

УДК 519.634

## КОМПАКТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА С ОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

© 2019 г. С. П. Попов

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия)

e-mail: spopov@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.12.2017 г.  
Переработанный вариант 22.04.2018 г.

Численным решением задач с начальными данными получены компактонные и коватонные решения уравнений  $K(f^m, g^n)$ , обобщающих уравнения Кортевега–де Вриза  $K(u^2, u^1)$  и Розенау–Хаймана  $K(u^m, u^n)$  на случаи общих зависимостей нелинейности и дисперсии от решения  $u$ . Определяющие их вид функции  $f(u)$  и  $g(u)$  могут быть линейными или иметь вид “сглаженной ступеньки”. Установлено, что в зависимости от вида нелинейности и дисперсии существуют пикокомпактонные и пикосолитонные решения. Они представляют собой переходные формы, сочетающие свойства солитонов, компактонов и пиконов. Показано, что эти решения могут существовать на неоднородном и нестационарном фоне. Библ. 30. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** уравнение KdV, уравнение mKdV, уравнение  $K(m, n)$ , уравнение Розенау–Хаймана, уравнение  $K(\cos)$ , уравнение Розенау–Пиковского, компактон, коватон, солитон, пикон, пикокомпактон.

DOI: 10.1134/S0044466919010149

### ВВЕДЕНИЕ

При математическом моделировании многих физических явлений заметное место занимают процессы, связанные с эволюцией нелинейных диспергирующих волн, локализованных в пространстве. Они возникают в виде волн в жидкостях, ионно-акустических волн в плазме (см. [1]–[3]), в физике элементарных частиц и теории поля (см. [4]), описывают колебания упругих стержней и решеток связанных осцилляторов (см. [5]), а также определяют динамику доменных границ в магнетиках (см. [6], [7]) и распространение ультракоротких световых импульсов (см. [8]). Значительная часть этих моделей основывается на дифференциальных уравнениях в частных производных с нелинейными и дисперсионными слагаемыми, баланс которых приводит к появлению локализованных бегущих волн. Развитие областей физических приложений приводит к необходимости изменения соответствующих математических моделей за счет усложнения вида нелинейных и дисперсионных слагаемых (см. [9]) и введения коэффициентов, зависящих от координат и времени. Кроме прикладного значения, исследования возникающих уравнений дают вклад в общую теорию дифференциальных уравнений и способствуют развитию соответствующих аналитических и численных методов.

В данной работе рассматривается обобщение уравнения Кортевега–де Вриза (KdV)

$$\partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_{xxx} u = 0 \quad (1)$$

на случай более общих зависимостей от решения нелинейных и дисперсионных слагаемых в виде

$$\partial_t u + \partial_x f_1(u)^m + \partial_{xxx} f_2(u)^n = 0. \quad (1a)$$

При  $f_1(u) = f_2(u) = u$  уравнение (1) превращается в уравнение Розенау–Хаймана  $K(m, n)$ , предложенное в [10]:

$$\partial_t u + \partial_x u^m + \partial_{xxx} u^n = 0. \quad (2)$$

Особенно подробно (см. [11]–[16]) для этого уравнения исследованы случаи  $m = n = 2$  и  $m = n = 3$ , когда существуют аналитические компактонные решения:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= [a \cos^2(b(x - x_0 - ct))]^d \quad \text{для} \quad |x - x_0 - ct| < \pi/2b, \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{для} \quad |x - x_0 - ct| > \pi/2b, \\ a &= 2cn/(n + 1), \quad b = (n - 1)/2n, \quad d = 1/(n - 1). \end{aligned} \quad (2a)$$

Уравнение (2) имеет четыре сохраняющиеся во времени величины: интегралы по пространству от  $u(x, t)$ ,  $u(x, t)^n$ ,  $\cos(u(x, t))$  и  $\sin(u(x, t))$ . Однопараметрическое решение (2a) зависит только от скорости  $c$ . Основное отличие от солитонов уравнения KdV заключается в ограниченной протяженности компактона в пространстве. Компактон на фронтах имеет разрыв производных.

В дальнейшем круг уравнений, содержащих компактонные решения, расширился и пополнился уравнением Розенау–Пиковского  $K(\cos)$ :

$$\partial_t u + \partial_x \cos(u) + \partial_{xxx} \cos(u) = 0. \quad (3)$$

Оно не имеет аналитических решений, но в форме бегущей волны решения численно были найдены с большой точностью в работах [17], [18]. Эти решения имеют сходство с компактонами. Ограниченность нелинейности и дисперсии обуславливают существование у уравнения (3) кинковые и антикинковые решения, сумма которых дает новые решения в виде коватонов – компактонов с ограниченной на уровне  $\pi$  амплитудой и с произвольной шириной.

В данной работе численно решается уравнение более общего вида:

$$\partial_t u + \partial_x f_1(u)^m + \partial_{xxx} f_2(u)^n = 0 \quad (4)$$

при фиксированном  $m = 2$  и  $n$ , равных 1, 2, 3. Функции  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  полагаются, в зависимости от рассматриваемых частных случаев, равными либо решению  $u$ , либо функции  $F(u)$ , которая определяется следующим образом:  $F(u) = \sin(u)$  при  $|u| < \pi/2$ ,  $F(u) = -1$  при  $u < -\pi/2$ ,  $F(u) = 1$  при  $u > \pi/2$ . Для малых значений решения уравнения (4) поведение  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  близки к линейным. Поэтому для  $n = 1$  решения уравнения (4) будут близки к решениям уравнения KdV, а при  $n = 2$  к решениям уравнения Розенау–Хаймана  $K(2, 2)$ . В случае уравнения KdV имеются аналитические солитонные и многосолитонные решения, а для уравнения  $K(2, 2)$  – компактонные. При значениях  $|u|$ , сравнимых с  $\pi/2$ , наличие ограничения функции  $F(u)$  приводит к различным типам решений в зависимости от того, в каком слагаемом присутствует функция  $F(u)$ : в нелинейном, дисперсионном или одновременно в обоих слагаемых. Результаты численных расчетов показали, что если нет ограничений нелинейной части, то в решениях присутствуют только компактоны, но с ограниченной амплитудой. Коватоны появляются при наличии ограничений на нелинейность при любой дисперсии. Обнаружено, что в зависимости от числа  $n$  решения приобретают вид, сочетающий характерные для компактонов и пиконов формы (пикокомпактоны). Обнаружены компактоны, распространяющиеся по фону, близкому к нелинейной волне Римана, являющейся решением уравнения KdV без дисперсии.

