_{sz}^{(r)}$.

Замечание 3. Имеются различные способы вывода апостериорных оценок рассматриваемого класса, приводящие к различным значениям σ_* и весов перед нормами в правых частях оценок. В частности, можно ожидать, что значение σ_{sz} будет больше σ_* в лемме 1, а значение θ_{sz} в (54) меньше $\theta = 1/\sigma_*$ в теореме 5. В то же время Θ_{sz} в (54) превосходит Θ в оценках теоремы 5. Дополнительно к возможностям, указанным в замечании 1, изменять Θ_{sz} и θ_{sz} в (53), (54) можно посредством выбора $\epsilon = \gamma\sigma_{sz}$, $\gamma \in (0,1)$.

4. СОГЛАСОВАННОСТЬ С АПРИОРНЫМИ ОЦЕНКАМИ, ПОЧТИ ОБРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО

В этом разделе установим некоторые важные свойства полученных апостериорных оценок погрешности.

4.1. Согласованность с априорными оценками

Уточненные апостериорные оценки погрешности решений МКЭ (48), (49) и (54) являются согласованными по порядку точности с неулучшаемыми априорными оценками. Чтобы убедиться в этом, напомним сначала априорные оценки скорости сходимости решений МКЭ.

Для различных классов конечно-элементных аппроксимаций функций $v \in H^l(\Omega)$, $1 \leq l \leq p+1$, справедливы оценки аппроксимации

$$\|v - \tilde{v}\|_{k,\Omega} \leq c_{k,l} h^{l-k} \|v\|_{l,\Omega}, \quad k = 0, 1, \quad c_{k,l} = \text{const}, \tag{62}$$

в которых $c_{k,l} = c_{k,l}\left(k, l, c, \hat{\alpha}^{(1)}\right)$ при выполнении условия $\mathcal{A}$), а при применении в более общем случае криволинейных конечных элементов под c_Δ, $\hat{\alpha}^{(1)}$ понимаются соответствующие характеристики из условий обобщенной квазиоднородности. Оценки (62) можно найти, например, в [14], [30], [31]. При $p = 1$, $l = 1, 2$ и $\tilde{u} = \mathcal{I}_h u$ они, в частности, есть следствие леммы 2. В случае применения узловых конечных элементов со значениями искомых функций в качестве узловых параметров и $l \geq 2$ для их получения достаточно использовать $\tilde{v} = v_{\text{int}}$, где v_{int} конечно-элементная интерполяция Лагранжа. В общем случае под $\tilde{v}$ для решения $v = u$ в силу неравенств (44) можно понимать любую из функций u_o, u_{fe} или u_s.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\sigma \equiv \text{const} \geq 0$, $\psi_D \equiv 0$, $u \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^l(\Omega)$ *и конечно-элементный комплекс порождает пространство* $\mathbb{V}_{h,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. *Тогда для* $1 \leq l \leq p+1$ *справедливы оценки скорости сходимости*

$$\|e_{\text{fem}}\|_0 \leq c_{0,l} h^l \|u\|_l, \tag{63}$$

$$\|e_{\text{fem}}\|_{\mathbf{A}} \leq \sqrt{\mu_2} c_{1,l} h^{l-1} \|u\|_l \tag{64}$$

с постоянными $c_{k,l}$ *из оценок аппроксимации* (62). *Также при* $\sigma \leq c_\dagger^2 h^{-2}$ *и при* $\sigma \geq c_\dagger^2 h^{-2}$, $f \in L_2(\Omega)$ *справедливы, соответственно, оценки*

$$|||e_{\text{fem}}|||^2 \leq \left(c_{0,l}^2 + \mu_2 c_{1,l}^2\right) h^{2(l-1)} \|u\|_l^2, \tag{65}$$

$$|||e_{\text{fem}}|||^2 \leq \mu_2 c_{1,l}^2 h^{2(l-1)} \|u\|_l^2 + \sigma^{-1} \|f\|_0^2. \tag{66}$$

Доказательство. Лемма 3 следует из (44), (62) и (40) и лемм 1 и 2.

