ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 1, с. 50–62

УДК 519.633

# АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ДВИЖУЩИХСЯ ФРОНТОВ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ–АДВЕКЦИЯ[1)]

**© 2019 г. В. Т. Волков[1,*], Д. В. Лукьяненко[1,**], Н. Н. Нефедов[1,***]**

*([1]119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия)*

**e-mail: volkovvt@mail.ru*

***e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru*

****e-mail: nefedov@physics.ru*

Поступила в редакцию 24.08.2018 г.

В настоящей работе представлен аналитико-численный подход к изучению движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях типа реакция–диффузия–адвекция. Предложен метод генерации динамически адаптированной сетки для эффективного численного решения задач данного класса. Метод основан на априорной информации о движении и свойствах фронта, полученной в результате строгого асимптотического анализа сингулярно возмущенной параболической задачи. В частности, существенными параметрами, которые учитываются при построении сетки, являются оценки местоположения переходного слоя, его ширина и структура. Предлагаемый аналитико-численный подход позволяет значительно сэкономить вычислительные ресурсы, сократить время счета и повысить стабильность работы вычислительного процесса по сравнению с классическими подходами. Рассмотрен пример, демонстрирующий основные идеи и методику применения предлагаемого подхода. Библ. 21. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** модели типа реакция–диффузия–адвекция, сингулярные возмущения, движущиеся фронты, аналитико-численный метод.

**DOI:** 10.1134/S0044466919010150

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Решения сингулярно возмущенных параболических задач часто содержат характерные узкие пограничные и внутренние слои (стационарные или движущиеся фронты.) Численное исследование таких задач с помощью разностных схем требует использования сеток с очень большим количеством узлов. Это приводит в некоторых случаях к значительным вычислительным затратам, а также к неустойчивости численных алгоритмов. Для преодоления обеих проблем мы предлагаем асимптотико-численный подход к решению задач с движущимися внутренними слоями в нелинейных моделях типа реакция–диффузия–адвекция. Основная идея подхода базируется на следующем: чем меньше параметр $\varepsilon$ в сингулярно возмущенной задаче, тем более грубым и неустойчивым получается его численное решение; в то же время, тем более точную априорную информацию о решении возможно получить с помощью асимптотического анализа. Соответствующее сочетание асимптотического подхода и вычислительных методов позволяет повысить эффективность численных расчетов.

Эта идея была использована в последнее время многими авторами для задач со стационарными пограничными и внутренними слоями, например [1]–[10], где были предложены методы построения специальных сеток, учитывающих особенности решения. В случае движущихся внутренних слоев ряд разностных схем описан в работах [11]–[15], а также в работах [16] и [17], где были рассмотрены примеры периодических задач для сингулярно возмущенных параболических уравнений.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00042).

В данной работе представлен эффективный аналитико-численный подход для исследования периодических по времени задач типа реакция–диффузия–адвекция, решения которых содержат движущиеся внутренние слои (движущиеся фронты). Предложен метод построения динамически адаптированной сетки, основанный на априорной информации о решении, полученной в результате строгого асимптотического анализа задачи, развитого в [18]. Указанный подход позволяет сэкономить вычислительные ресурсы и увеличить скорость построения решения с приемлемой точностью, что особенно важно, например, при решении обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений. Оптимизация решения обратной задачи для уравнения реакция–диффузия–адвекция с использованием динамически адаптированной сетки реализована авторами в [19].

Численное исследование периодических по времени задач порождает ряд специфических особенностей. Одна из них заключается в том, что отсутствует информация о локализации внутреннего слоя в начальный момент времени. Для определения начальных условий, необходимых для дальнейших численных расчетов с динамически адаптированной сеткой, также используется асимптотический анализ задачи [18].

Альтернативным подходом к численному решению периодических задач может служить использование метода счета на установление. Однако в этом случае необходимо доказывать устойчивость решения и исследовать область влияния устойчивого решения для правильного выбора начального приближения. Проверка устойчивости и связанные с этим оценки также могут быть получены с использованием асимптотического анализа периодической задачи методами, разработанными в [18].