Для численного решения (4) применяется квазиспектральная схема Фурье с интегрированием по времени методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Устойчивость схемы при расчете решений компактонного типа достигалась введением демпфирования высокочастотных гармоник в спектральное пространство за счет демпфирования разложения Фурье в области больших волновых чисел. Большинство расчетов было выполнено в ограниченных диапазонах параметров численной схемы, которые были заранее выбраны как оптимальные из серий тестовых вариантов. При этом полезным оказался собственный опыт численного решения уравнений  $K(m, n)$  и  $K(\cos)$ , а также содержащийся в цитируемых статьях. Из разнообразных решений для иллюстраций приведены наиболее содержательные и характерные, что достигалось специальным выбором начальных условий.

При обсуждении результатов будут фигурировать пиконные решения уравнения Камассы–Холма (см. [9]):

$$\partial_t u = \partial_{xxx} u - 3u \partial_x u + 2 \partial_x u \partial_{xx} u + u \partial_{xxx} u, \quad (5)$$

которые имеют вид

$$u(x, t) = a \exp(-|x - at|). \quad (6)$$

Также будет использоваться солитонное решение уравнения KdV:

$$u(x, t) = 6a_s^2 \operatorname{sech}^2[a_s(x - x_s - 12a_s^2 t)]. \quad (7)$$

## 1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численное моделирование компактных (коватонных) решений осложнено наличием в них разрывов производных, что ведет к появлению паразитных волновых пакетов, искажению формы компактонов и изменению их скорости. Если численно полученные одиночные компактоны уравнений K(2, 2) и K(3, 3) можно сравнить с их аналитическими выражениями и оценить численные погрешности, то для уравнений (4) подобные сравнения невозможны из-за отсутствия аналитических решений. В этих случаях можно получить приближенные численные компактонные решения из обыкновенных дифференциальных уравнений, следующих при подстановке  $X = x - ct$  в (4). Для решения этих уравнений существует много способов численного анализа, с помощью которого могут быть получены эталонные численные решения с большой точностью. По ним определяются погрешности при численном моделировании одиночных компактонов, полученных иными численными методами. Однако такой способ не подходит для исследования более сложных задач о взаимодействии компактонов, осцилляторных волн или об эволюции сложных начальных распределений. Тогда при анализе полученных численных решений необходимо исходить из свойств схем, аппроксимирующих исходные уравнения в частных производных. Точность в этих случаях определяется по отклонениям решений при вариации внутренних схемных параметров, количество которых может быть велико. Полезно также сравнение с другими численными подходами.

Сделаем краткий обзор основных методов численного моделирования рассматриваемых уравнений. В работе [19] для численного решения уравнения K(n, n) была использована квазиспектральная схема с функцией, демпфирующей высокочастотные моды. Ее вид выбирался из требования минимизации амплитуд паразитных волновых пакетов, зарождающихся на фронтах компактонов. В работе [20] развивался метод конечных разностей и адаптивный метод линий высокого порядка точности — соответственно седьмого и пятого.

Авторами работ [21], [22] для решения уравнения K(n, n) применялись три варианта явной численной схемы, использующие аппроксимацию Паде. Точность метода проверялась на аналитических решениях и выполнении законов сохранения, а также на воспроизведении формы волнового решения, развивающегося после взаимодействия компактонов. В работе [23] представлен метод частиц, а в [24], [25] подробно изложено описание и применение метода Галеркина с использованием (см. [25]) разрывных функций для широкого класса уравнений с нелинейной дисперсией и, в частности, для уравнения K(m, n). В работах [17], [18], [26] для численного решения предлагается метод конечных элементов четвертого порядка точности по координате, которым исследуются процессы генерации высокочастотных волн в численных компактонных решениях уравнения K(2, 2). Для устойчивости в уравнение добавлялось слагаемое  $\partial_{xxx} u$ , умноженное на малую константу. Оно аппроксимировалось пятиточечной схемой со вторым порядком точности. Средние амплитуды паразитных волн на фронтах компактона составляли  $10^{-5} - 10^{-7}$ . С такой же точностью сохранялся первый инвариант.

В данной работе численное решение уравнения (4) осуществляется квазиспектральным методом Фурье. Интегрирование по времени проводится в спектральном пространстве методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Функция, корректирующая коротковолновые возмущения, действует в спектральном пространстве.