Согласованность апостериорных оценок (48), (49) и (53), (54) с априорной оценкой (65) устанавливается одинаково, она практически очевидна для решений МКЭ повышенной гладкости. Заметим, что для решений МКЭ повышенной гладкости $u_{\text{fem}} \in \mathbb{V}^1_{h,p}(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ дополнительно имеем оценку скорости сходимости

$$\|u - u_{\text{fem}}\|_2 \le \hat{c}_{2,l} h^{l-2} \|u\|_{l,\Omega}, \quad l \ge 2, \quad \hat{c}_{2,l} = \text{const}. \tag{67}$$

Для ее вывода достаточно применить обратное неравенство, неравенства (2), второе неравенство (44) и оценки аппроксимации (62):

$$\|e_{\text{fem}}\|_2 \le \|u - u_{\text{int}}\|_2 + \|u_{\text{int}} - u_{\text{fem}}\|_2 \le \|u - u_{\text{int}}\|_2 + ch^{-1}\|u_{\text{int}} - u_{\text{fem}}\|_1 \le$$
$$\le \|e_{\text{int}}\|_2 + c_i h^{-1}\left(\|e_{\text{int}}\|_1 + \sqrt{\frac{1}{\mu_1}}\|e_{\text{o}}\|_{\mathbf{A}}\right) \le h^{l-2}\left[c_{2,l} + c_i c_{1,l}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right)\right]\|u\|_{l,\Omega} = \hat{c}_{2,l} h^{l-2}\|u\|_{l,\Omega}.$$

Введем для мажоранты в правой части апостериорной оценки (48) обозначение

$$\left\{\eta^{(1)}(e_{\text{fem}})\right\}^2 = \frac{2}{1 + c_\dagger^2 h^2 \sigma}\mathcal{M}^{(1)}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{z}).$$

Если теперь $u_{\text{fem}} \in \mathbb{V}^1_{h,p}(\Omega)$, то можно принять $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{\text{fem}} = -\mathbf{A}\nabla\mathbf{z}_{\text{fem}}$ и диффузионная компонента мажорант исчезает, то есть $]\!]\mathbf{A}\nabla u_{\text{fem}} + \mathbf{z}_{\text{fem}}[\![_{\mathbf{A}^{-1}} = 0$. Принимая во внимание неравенство $\sigma \le 1/(c_\dagger h)^2$, первое неравенство (44) и оценки скорости сходимости (63), (67), будем иметь

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(e_{\text{fem}}) &\le \sqrt{2}c_\dagger h\|f - \sigma u_{\text{fem}} - \operatorname{div}\mathbf{z}\|_0 \le \sqrt{2}c_\dagger h\|\mathfrak{L}e_{\text{fem}}\|_0 \le \\ &\le \sqrt{2}\left[\frac{1}{c_\dagger h}\|e_{\text{fe}}\|_0 + c_\dagger\mu_2 h|e_{\text{fem}}|_2\right] \le \sqrt{2}\left[\frac{c_{0,l}}{c_\dagger} + c_\dagger c_{2,l}\mu_2\right]h^{l-1}\|u\|_l.\end{aligned} \tag{68}$$

По порядку эта оценка совпадает с неулучшаемой априорной оценкой (65).

В случае $u_{\text{fem}} \in \mathbb{V}_{h,p}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $\mathbb{V}_{h,p}(\Omega) \not\subseteq H^2(\Omega)$, естественно потребовать, чтобы для восстановленного вектора потока $\mathbf{z}$ выполнялись такая же по порядку оценка скорости сходимости, как для $\mathbf{z}_{\text{fem}} = -\mathbf{A}\nabla u_{\text{fem}}$, и соответствующая (67) оценка $\|\operatorname{div}(-\mathbf{A}\nabla u - \mathbf{z})\|_0 \le \tilde{c}_{2,l}h^{l-2}\|u\|_{l,\Omega}$, $\tilde{c}_{2,l} = \text{const}$. Отметим, что вторая из этих оценок является, вообще говоря, следствием первой, так же как (67) следует из (62). При выполнении указанных требований аналогичная (68) оценка

$$\eta^{(1)}(e_{\text{fem}}) \le c_1 h^{l-1}\|u\|_l, \quad c_1 = \text{const}, \tag{69}$$

доказывается аналогичной содержащейся в (68) последовательностью неравенств.

Отметим, что апостериорные оценки погрешности данной работы отличаются от известных оценок такой же структуры только в коэффициентах перед нормами в правых частях, имеющих меньший или одинаковый с известными порядок. Поэтому полученные ранее эффективные алгоритмы восстановления потоков эффективны и для наших оценок (48), (49) и (53), (54). Более того, применимы многие из алгоритмов, весьма интенсивно развивавшихся для индикаторов погрешности метода невязок. Они не только сохраняют стандартные аппроксимационные свойства потоков МКЭ, приводящие к (69), но и обеспечивают суперсходимость восстановленных потоков [1]–[4], [7].