Заметим, что в примере, рассмотренном в разд. 4, вырожденное уравнение, а также задачи для определения локализации внутреннего слоя разрешимы в явном виде. В более общих случаях эти задачи также требуют численного решения. Также следует отметить, что в одном из подходов, представленных в данной работе, число узлов сетки вне области слоя растет при уменьшении параметра $\varepsilon$. Это не является необходимым требованием, но данный вариант выбора сетки имеет некоторые преимущества для численных расчетов в практических задачах с фиксированным $\varepsilon$ ввиду более простой реализации процедуры выполнения апостериорных асимптотически точных оценок погрешности. В работе также представлен альтернативный подход с использованием $\varepsilon$-независимой сетки.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 кратко описан асимптотический алгоритм, позволяющий получить априорную информацию, которая используется в дальнейшем для построения динамически адаптированной сетки. В разд. 3 кратко описаны основные идеи построения сетки. Наконец, в разд. 4 представлен численный эксперимент, обсуждаются его результаты и некоторые нюансы построения сетки в рассматриваемом примере.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Основные идеи предлагаемого подхода продемонстрируем на примере следующей задачи:

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=A(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+B(u,x,t),\\ (x,t)\in D:=\{x\in(-1,1);\quad t\in\mathbb{R}\},\\ u(-1,t)=u_{\text{left}}(t),\quad u(1,t)=u_{\text{right}}(t),\quad t\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=u(x,t+T),\quad x\in[-1,1],\quad t\in\mathbb{R},\end{gathered}\tag{1}$$

где $\varepsilon$ – малый параметр ($0<\varepsilon\ll 1$), а функции $A(u,x,t)$, $B(u,x,t)$, $u_{\text{left}}(t)$ и $u_{\text{right}}(t)$ – достаточно гладкие и $T$-периодические по переменной $t$.

Известно (см. [18]), что при определенных условиях сформулированная задача допускает решение вида движущегося фронта: на интервале $(-1,\ 1)$ существует точка $x_{tr}(t,\varepsilon)$, движущаяся по периодическому во времени закону, в окрестности которой наблюдается узкий внутренний переходный слой. А именно, слева от указанной точки (при $-1<x<x_{tr}(t,\varepsilon)$) решение близко к некоторому уровню $\varphi^l(x,t)$, а справа (при $x_{tr}(t,\varepsilon)<x<1$) – к уровню $\varphi^r(x,t)\neq\varphi^l(x,t)$ для всех $t$. Основной целью настоящей работы является развитие метода построения динамически адаптированной сетки для эффективного численного решения задач подобного типа с использованием априорной информации о локализации, ширине и структуре движущегося фронта, полученной путем строгого асимптотического анализа задачи (1), выполненного в работе [18]. Ниже мы кратко опишем основные идеи получения асимптотического приближения решения задачи (1) и используем ряд результатов и формул из [18].

Следуя [18], сформулируем основные условия.

Положив $\varepsilon = 0$ в (1), получаем вырожденное уравнение

$$A(u,x,t)\frac{du}{dx} + B(u,x,t) = 0, \tag{2}$$

где $t$ играет роль параметра. Определим в области $D := \{x \in (-1,1),\ t \in \mathbb{R}\}$ две функции $\varphi^l(x,t)$ и $\varphi^r(x,t)$ как решения следующих задач:

$$\begin{aligned}
&\varphi^l(x,t):\ A(u,x,t)\frac{du}{dx} + B(u,x,t) = 0, \quad u(-1,t) = u_{\text{left}}(t),\\
&\varphi^r(x,t):\ A(u,x,t)\frac{du}{dx} + B(u,x,t) = 0, \quad u(1,t) = u_{\text{right}}(t).
\end{aligned} \tag{3}$$

**Условие 1.** Пусть для всех $(x,t) \in \bar{D}$ существуют $T$-периодические по переменной $t$ решения $\varphi^l(x,t)$ и $\varphi^r(x,t)$ задач (3), причем для всех $(x,t) \in \bar{D}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \quad \varphi^l(x,t) < \varphi^r(x,t),\\
&\text{б)} \quad A(\varphi^l(x,t),x) > 0, \quad A(\varphi^r(x,t),x) < 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Определим следующую функцию в виде

$$I(x,t) := \int\limits_{\varphi^l(x,t)}^{\varphi^r(x,t)} A(u,x,t)du. \tag{5}$$

**Условие 2.** Пусть уравнение

$$I(x,t) = 0 \tag{6}$$

имеет $T$-периодическое решение $x_0(t)$, причем для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \quad -1 < x_0(t) < 1,\\
&\text{б)} \quad \int\limits_{\varphi^l(x_0(t),t)}^{s} A(u,x_0(t),t)du > 0 \quad \text{при} \quad s \in \left(\varphi^l(x_0(t),t),\ \varphi^r(x_0(t),t)\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

**Условие 3.** Пусть на решении $x_0(t)$ уравнения (6) выполнено неравенство

$$\frac{\partial I}{\partial x}\left(x_0(t),t\right) < 0 \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Положение переходного слоя (фронта) будем описывать функцией $x_{tr}(t,\varepsilon)$, которую представим в виде ряда по параметру $\varepsilon$

$$x_{tr}(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \tag{9}$$

где $x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, суть $T$-периодические функции, определяемые в процессе построения асимптотического приближения.