Приведем краткое описание применяемого метода. Пусть  $u_j^n$  будет сеточным аналогом функции  $u(x, t)$  в координатном пространстве, а  $u_k^n$  — в спектральном. Для всех спектральных компонент  $k$  переход с временного слоя  $n$  на слой  $n + 1$  для искомым функций  $u_k^n$  осуществляется согласно сеточному аналогу уравнения (4):

$$u_{kt}^n = g(u_k^n) \equiv -c_{1k} - c_{2k},$$

где  $g(u_k^n)$  есть  $k$ -спектральная компонента всей правой части  $G(x, t)$  уравнения (4):

$$G(x, t) \equiv -\partial_x f_1(u)^m - \partial_{xxx} f_2(u)^n.$$

Значения  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$  находятся следующим образом. Пусть преобразование Фурье  $F^+$  осуществляет переход из координатного представления искомой функции  $u(x, t) \equiv u$  в спектральное, а за обратный переход отвечает преобразование  $F^-$ . Тогда для определения  $c_{1k}$  необходимо сначала вычислить  $u = F^-(u_k^n)$  ( $i$  – мнимая единица). Затем надо найти  $f_1(u)^m$  и окончательно  $c_{1k} = F^+(f_1(u)^m)(ik)$ . Аналогично  $c_{2k} = F^+(f_2(u)^n)(ik)^3$ . Если вводится демпфирующая функция  $D(k)$ , то  $c_{1k}$  и  $c_{2k}$  умножаются на нее.

Для всех  $k$  переход с временного слоя  $n$  на слой  $n + 1$  для искомых функций  $w_k^n$  происходит следующим образом:

$$u_k^{n+1} = (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)dt/6,$$

$$g_1 = g(u_k^n),$$

$$g_2 = g_1(u_k^n + g_1 dt/2),$$

$$g_3 = g_1(u_k^n + g_2 dt/2),$$

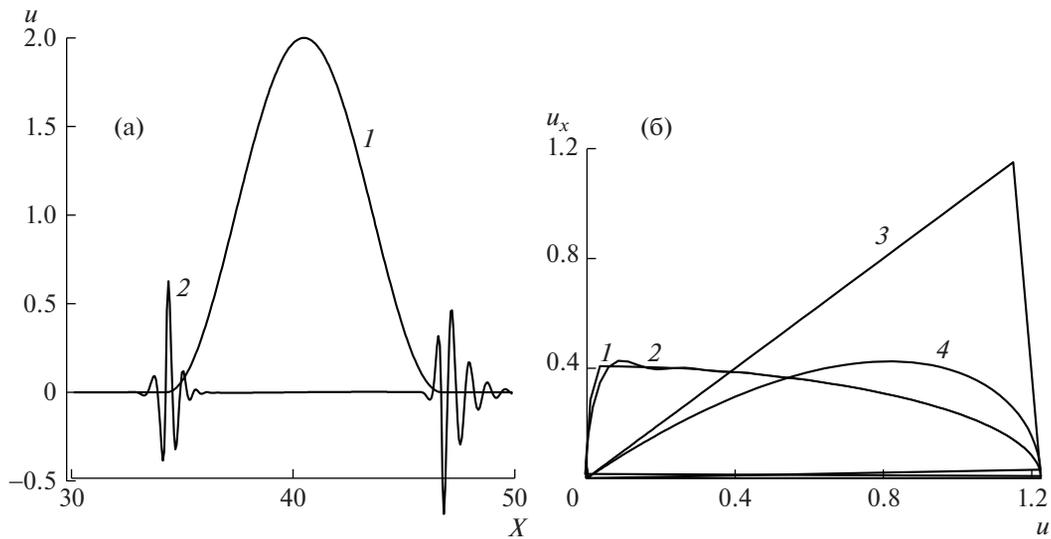
$$g_4 = g_1(u_k^n + g_3 dt).$$

Схемными параметрами являются следующие: число спектральных компонент  $N_k$ , общая длина периодичности  $L$ , число координатных точек  $N_x = 2N_k$  и шаг по координате  $dx = L/N_x$ . Условия устойчивости определялись в процессе конкретных расчетов. В качестве начальных условий в вариантах расчетов, представленных в данной работе, служили функции, построенные при помощи солитонных решений KdV или функций Гаусса. В работе [27] приведены результаты применения аналогичного метода для расчета эволюционных уравнений со сложными нелинейными и дисперсионными зависимостями, а в работе [28] для уравнения mKdV-SG. Численному моделированию пиконных и  $k$ -солитонных решений уравнений Камассы–Холма и Холма–Хона посвящена работа [29]. В этих случаях демпфирование коротковолновых колебаний не применялось.

## 2. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Тестирование метода в исследуемых задачах может быть проведено в нескольких направлениях. Тестирование на гладких решениях типа линейной волны ( $f_1(u) = u, f_2(u) = 0, m = 1$ ), много-солитонных решениях уравнений KdV ( $f_1(u) = u, f_2(u) = u, m = 2, n = 1$ ) и mKdV ( $f_1(u) = u, f_2(u) = u, m = 3, n = 1$ ). Важное место занимает тестирование схем в случае решений с особенностями в виде разрывов производных (компактоны, коватоны, пиконы), характерные для исследуемой группы уравнений. Кстати, они содержат также разрывы самих решений и близкие к хаотическим, появляющиеся при взаимодействии компактонов разных полярностей. Во всех случаях сравнительный анализ численных решений, полученных различными схемами, является очень эффективным.