Как уже отмечалось, апостериорная оценка неулучшаема по порядку точности, если она согласована с априорной оценкой, неулучшаемой в этом отношении. Это означает, что в классе решений, для которых априорная оценка неулучшаема по порядку точности, найдутся такие, что

$$\eta^{(1)}(e_{\text{fem}}) \le \mathbb{C}_\star |\!|\!| e_{\text{fem}} |\!|\!|. \tag{70}$$

Действительно, пусть для простоты $f \in L_2(\Omega)$, $d = 2$, граница области и коэффициенты уравнения такие, что выполняется неравенство (39). Тогда справедливы неравенства (65) с $l = 2$ и (69). В то же время найдутся такие $f \in L_2(\Omega)$, при которых

$$h\|u\|_2 \le c_2 \inf\nolimits_{\varphi\in\mathbb{V}_h(\Omega)}\|\nabla(u - \varphi)\|_0 = c_2\|\nabla e_{\text{fe}}\|_0 \le c_2\|\nabla e_{\text{fem}}\|_0 \le c_2 |\!|\!|\nabla e_{\text{fem}}|\!|\!|, \quad c_2 = \text{const}. \tag{71}$$

Первое из этих неравенств следует из оценок N-поперечника компакта функций $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $\|v\|_1 = 1$, для $N = h^{-2}$ (см. [25, гл. 4, п. 4.1]). Из (69), (71) следует неравенство (70), которое вместе с (48) приводят к двухсторонней оценке

$$|\!|\!| e_{\text{fem}} |\!|\!|^2 \le \eta^{(1)}(e_{\text{fem}}) \le \mathbb{C}_\star |\!|\!| e_{\text{fem}} |\!|\!|^2. \tag{72}$$

4.2. Почти обратное неравенство

Вывод апостериорных оценок погрешности приближенных решений часто сопровождается построением алгоритмов восстановления потоков и доказательством с использованием таких потоков оценок, которые можно назвать *почти обратными* (см. [5], [7], [8], [9], [32]–[34]). Бóльшая точность согласованных оценок (48), (49) и (53), (54), во-первых, позволяет ожидать бóльшей точности от соответствующих почти обратных оценок, что имеет важное значение при обосновании сходимости адаптивных алгоритмов.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и* $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $u_{\text{fem}} \in \mathbb{V}_{h,1}(\Omega)$. *Пусть также вектор-функция* $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_{h,p}(\Omega, \operatorname{div})$ *определена как* $\mathbf{L}^2$*-проекция вектор-функции* $\mathbf{z}_{\text{fem}}$ *на какое-либо из пространств* $\mathbf{V}_{h,p}(\Omega, \operatorname{div})$, $p = 1, 2$. *Тогда для* $k = 1, 2$

$$\mathcal{M}^{(k)}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{z}) \le \mathbb{C}\left[\|\!|e_{\text{fem}}|\!\|^2 + \sum_{\varkappa=1}^{\mathcal{R}} \frac{h_\varkappa^2}{\pi^2}\int_{\tau_\varkappa}\left(f - Q^1_\varkappa f\right)^2 dx\right] \tag{73}$$

с постояной $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\Omega, c_\Delta)$.

Доказательство. Рассмотрим мажоранту $\mathcal{M}^{(1)}$. Допустим, $\mathbf{V}_h(\Omega, \operatorname{div})$ – конечно-элементное подпространство пространства $\mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$ и существует $\mathbf{y}_\text{o} \in \mathbf{V}_h(\Omega, \operatorname{div})$, для которого имеет место оценка (73) с $\mathbf{z} = \mathbf{y}_\text{o}$, то есть

$$\mathcal{M}^{(k)}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{y}_\text{o}) \le \mathbb{C}_\text{o}\left[\|\!|e_{\text{fem}}|\!\|^2 + \sum_{r} \frac{h_r^2}{\pi^2}\int_{\tau_r}\left(f - Q^1_r f\right)^2 dx\right]. \tag{74}$$

Пусть также $\mathbf{y}$ – ортогональная $\mathbf{L}^2$-проекция вектор-функции $\mathbf{z}_{\text{fem}}$ на пространство $\mathbf{V}_h(\Omega, \operatorname{div})$. Воспользовавшись неравенством

$$\|\nabla u_{\text{fem}} - \mathbf{y}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \|\nabla u_{\text{fem}} - \mathbf{y}_\text{o}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \tag{75}$$