В дальнейшем использованы следующие обозначения:

$$D^l := \{x \in [-1, x_{tr}(t,\varepsilon)],\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$\bar{D}^r := \{x \in [x_{tr}(t,\varepsilon), 1],\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$\varphi(x,t) := \frac{1}{2}\left(\varphi^l(x,t) + \varphi^r(x,t)\right),$$

$$\xi := \frac{x - x_{tr}(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Асимптотика решения задачи (1) в областях $\bar{D}^l$ и $\bar{D}^r$ строится в виде

$$U^{l,r}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}^{l,r}(x,t,\varepsilon) + Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\bar{u}^{l,r}(x,t) + Q_i^{l,r}(\xi,t)\right). \tag{10}$$

Здесь $\bar{u}^{l,r}(x,t,\varepsilon)$ – регулярные функции, описывающие решение вдали от точки перехода $x_{tr}(t,\varepsilon)$ в областях $\bar{D}^l$ и $\bar{D}^r$; функции $Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon)$ описывают переходный слой (движущийся фронт) и существенны вблизи точки $x_{tr}(t,\varepsilon)$; $\xi = (x - x_{tr}(t,\varepsilon))/\varepsilon$, причем $\xi \le 0$ для функций с индексом $l$ и $\xi \ge 0$ для функций с индексом $r$.

Решения $U^l(x,t,\varepsilon)$ и $U^r(x,t,\varepsilon)$ в областях $\bar{D}^l$ и $\bar{D}^r$ гладко сшиваются в точке $x_{tr}(t,\varepsilon)$, и члены ряда (10) определяются путем применения асимптотической процедуры, описанной в [18].

Функции $\bar{u}_0^l(x,t) = \varphi^l(x,t)$ и $\bar{u}_0^r(x,t) = \varphi^r(x,t)$ суть решения вырожденного уравнения (2) при $x \in [-1, x_{tr}(t,\varepsilon))$ и $x \in (x_{tr}(t,\varepsilon), 1]$ соответственно. Далее, $\bar{u}_k^{l,r}(x,t)$, $k \ge 1$, находятся из линейных уравнений [18] и при каждом $k$ могут быть получены в явном виде.

Главный член асимптотики внутреннего переходного слоя (движущегося фронта) определяется из задачи

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \xi^2} - \left(A(\tilde{Q}, x_{tr}(t,\varepsilon), t)\right)\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = 0, \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad t \in \mathbb{R}, \\
\tilde{Q}(0, x_{tr}(t,\varepsilon)) = \varphi(x_{tr}(t,\varepsilon), t), \\
\tilde{Q}(-\infty, x_{tr}(t,\varepsilon)) = \varphi^l(x_{tr}(t,\varepsilon), t), \\
\tilde{Q}(+\infty, x_{tr}(t,\varepsilon)) = \varphi^r(x_{tr}(t,\varepsilon), t),
\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\tilde{Q}(\xi, x_{tr}(t,\varepsilon)) = \begin{cases} \varphi^l(x_{tr}(t,\varepsilon), t) + Q_0^l(\xi,t) & \text{при} \quad \xi \le 0, \\ \varphi^r(x_{tr}(t,\varepsilon), t) + Q_0^r(\xi,t) & \text{при} \quad \xi \ge 0. \end{cases} \tag{12}$$

Требование условия 1 обеспечивает существование единственного решения задачи (11). Кроме того, имеют место экспоненциальные оценки

$$\left|\tilde{Q}(\xi,t) - \varphi^{l,r}(x_{tr}(t,\varepsilon), t)\right| \le Ce^{-\varkappa|\xi|} \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

где $C$ и $\varkappa$ – положительные константы.

Функции $Q_k^{l,r}(\xi,t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, определяются из линейных задач, могут быть выписаны в явном виде и удовлетворяют экспоненциальным оценкам

$$\left|Q_k^{l,r}(\xi,t)\right| \le Ce^{-\varkappa|\xi|} \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

где $C$ и $\varkappa$ – положительные константы.

Уравнение для определения нулевого приближения $x_0(t)$ положения движущегося фронта имеет вид

$$\int\limits_{\varphi^l(x_0(t),t)}^{\varphi^r(x_0(t),t)} A(u, x_0(t), t)du \equiv I(x_0(t), t) = 0. \tag{15}$$

Требование условия 2 гарантирует существование $T$-периодического решения $x_0(t) \in (-1;1)$ задачи (15).