В тестовых расчетах для используемого метода были выбраны следующие диапазоны значений параметров:  $dt$  – от 0.00030 до 0.000075,  $dx$  – от 0.125 до 0.03125, число спектральных гармоник  $N_k$  – от 1024 до 4096, число координатных точек  $N_x$  – от 2048 до 8192 (вся координатная область  $L = 256$ ). Аналитические компактонные решения (2а) уравнения K(n, n) позволяют проверить применяемую схему и определить оптимальный вид корректирующей функции  $D(k)$ , обеспечивающей минимальные отклонения численного решения от точного. На фиг. 1а (кривая 1) приведено численное компактонное решение, полученное из начального распределения (2а) при  $m = n = 2$  ( $x_0 = 0$ ) для амплитуды  $a = 2$ . Использовалась демпфирующая функция  $D(k) = \exp[-A((k - k_0)/N_k)^s]$ ,  $A = 34, s = 9, k_0 = 30, N_k = 1024$ . Осцилляции на фронтах компактона при времени  $t = 27$  (кривая 2) увеличены в  $10^3$  раз, во внутренней области компактона отклонения от аналитического значения составляли  $10^{-7}$ , с такой же точностью  $10^{-7}$  сохраняются все четыре интеграла. Оптимальный вид функции  $D(k)$  зависит от решаемой задачи и параметров численной схемы. Опытным путем было установлено, что для моделирования компактонных решений выбранная в данном тестовом примере демпфирующая функция оказывается оптимальной. Такой же вывод содержится в работах [9]–[11], в которых также использовалась квазиспектральная схе-

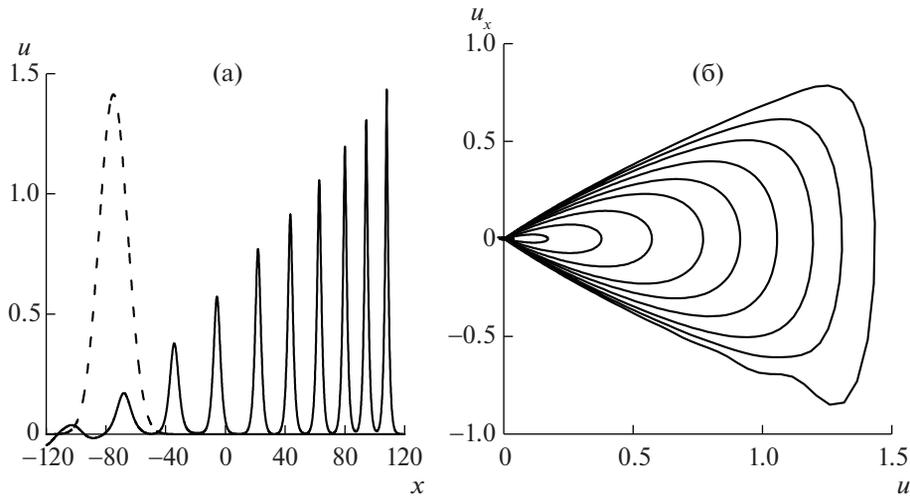


Фиг. 1.

ма. Поэтому данный вид функции  $D(k)$  был выбран в качестве основного в приводимых ниже расчетах. В этой связи отметим работу [17], в которой методом конечных элементов Петрова–Галеркина четвертого порядка детально исследовались численные паразитные волны на компактонных решениях и их эволюция при больших временах.

На фиг. 1б приведены фазовые кривые  $u_x(u)$  компактона, пикона и солитона KdV, им соответствуют кривые 1, 3, 4. Они построены по аналитическим решениям (2а), (6), (7) для амплитуды 1.224. Симметричная часть, находящаяся в отрицательной области  $u_x$ , не изображена. Представление в фазовой плоскости отчетливо выявляет различия данных решений. При одинаковой амплитуде они существенно отличаются по форме, что не так наглядно представляется в координатном пространстве. Пикон (3) отличается от солитона (4) в области максимума, где пикон имеет большие градиенты с их разрывом на вершине. Компактон (1) имеет существенные отличия от солитона (4) при малых значениях, где у компактона также есть разрывы производных. В дополнение к этому тесту были вычислены компактонные решения уравнения K(3, 3) при тех же схемных параметрах, что и тестовый вариант, приведенный на фиг. 1а для компактона уравнения K(2, 2). В случае с компактоном K(3, 3) величина волновых пакетов возрастает в 5 раз, точность воспроизведения основной части профиля компактона не ухудшается. На фиг. 1 это численное решение отмечено цифрой 2. Оно совпадает с кривой 1 всюду, исключая область в основании компактона, что в фазовом пространстве проявляется в незначительном возмущении на расчетной кривой в области  $0 < u < 0.2$ . Отметим, что изображения в фазовом пространстве решений рассматриваемых уравнений обладают преимуществами, но и рядом недостатков. Они детально передают различия в форме одиночных солитонов. Но одновременно могут накладываться и искажения, обусловленные волновыми возмущениями, которые не обязательно непосредственно соседствуют в пространстве с солитонами.

Дополнительное тестирование используемой схемы было проведено на компактонных и коватонных решениях уравнения Розенау–Пиковского K(cos). В работах [16], [17] рассматривались разнообразные постановки задач для этого уравнения. При численном моделировании применялась паде-аппроксимация четвертого порядка точности, а демпфирование осуществлялось путем введения в уравнение производной  $u_{xxxx}$  с малым параметром. Для сравнения были проведены расчеты совпадающих вариантов со столкновениями компактонов. Поскольку результаты в работах [16], [17] представлены графически, то возможно было только визуальное сравнение. Различия в поведении решений не наблюдались. Для определения степени действия демпфирующей функции на гладкие решения были проведены сравнительные расчеты солитонов уравнений KdV и mKdV как с демпфирующей функцией, так и без нее. Отличия были порядка  $10^{-4}$ . Оценка влияния схемных параметров (числа гармоник, величины пространственного и временного шагов) будет дана ниже при обсуждении конкретных задач.



Фиг. 2.

### 3. КОМПАКТНЫ УРАВНЕНИЯ KdV С ОГРАНИЧЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В этом разделе будут рассмотрены решения уравнения KdV с дисперсионным членом в виде сглаженной ступеньки для степенных показателей  $n = 1$  и  $n = 3$ .