и затем неравенством (74), получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{M}^{(1)}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{y}) \le 2\left\{\mathcal{M}^{(1)}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{y}_\text{o}) + (c_\dagger h)^2\|\operatorname{div}(\mathbf{y}_\text{o} - \mathbf{y})\|^2_{L_2(\Omega)}\right\} \le \\ \le 2\left\{\mathbb{C}_\text{o}\left[\|\!|e_{\text{fem}}|\!\|^2 + \sum_r \frac{h_r^2}{\pi^2}\int_{\tau_r}\left(f - Q^1_r f\right)^2 dx\right] + (c_\dagger h)^2\|\operatorname{div}(\mathbf{y}_\text{o} - \mathbf{y})\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}.\end{gathered} \tag{76}$$

Разность $\mathbf{y}_\text{o} - \mathbf{y}$ принадлежит конечно-элементному пространству $\mathbf{V}_h(\Omega, \operatorname{div})$ и, следовательно, выполняется обратное неравенство. Применение его и неравенств (75), (74) приводит к оценке

$$\begin{gathered}c_\dagger h\|\operatorname{div}(\mathbf{y}_\text{o} - \mathbf{y})\|_{L_2(\Omega)} \le c_i c_\dagger\|\mathbf{y}_\text{o} - \mathbf{y}\|_{L_2(\Omega)} \le c_i c_\dagger\left[\|\mathbf{y}_\text{o} - \nabla u_{\text{fem}}\|_{L_2(\Omega)} + \right. \\ \left. + \|\nabla u_{\text{fem}} - \mathbf{y}\|_{L_2(\Omega)}\right] \le 2c_i c_\dagger [\|\mathbf{y}_\text{o} - \nabla u_{\text{fem}}\|_{L_2(\Omega)} \le 2c_i c_\dagger C_\text{o}^{1/2}\|\!|e_{\text{fem}}|\!\|,\end{gathered} \tag{77}$$

которая вместе с (76) означает справедливость оценки (73) для $\mathbf{z} = \mathbf{y}$ при условии существования указанного $\mathbf{y}_\text{o}$.

Эйнсворт и Вейходский [8] предложили алгоритм вычисления вектор-функции $\mathbf{z}_{_{AV}} \in \mathbf{V}_{h,2}(\Omega, \operatorname{div})$, где $\mathbf{V}_{h,p}(\Omega, \operatorname{div}) = \left\{\mathbf{y}\colon y_k|_{\tau_r} \in \mathcal{P}_p,\ p \ge 1,\ \operatorname{div}\mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}$, для которого справедлива более сильная по сравнению с (74) оценка

$$\mathcal{M}(\sigma, \sigma, f, u_{\text{fem}}, \mathbf{z}_{_{AV}}) \le \mathbb{C}_{_{AV}}\left[\|\!|e_{\text{fem}}|\!\|^2 + \sum_r \frac{h_r^2}{\pi^2}\int_{\tau_r}(f - Q^1_r f)^2 dx\right]. \tag{78}$$

Таким образом, поскольку $\mathcal{M}_{\text{fem}}(\sigma, f, \mathbf{z}) \le \mathcal{M}(\sigma, \sigma, f, u_{\text{fem}}, \mathbf{z}_{_A})$ при $\sigma \le \sigma_*$ и $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \operatorname{div})$, то, приняв $\mathbf{y}_\text{o} = \mathbf{z}_{_{AV}}$, заключаем, что теорема верна для $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_{h,2}(\Omega, \operatorname{div})$.