Для $x_1(t)$ и $x_k(t)$, $k = 2, 3, \ldots$ – следующих членов ряда (9), описывающего положение движущегося фронта, – получаются линейные уравнения

$$x_k(t) I_x(x_0(t), t) = \Phi_k(t), \tag{16}$$

где $\Phi_k(t)$ — известные достаточно гладкие $T$-периодические функции. В частности, явное выражение для $\Phi_1(t)$ приведено в [18]. Условие 3 обеспечивает существование $T$-периодических решений $x_k(t)$ задач (16) для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ .

Основной результат асимптотического анализа задачи (1) содержится в следующей теореме из [18].

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* 1—3. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon$ *существует* $T$*-периодическое по переменной* $t$ *решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *задачи* (1) *с внутренним переходным слоем, локализованным в окрестности точки* $x_0(t)$, *а именно*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^l(x,t) & \text{при} \quad x \in [-1; x_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \varphi^r(x,t) & \text{при} \quad x \in (x_0(t); 1], \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

*причем*

$$|u(x,t,\varepsilon) - U_n(x,t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^n, \quad (x,t) \in \bar{D},$$

*где положительная постоянная* $C$ *не зависит от* $\varepsilon$, *а*

$$U_n(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^l(x,t,\varepsilon) & \text{при} \quad -1 \le x \le \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ U_n^r(x,t,\varepsilon) & \text{при} \quad \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{17}$$

В формуле (17) функции $U_n^{l,r}(x,t,\varepsilon)$ — частичные суммы ряда (10), где $\xi$ заменено на

$$\xi_{n+1} = \frac{x - \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t)}{\varepsilon}.$$

Подводя итог, сформулируем основные результаты асимптотического анализа задачи (1), которые будут использованы в дальнейшем при построении динамически адаптированной сетки для численного решения.

Положение и скорость движения фронта. Два главных члена асимптотики по $\varepsilon$ локализации фронта $x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ определены в (15) и (16) (скорость движения фронта есть производная этих функций).

Оценка ширины переходного слоя может быть получена из (13) и (14). Ввиду экспоненциального характера примыкания функций, описывающих переходный слой, к уровням $\varphi^{r,l}(x,t)$ при $\xi \to \pm\infty$, в качестве оценки ширины слоя можно использовать

$$d = C|\varepsilon \ln \varepsilon|. \tag{18}$$

Ширина области, где должно быть произведено сгущение сетки, зависит также от параметра $\varkappa$ из (13). При заданных функциях $A(u,x,t)$ и $B(u,x,t)$ и граничных условиях $u_{\text{left}}(t)$, $u_{\text{right}}(t)$) этот параметр может быть оценен. Для примера, который рассмотрен ниже в разд. 4 статьи, можно получить, что $\varkappa > 1$.

Структура внутреннего переходного слоя определяется видом решения задачи (11) и оценками (13), (14).

В разд. 4 предлагаемый подход построения динамически адаптированной сетки проиллюстрирован на конкретном примере задачи типа (1) с $A(u,x,t) = -u$ и $B(u,x,t) = u \times b(t)$, где $b(t) = 2 + \cos(4\pi t)$:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -u\frac{\partial u}{\partial x} + ub(t), \quad x \in (-1; 1), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$u(-1,t) = u_{\text{left}}(t) \equiv -8 + \sin(4\pi t),$$
$$u(1,t) = u_{\text{right}}(t) \equiv 8 - 2\sin(4\pi t).$$

Для данного примера из (3) получим

$$\varphi^l(x,t) = -8 + \sin(4\pi t) + (x+1)\big(2+\cos(4\pi t)\big), \tag{19}$$

$$\varphi^r(x,t) = 8 - 2\sin(4\pi t) + (x-1)\big(2+\cos(4\pi t)\big). \tag{20}$$

Условие 1 выполнено, так как для всех $x \in [-1, 1]$ имеет место

а) $\varphi^l(x,t) - \varphi^r(x,t) = -16 + 2\big(2+\cos(4\pi t)\big) + 3\sin(4\pi t) < 0;$

б) $A(\varphi^l(x,t), x, t)) = 8 - (x+1)\big(2+\cos(4\pi t)\big) - \sin(4\pi t) > 0,$

$A(\varphi^r(x,t), x, t) = -8 - (x-1)\big(2+\cos(4\pi t)\big) + 2\sin(4\pi t) < 0.$

Функция $I(x,t)$, определенная в (5), имеет вид

$$I(x,t) = \int\limits_{\varphi^l(x,t)}^{\varphi^r(x,t)} -u du = \frac{1}{2}\Big(\varphi^l(x,t) - \varphi^r(x)\Big)\Big(\varphi^l(x,t) + \varphi^r(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(2x\big(2+\cos(4\pi t)\big) - \sin(4\pi t)\big)\big(-16 + 2\big(2+\cos(4\pi t)\big) + 3\sin(4\pi t)\big),$$

и решение уравнения (15), определяющего главный член асимптотики положения фронта, есть

$$x_0(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{4 + 2\cos(4\pi t)} \in [-1;1] \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Нетрудно проверить, что условия 2 и 3 для $x_0(t)$ выполнены.