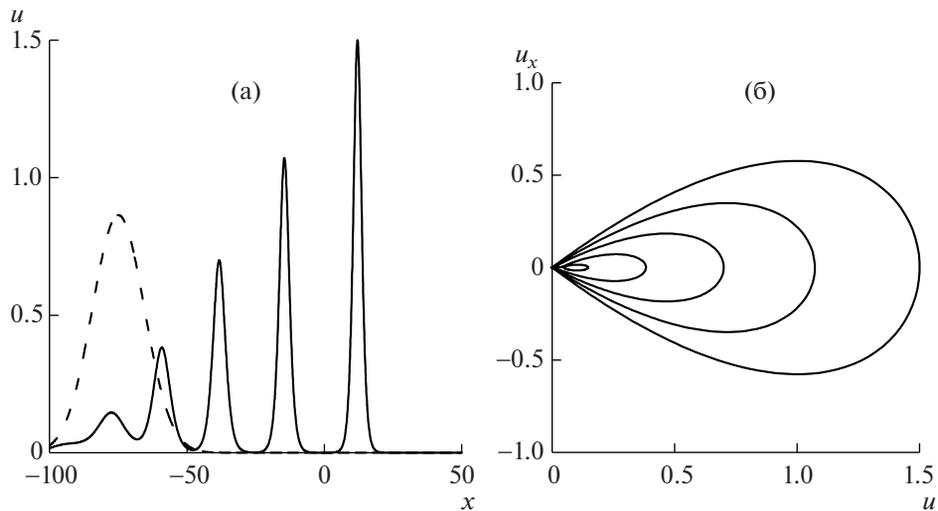
#### 1. Случай $K(u^2, F^1)$

Использовались начальные распределения в виде гауссовых функций или солитонов KdV. Поскольку решаемое уравнение при малых значениях решения близко к уравнению KdV, то появляется возможность непосредственной оценки влияния ограничения дисперсии на форму солитонов KdV. По мере увеличения их амплитуд начинает сказываться эффект ограничения дисперсии. Параметры начальных данных подбирались так, чтобы в одном расчетном примере появлялись основные типы решений. Рассмотрим эволюцию начального распределения в виде гауссоиды:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}(K, x_1, d) &= K\pi \exp[-(x - x_1)^2/d], \\ u(x, 0) &= \underline{\Gamma}(K, x_1, d), \quad K = 0.35, \quad x_1 = -75, \quad d = 180. \end{aligned}$$

Результаты для  $dx = 0.0625$  приведены на фиг. 2а. Начальное распределение (штриховая кривая) ко времени  $t = 189$  распадается на девять солитонов, наибольшие из которых имеют амплитуды 1.435, 1.307 и 1.195. На фиг. 2б дан фазовый портрет решения. Фазовые кривые показывают изменения формы солитонов с ростом амплитуды. Чем она больше, тем больше производные. Форма солитонов становится более заостренной, особенно вблизи максимума. Отметим, что в расчетах отсутствовали решения с амплитудами, большими 1.5, а также коватонные решения. Это можно объяснить тем, что при значениях  $u > \pi/2$  в выбранной модели дисперсия становится равной константе и исчезает член с третьей производной в уравнении (4). В связи с этим можно сравнить полученные солитоны с предельными амплитудами с пиконными решениями ряда нелинейных дисперсионных уравнений (например, Камассы–Холма, Холма–Хона), которые в фазовой плоскости представляются двумя наклонными прямыми и в экстремуме имеют разрыв производной (см. фиг. 1, кривая 3). Условимся называть солитоны с амплитудами, близкими к предельным, пикосолитонами. Вывод по данным решениям следующий. При малых значениях амплитуд солитоны похожи на солитоны KdV. При приближении их амплитуд к предельным значениям  $\pi/2$ , когда ограничения дисперсии существенны и нелинейность начинает преобладать, солитоны обостряются и приобретают форму пиконов.

В данном варианте было проведено тестирование численной схемы путем решения этой задачи при вдвое большем шаге  $dx = 0.125$ , что достигалось уменьшением вдвое числа гармоник при сохранении размера расчетной области. В этом случае амплитуды максимальных солитонов принимали значения 1.459, 1.326 и 1.189.



Фиг. 3.

Для получения дополнительных данных для сравнения с солитонами KdV был рассмотрен вариант с начальными условиями предыдущего варианта, но при  $K = 0.25$ . Решалось уравнение KdV. Результат представлен на фиг. 3 при  $t = 87$ . Образуется цепочка солитонов, наибольший из которых имеет амплитуду 1.506. Хотя и применяется демпфирование гармоник, но солитоны после разделения сохраняют максимальные значения до пятого знака. Фон между солитонами  $10^{-7}$ . В данном варианте демпфирование коротковолновой части спектра не влияет на гладкое солитонное решение. В правой части этой фигуры приведен вид решения в фазовой плоскости. Сравнение этих кривых с представленными на фиг. 2 дает возможность оценить влияние ограничения дисперсии на формы солитонов.

В этом разделе будет показано влияние ограничения нелинейной дисперсии при показателе степени  $n = 3$ . Для исследования использовались начальные данные в виде односолитонного решения KdV. Предположим