Доказательство оценки (73) при $p = 1$ и при $k = 2$, $p = 1, 2$ отличается лишь незначительно.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению стиля статьи и устранению описок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* The superconvergence patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1992. V. 101. P. 207–224.
2. *Ainsworth M., Oden J.T.* A posteriori estimation in finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 240 p.
3. *Babuska I., Strouboulis T.* Finite element method and its reliability. New York: Oxford Univ. Press, 2001. 802 p.
4. *Babuska I., Witeman J.R., Strouboulis T.* Finite elements. An introduction to the method and error estimation. Oxford: University Press, 2011. 323 p.
5. *Ern A., Stephansen A., Vohralik M.* Guaranteed and robust discontinuous Galerkin a posteriori error estimates for convection-diffusion-reaction problems // J. Comput. and Appl. Math. 2009. V. 234. № 1. P. 114–130.
6. *Cheddadi I., Fucik R., Prieto M.I., Vohralik M.* Guaranteed and robust a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems // ESAIM: Math. Model. and Numer. Anal. 2009. V. 43. P. 867–888.
7. *Cai Z., Zhang S.* Flux recovery and a posteriori error estimators: conforming elements for scalar elliptic equations // SIAM J. Numer. Anal. 2010. V. 48. № 2. P. 578–602.
8. *Ainsworth M., Vejchodský T.* Robust error bounds for finite element approximation of reaction-diffusion problems with non-constant reaction coefficient in arbitrary space dimension. arXiv:1401.2394v2 [math.NA], 3 Jul. 2015.
9. *Ainsworth M., Vejchodský T.* Fully computable robust a posteriori error bounds for singularly perturbed reaction-diffusion problems // Numer. Math. 2011. V. 119. № 2. P. 219–243.
10. *Корнеев В.Г.* Робастные согласованные апостериорные мажоранты погрешности для приближенных решений уравнений диффузии-реакции. В кн. Материалы одинадцатой международной конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. Казань: Казанский университет, 2016. С. 182–187.
11. *Korneev V.G.* Robust consistent a posteriori error majorants for approximate solutions of diffusion-reaction equations. arXiv:1702.00433v1 [math.NA], 1 Feb. 2017.
12. *Корнеев В.Г.* О точности апостериорных функциональных мажорант погрешности приближенных решений эллиптических уравнений // Докл. АН. Математика. 2017. Т. 475. № 6. С. 605–608.
13. *Aubin J.-P.* Approximation of elliptic boundary-value problems. New York: Wiley-Interscience, 1972. 360 p.
14. *Scott L., Zhang S.* Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions // Math. Comput. 1990. V. 54. P. 483–493.
15. *Cottrell J.A., Hughes J.R., Bazilevs Yu.* Isogeometric analysis. Toward integration of CAD and FEA. New York: John Wiley & Sons, Ltd., 2009.
16. *Ern A., Guermond J.-L.* Theory and Practice of Finite Elements. Berlin: Springer, 2004. 524 p.
17. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
18. *Korneev V.G., Langer U.* Dirichlet-Dirichlet Domain Decomposition Methods for Elliptic Problems, h and hp Finite Element Discretizations. New Jesey–London–Singapore–Beijing: World Scientific, 2015. 484 p.
19. *Репин С., Фролов М.* Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1774–1787.
20. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1964, 512 с.
21. *Anufriev I.E., Korneev V.G., Kostylev V.S.* Exactly equilibrated fields, can they be efficiently used for a posteriori error estimation? // Ученые записки Казанского университета, серия Физико-математические науки. Казань: Казанский гос. университет, 2006. Т. 148. № 4. С. 94–143.
22. *Корнеев В.Г.* Простые алгоритмы вычисления апостериорных оценок погрешности численных решений эллиптических уравнений // Ученые записки Казанского университета, Серия: Физико-математические науки. Казань: Казанский гос. университет, 2011. Т. 154. № 4. С. 11–27.
23. *Repin S., Sauter S.* Functional a posteriori estimates for the reaction-diffusion problem // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. V. 343. № 5. С. 349–354.
24. *Чурилова М.А.* Вычислительные свойства функциональных апостериорных оценок для стационарной задачи реакции-диффузии // Вестник СПбГУ, Серия 1: Математика, Механика, Астрономия. 2014. Т. 1. № 1. С. 68–78.
25. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во Академии наук Армянской ССР, 1979. 335 с.
26. *Назаров А.И., Поборчий С.В.* Неравенство Пуанкаре и его приложения. Санкт-Петербург: Изд. дом Санкт-Петербургского гос. ун-та, 2012.
27. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
28. *Xu J., Zou J.* Some nonoverlapping domain decomposition methods // SIAM Rev. 1998. V. 40. № 4. P. 857–914.
29. *Bramble J.H., Xu J.* Some estimates for a weighted L_2 projection // Math. Comput. 1991. V. 56. № 194. P. 463–476.
30. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
31. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Ленинград: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1977. 205 с.
32. *Creusé E., Nicaise S.* A posteriori error estimator based on gradient recovery by averaging for discontinuous Galerkin methods // J. Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234. P. 2903–2915.
33. *Carey V., Carey G.F.* Flexible patch post-processing recovery strategies for solution enhancement and adaptive mesh refinement // Int. J. Numer. Methods Eng. 2011. V. 87. № 1–5. P. 424–436.
34. *Carstensen C.E., Merdon C.* Effective postprocessing for equilibration a posteriori error estimators // Numer. Math. 2013. V. 123. № 3. P. 425–459.