В следующем приближении из уравнения (16) с учетом явного выражения для $\Phi_1(t)$ из [18] получаем

$$x_1(t) = -\frac{1}{2b(t)}\Big[2x_0'(t) + \Big(\bar{u}_1^l(x_0(t),t) + \bar{u}_1^r(x_0(t),t)\Big)\Big], \tag{22}$$

где

$$\bar{u}_1^l(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{\text{left}}(t)}{b(t)}\right]\ln\left(1 + \frac{b(t)}{u_{\text{left}}(t)}(x+1)\right) + \frac{d}{dt}\big[\ln(b(t))\big](x+1)$$

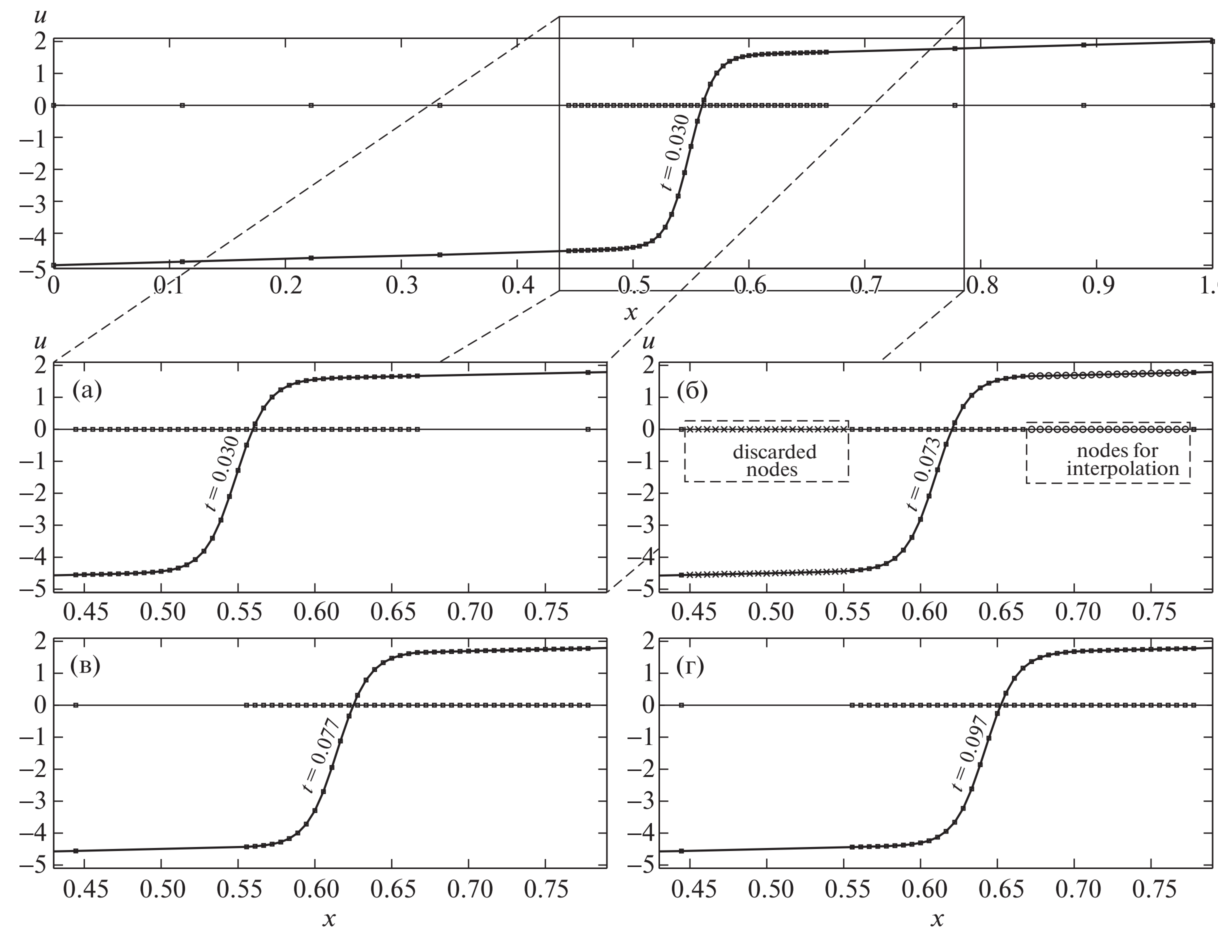
и

$$\bar{u}_1^r(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{\text{right}}(t)}{b(t)}\right]\ln\left(1 + \frac{b(t)}{u_{right}(t)}(x-1)\right) + \frac{d}{dt}\big[\ln(b(t))\big](x-1).$$

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ АДАПТИРОВАННОЙ СЕТКИ

В этом разделе описан алгоритм построения динамически адаптированной сетки, область сгущения которой определяется на основе априорной информации о параметрах движущегося фронта. Важнейшим условием реализации предлагаемого алгоритма является возможность получения соответствующей априорной информации (положение, скорость, ширина переходного слоя), выполнение которого было продемонстрировано выше на основе строгого асимптотического анализа, проведенного в [18].