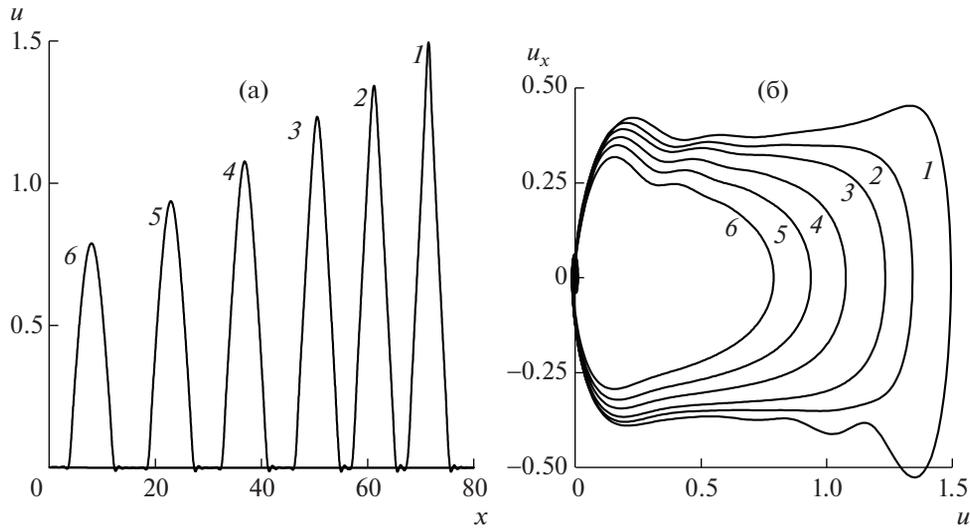
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 6a_s^2 \operatorname{sech}^2[a_s(x - x_s)], & a_s &= 10/3, & x_s &= -75, \\ D(k) &= \exp[-34(4(k - k_0)/N_k)^9], & k_0 &= 30, & dt &= 0.00030, \\ dx &= 0.03125, & N_k &= 4096, & N_x &= 8192, & L &= 256. \end{aligned}$$

Расчетами установлено (см. фиг. 4), что ко времени  $t = 87$  из одиночного солитона KdV при ограничении нелинейной дисперсии образуется ряд компактных решений, шесть из которых изображены на фиг. 4 в координатном и в фазовом пространствах. Они имеют амплитуды 1.495, 1.342, 1.233, 1.076, 0.933, 0.788. С ростом амплитуды форма их меняется. Если при малых амплитудах (кривые 5, 6) они близки к компактам уравнения Розенау–Хаймана  $K(2, 3)$ , то с увеличением амплитуды поведение их становится ближе к пиконным решениям, на что указывает увеличение градиентов вблизи максимума (кривые 1–4). Этот тип решений можно назвать пикокомпактом.

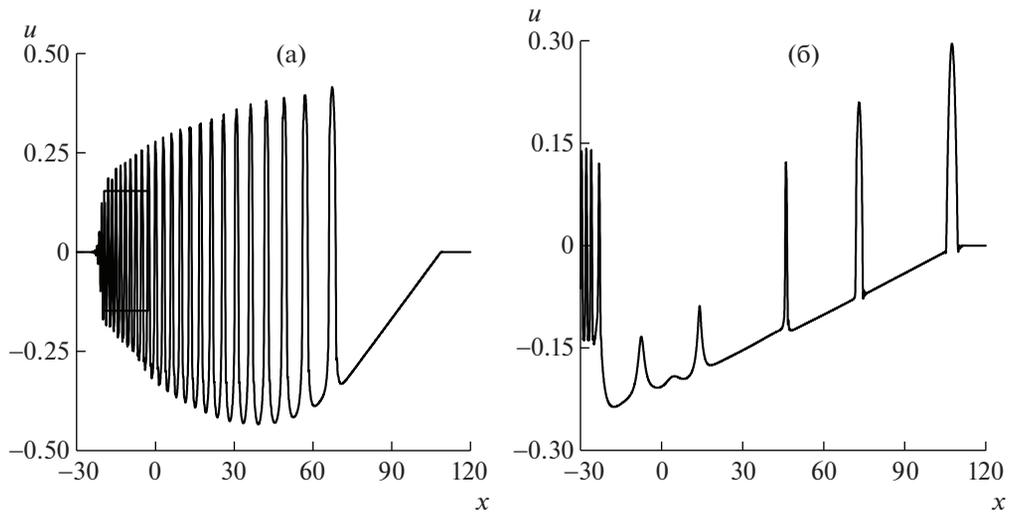
В данном варианте увеличение координатного шага интегрирования в два раза, достигаемое за счет двукратного уменьшения числа спектральных гармоник, привело (без изменения демпфирующей функции) к следующим значениям амплитуд: 1.412, 1.365, 1.267, 1.127, 0.9676, 0.8121.

Процесс генерации солитонов различных форм весьма разнообразен и в некоторых случаях приводит к интересным решениям. В качестве примера приведем вариант с начальными условиями отрицательной полярности

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -6a_s^2 \operatorname{sech}^2[a_s(x - x_s)], & a_s &= 5/3, & x_s &= 105, \\ D(k) &= \exp[-34(2(k - k_0)/N_k)^9], & k_0 &= 30, & dt &= 0.000075, \\ dx &= 0.03125, & N_k &= 4096, & N_x &= 8192, & L &= 256. \end{aligned}$$



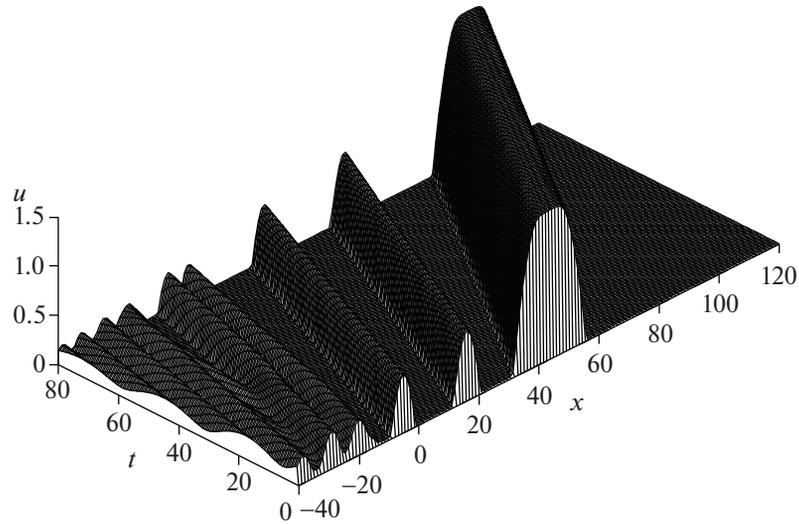
Фиг. 4.