Сформулируем основные этапы предлагаемого подхода. Вначале строится равномерная сетка $T_M$ только по переменной $t$ с числом узлов $M+1$ (что эквивалентно $M$ интервалам сетки): $T_M = \left\{t_m, 0 \le m \le M : t_m = 0 + \frac{T-0}{M}(m-1)\right\}$. Также возможно использование квазиравномерных сеток, описанных в [21], без каких-либо изменений в дальнейшем алгоритме. Заметим, что выбор правильного шага по времени $\tau = (T-0)/M$ в случае равномерной сетки очень важен. В процессе построения динамически адаптированной сетки возможно возникновение ситуации, когда область локального сгущения сетки на очередном временном слое не имеет пересечения (или данное пересечение слишком мало) с областью локального сгущения на предыдущем слое по




**Фиг. 1.** Динамически адаптированная сетка.

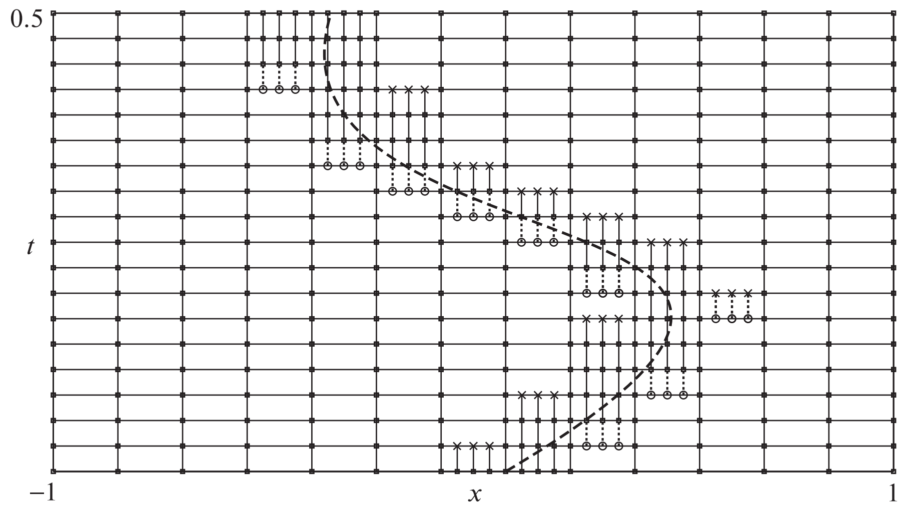
времени. Во избежание указанной проблемы при переходе на новый слой нужно проверять условие на максимальный шаг по времени $\tau$, а именно, фронт не должен покидать текущую область локального сгущения сетки в пределах одного шага по времени:

$$\tau \leq \max_{t \in [0,T]} \left| x'_{tr}(t_i) \right| \leq C \left| \varepsilon \ln \varepsilon \right|. \tag{23}$$

Таким образом, $\tau = O(|\varepsilon \ln \varepsilon|)$ или $M = O(|\varepsilon \ln \varepsilon|^{-1})$, что означает, что сетка будет являться $\varepsilon$-зависимой по пространственной переменной.