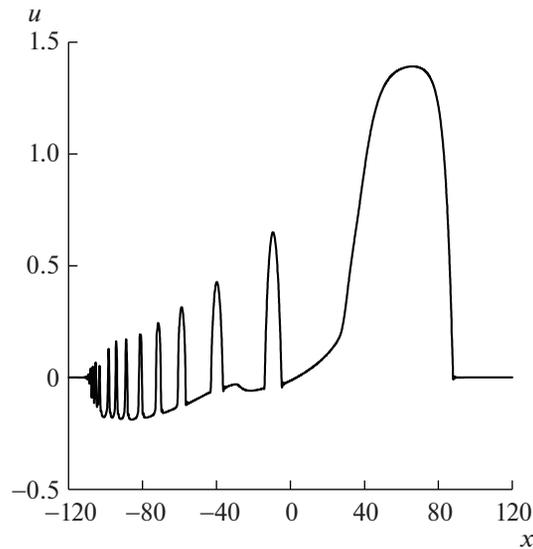
Фиг. 5.

Результат расчетов дан на фиг. 5а для времени  $t = 54$  и на фиг. 5б при  $t = 324$ . В начальные моменты времени образуются осцилляторная волна и примыкающая к ней линейная волна отрицательной полярности, правая граница которой неподвижна и находится при  $x_0 = 105$ . Левая граница движется в отрицательном направлении. В этой области находится быстро осциллирующий волновой пакет, который со временем распадается на ряд компактонов, распространяющихся по профилю линейной части решения в положительном направлении. На фиг. 5 компактоны пиконного типа имеют амплитуды соответственно 0.2959, 0.2093, 0.1221. Расчет с вдвое большим координатным шагом  $dx = 0.0625$ ,  $N_k = 2098$ ,  $N_x = 4096$ ,  $L = 256$  дает близкие значения этих амплитуд при неизменном законе демпфирования, а именно: 0.3019, 0.2186, 0.1264.

Данный вариант указывает на возможность существования компактонных решений, распространяющихся по линейному профилю, относительно медленно уменьшающему свой наклон. Аналогичные решения были получены ранее (см. [29]) в рамках уравнения Камассы–Холма для пиконных решений, где была также решена задача о парных взаимодействиях пиконов, распространяющихся по линейному профилю.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

#### 4. СВОЙСТВА КОМПАКТОНОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

##### 1. Случай $K(F^2, F^3)$

В этом разделе будут рассмотрены решения, соответствующие ограниченной нелинейности и ограниченной или неограниченной дисперсии. В этих случаях наряду с компактонными решениями появляются коватонные решения. Начальные данные формировались с помощью функции Гаусса.

Рассмотрим решения, получающиеся из начальных данных в виде

$$u(x, 0) = \underline{\Gamma}(K, x, d), \quad K = 0.5/1.16, \quad x = -75, \quad d = 380,$$

$$D(k) = \exp[-34(2(k - k_0)/N_k)^9], \quad k_0 = 30, \quad dt = 0.000075,$$

$$dx = 0.03125, \quad N_k = 4096, \quad N_x = 8192, \quad L = 256.$$

На фиг. 6 представлено решение при  $t = 54$ , состоящее из нескольких компактонов малой амплитуды и компактона с предельной амплитудой (1.450) ( $x = 40$ ), отличительной чертой которого является большая полуширина (теоретически любая) и наличие плато на вершине.

2. Случай  $K(F^2, u^3)$ 

Снятие ограничения на величину дисперсии (при фиксированном  $n = 3$ ) приводит к результатам, представленным на фиг. 7 при  $t = 270$  для варианта с начальными данными

$$u(x, 0) = \Gamma(K, x, d), \quad K = 0.50, \quad x = -35, \quad d = 580,$$

$$D(k) = \exp[-34(2(k - k_0)/N_k)^9], \quad k_0 = 30, \quad dt = 0.000075,$$

$$dx = 0.0625, \quad N_k = 2048, \quad N_x = 4096, \quad L = 256.$$

Данное решение имеет черты сходства с изображенными на фиг. 5 и фиг. 6 решениями. В первом случае оба решения имеют линейный отрицательный профиль с находящимися на нем компактами и имеющими положительную скорость. Отличие состоит в том, что наибольший компактон на фиг. 7 приобретает форму коватоны с амплитудой 1.394 и полушириной около 50 единиц. Если сравнить решения на фиг. 6 и фиг. 7, то они качественно похожи, но решение на фиг. 6 не имеет линейной волны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена исследованию форм компактонных решений уравнения KdV с нелинейными и дисперсионными членами, которые являются ограниченными функциями от решения в форме “сглаженной ступеньки”. В уравнениях Розенау–Хаймана (2) и Розенау–Пиковского (3) ранее рассматривались случаи зависимости обоих слагаемых или только от решения  $u$ , или только от  $\cos(u)$ . Входящие в эти уравнения показатели степени  $n$ ,  $m$  на свойства ограниченности не влияют, но определяют четность. В данной работе рассмотрены другие случаи, когда нелинейное слагаемое неограниченное, а дисперсионное ограниченное при двух показателях степени ( $n = 1$  и  $n = 3$ ). Численные расчеты показали, что в случае  $n = 1$  решения представляют собой солитоны пикообразной формы. Если показатель  $n = 3$ , то решения являются компактонами пикообразной формы. Хотя амплитуды этих решений не превышают  $\pi/2$ , но коватоные решения не были обнаружены. Коватоны появляются (см. разд. 4) в случае наложения ограничений на нелинейное слагаемое при дисперсии как ограниченной, так и неограниченной. В этих случаях найдены компактоны, распространяющиеся по линейному нестационарному профилю, т.е. реализуются решения с разными значениями на переднем и заднем фронтах – несимметричные нестационарные компактоны.