Идея построения динамически адаптированной сетки по переменной $x$ заключается в следующем. Зная оценку ширины переходного слоя, вводим базовую равномерную сетку по переменной $x$ с интервалами, величина каждого и которых равна ширине переходного слоя. Затем сгущаем сетку в пределах двух ближайших к точке перехода базовых интервала (см. фиг. 1а). Далее, положение переходного слоя известно, для каждого шага по времени проверяем, находится ли фронт в пределах этих интервалов или нет. Если фронт начинает покидать один из этих интервалов, сгущаем сетку в пределах следующего или предыдущего базового интервала и выполняем интерполяцию функции в добавленных узлах (см. фиг. 1б). Для соответствующей интерполяции используется информация о структуре переходного слоя. В дальнейших расчетах узлы сгущенного интервала, наиболее удаленного от текущего положения точки перехода, исключаются из последующих вычислений. В результате выполнения описанной процедуры мы снова имеем сгущенную сетку только в пределах двух базовых интервалов (см. фиг. 1в, г).

Далее, уточним некоторые детали процесса построения динамически адаптированной сетки $X_N T_m \equiv X_N(t_m)$, $0 \leq m \leq M$, для слоя $m$ сетки $T_M$.




**Фиг. 2.** Построение динамически адаптированной сетки: □ – узлы, используемые при вычислениях; o – узлы, в которых производится интерполяция; × – узлы, исключенные из рассмотрения на последующих шагах.

1. Вначале вводится базовая равномерная сетка $X_{N_0}^{(0)}$ по переменной $x$ с шагом $h_0 = (1-(-1))/N_0$ и $N_0+1$ узлами (т.е. $N_0$ интервалами): $X_{N_0}^{(0)} = \left\{x_n^{(0)}, 0 \le n \le N_0 \colon x_n^{(0)} = 0 + nh_0\right\}$. Число узлов $N_0$ выбирается на основе априорной информации о ширине переходного слоя и может быть получено с использованием оценки (18):

$$N_0 = \left[\frac{1-(-1)}{|\varepsilon \ln \varepsilon|}\right].$$

2. Затем строится семейство кусочно-равномерных сеток $\left\{X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n,n+1}\right\}$, $0 \le n \le N_0 - 2$, где $(n+1)$-й и $(n+2)$-й интервалы базовой сетки дополнительно разбиты на $N_{\text{int}}$ интервалов. Таким образом, суммарное число интервалов теперь равно $N = N_0 - 2 + 2N_{\text{int}}$:

$$X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n,n+1} = \Big\{x_m,\ 0 \le m \le N_0 - 2 + 2N_{\text{int}},\ 0 \le n \le N_0 : 0 = x_0 = x_0^{(0)} < x_1 = x_1^{(0)} < \ldots < x_n =$$

$$= x_n^{(0)} < x_{n+1} = x_n^{(0)} + 1\frac{x_{n+1}^{(0)} - x_n^{(0)}}{N_{\text{int}}} < x_{n+2} = x_n^{(0)} + 2\frac{x_{n+1}^{(0)} - x_n^{(0)}}{N_{\text{int}}} < \ldots < x_{n+N_{\text{int}}-1} =$$

$$= x_n^{(0)} + (N_{\text{int}} - 1)\frac{x_{n+1}^{(0)} - x_n^{(0)}}{N_{\text{int}}} << x_{n+N_{\text{int}}} = x_{n+1}^{(0)} < x_{n+N_{\text{int}}+1} = x_{n+1}^{(0)} + 1\frac{x_{n+2}^{(0)} - x_{n+1}^{(0)}}{N_{\text{int}}} < \ldots$$

$$\ldots < x_{n+N_{\text{int}}+N_{\text{int}}-1} = x_{n+1}^{(0)} + (N_{\text{int}} - 1)\frac{x_{n+2}^{(0)} - x_{n+1}^{(0)}}{N_{\text{int}}} < x_{n+N_{\text{int}}+N_{\text{int}}} = x_{n+2}^{(0)} <$$

$$< x_{n+2N_{\text{int}}+1} = x_{n+3}^{(0)} < \ldots < x_{N_0-3+2N_{\text{int}}} = x_{N_0-1}^{(0)} < x_{N_0-2+2N_{\text{int}}} = x_{N_0}^{(0)} = 1\Big\}.$$

Заметим, что для выполнения апостериорных асимптотически точных оценок погрешностей удобно, чтобы базовая сетка $X_{N_0}^{(0)}$ была равномерной. В этом случае для оценки погрешности достаточно использовать только те узлы базовой сетки, которые совпадают на каждой сетке семейства $\left\{X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n,n+1}\right\}$.