В работе большое внимание уделяется тестированию численной схемы на аналитических солитонных и компактонных решениях. Это связано с наличием у новых найденных решений особенностей не только вблизи нуля, но и особенность пиконного типа в максимуме. Поскольку в данном случае аналитические решения отсутствуют, то все обоснования вида данных решений основаны на возможностях схемы, которая, в свою очередь, имеет до четырех определяющих ее параметров. Особое внимание заслуживает выбор демпфирующей функции и накопленный опыт может быть полезен при численном моделировании уравнений, имеющих решения с особенностями. Например, негатонные и позитонные решения уравнения mKdV (см. [30]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х., Харрис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
2. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
3. *Маханьков В.Г.* Солитоны и численный эксперимент // Физ. элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14. Вып. 1. С. 123–180.
4. *Белова Т.И., Кудрявцев А.Е.* Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 4. С. 377–406.
5. *Захаров В.Е.* К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов // Ж. эксперим. и теор. физ. 1973. Т. 65. Вып. 1(7). С. 219–225.
6. *Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р., Богомазова О.В., Гумеров А.М.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // J. Magn. Mater. 2013. V. 339. P. 133–137.
7. *Шамсутдинов М.А., Шамсутдинов Д.М., Екомасов Е.Г.* Динамика доменных стенок в орторомбических антиферромагнетиках вблизи предельной скорости // Физ. металлов и металловедение. 2003. Т. 96. № 4. С. 16–22.

8. *Leblond H., Mihalache D.* Optical solitons in the few-cycle regime: recent theoretical results // Romanian Rept in Phys. 2011. V. 63. P. 1254–1266.
9. *Camassa R., Holm D.* An integrable shallow water equation with peaked soliton // Phys. Rev. Letts. 1993. V. 71. P. 1661–1664.
10. *Rosenau P., Hyman J.M.* Compactons: solitons with finite wavelengths // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. № 5. P. 564–567.
11. *Cooper F., Hyman J.M., Khare A.* Compacton solutions in a class of generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 2. P. 1–5.
12. *Rosenau P., Levy D.* Compactons in a class of nonlinearly quintic equations // Phys. Lett. A. 1999. V. 252. P. 297–306.
13. *Rosenau P.* Nonlinear dispersion and compact structures // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. № 13. P. 1737–1741.
14. *Rosenau P.* On nonanalytic solitary waves formed by a nonlinear dispersion // Phys. Lett. A. 1997. V. 230. № 5/6. P. 305–318.
15. *Rosenau P.* On a class of nonlinear dispersive–dissipative interactions // Physica D. 1998. V. 230. № 5/6. P. 535–546.
16. *Rosenau P.* Compact and noncompact dispersive structures // Phys. Lett. A. 2000. V. 275. № 3. P. 193–203.
17. *Garralon J., Villatoro F.R.* Numerical evaluation of compactons and kovatons of the K(cos) Rosenau–Pikovski equation // Math. and Comput. Modeling. 2012. V. 55. № 7–8. P. 1858–1865.
18. *Garralon J., Rus F., Villatoro F.R.* Numerical interactions between compactons and kovatons Rosenau–Pikovski K(cos) equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. V. 18. № 7. P. 1576–1588.
19. *de Frutos J., Lopez-Marcos M.A., Sanz-Serna J.M.* A finite difference scheme for the K(2, 2) compacton equation // J. Comput. Phys. 1995. V. 120. № 2. P. 248–252.
20. *Saucez P., Vande Wouwer A., Zegeling P.A.* Adaptive method of lines solutions for the extended fifth-order Korteweg–de Vries // J. Comput. and Appl. Math. 2005. V. 183. № 2. P. 343–357.
21. *Rus F., Villatoro F.R.* Pad'e numerical method for the Rosenau–Hyman compacton equation // Math. and comput. in simulation (MATCOM). 2007. V. 76. № 1. P. 188–192.
22. *Garralon J., Rus F., Villatoro F.R.* Removing trailing tails and delays induced by artificial dissipation in Pad'e numerical schemes for stable compacton collisions // Appl. Math. and Comput. 2013. V. 220. P. 185–192.
23. *Chertock A., Levy D.* Particle methods for dispersive equations // J. Comput. Phys. 2001. V. 171. № 2. P. 708–730.
24. *Sanz-Serna J.M., Christie I.* Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves // J. Comput. Phys. 1981. V. 39. № 1. P. 94–102.
25. *Levy D., Shu C.-W., Yan J.* Local discontinuous Galerkin methods for nonlinear dispersive equations // J. Comput. Phys. 2004. V. 196. № 2. P. 751–772.
26. *Rus F., Villatoro F.* Radiation in Numerical Compactons from Finite Element Methods // Proc. of the 8th WSEAS Internat. Conference on Appl. Math., Tenerife, Spain, December 16–18, 2005. P. 19–24.
27. *Понов С.П.* О применении квазиспектрального метода Фурье к солитонсодержащим уравнениям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2176–2183.
28. *Понов С.П.* Численный анализ солитонных решений модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза–синус–Гордона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 114–124.
29. *Понов С.П.* Численное исследование пиконов и к-солитонов уравнений Камассы–Холма и Холма–Хона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1317–1325.
30. *Rasinariu C., Sukhatme U., Khare A.* Negaton and positon solutions of the KdV and mKdV hierarchy // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. V. 29. № 8. P. 1803–1823.