3. Используя формулы (21) и (22) (или, в общем случае, уравнения (15) и (16)), получаем оценку положения точки перехода

$$x_{tr}(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2). \tag{24}$$

Важно, что в соответствии с результатом теоремы 1, для аппроксимации решения с точностью $O(\varepsilon)$, необходимо использовать два первых слагаемых ряда (22) для $x_{tr}(t,\varepsilon)$, описывающего положение движущегося фронта. В противном случае положение точки перехода может быть потеряно в процессе численных расчетов.

Имея оценку локализации фронта, фиксируем интервал базовой сетки, который содержит точку $x_{tr}(t_0,\varepsilon)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_{tr}(t_0,\varepsilon)$ находится на $n$-м интервале $\left[x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}\right)$ сетки $X_{N_0}^{(0)}$. Если $x_{tr}(t_0,\varepsilon) \ge \left(x_{n-1}^{(0)} + x_n^{(0)}\right)/2$, то используем сетку $X_N(t_0) = X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n-1,n}$ и полагаем $n := n+1$; в противном случае $X_N(t_0) = X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n-2,n-1}$ и $n := n$.Считаем, что $m = 0$.

4. Далее, положим $m := m+1$. Если $\left(x_{n-2}^{(0)} + x_{n-1}^{(0)}\right)/2 \le x_{tr}(t_m,\varepsilon) < \left(x_{n-1}^{(0)} + x_n^{(0)}\right)/2$, то используем сетку $X_N(t_m) = X_N(t_{m-1})$. Если $x_{tr}(t_m,\varepsilon) > (x_{n-1}^{(0)} + x_n^{(0)})\ /\ 2$, то для дальнейших вычислений используем сетку $X_N(t_m) = X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n-1,n}$. В этом случае мы исключаем из процесса значения сеточной функции $\mathbf{u}(t_{m-1})$ на $(n-1)$-м интервале базовой сетки $X_{N_0}^{(0)}$ и интерполируем ее на сгущенный $(n+1)$-й интервал базовой сетки. Для правильной интерполяции используется априорная информация (см. (13)) об экспоненциальном характере стремления интерполируемой функции к уровням $\varphi^r(x,t)$ и $\varphi^l(x,t)$. В случае $x_{tr}(t_m,\varepsilon) < \left(x_{n-2}^{(0)} + x_{n-1}^{(0)})\right)/2$ для дальнейших вычислений используется сетка $X_N(t_m) = X_{N_0,N_{\text{int}}}^{n-3,n-2}$. Из процесса исключаются значения сеточной функции $\mathbf{u}(t_{m-1})$ на $n$-м интервале базовой сетки $X_{N_0}^{(0)}$ и аналогичным образом производится интерполяция на сгущенный $(n-2)$-й базовый интервал. Затем полагаем $n := n+1$.

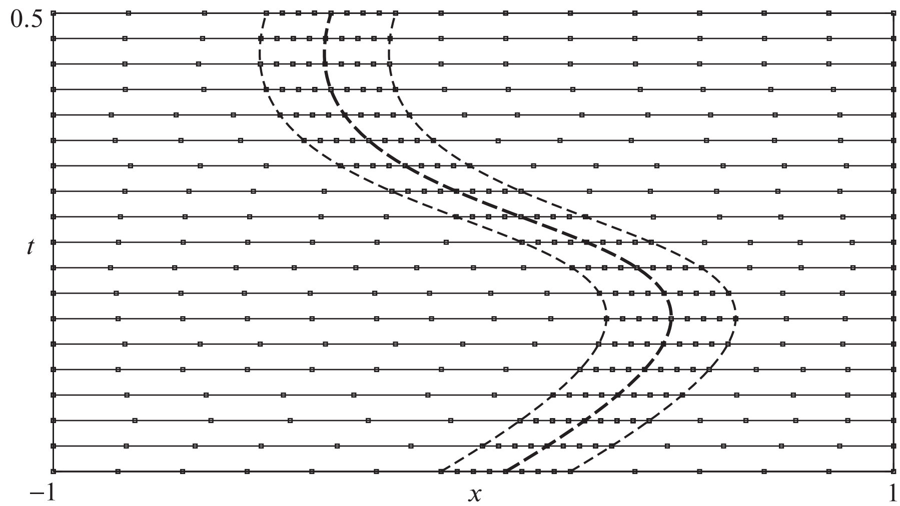
Как было отмечено выше, для интерполяции используется априорная информация (13) об экспоненциальном характере стремления интерполируемой функции к уровням $\varphi^r(x,t)$ и $\varphi^l(x,t)$. Записав этот факт в виде формулы $\left|\varphi^r(x) - y\right| = ae^{bx}$ $(\left|\varphi^l(x) - y\right| = ae^{bx})$ (или в эквивалентном виде $\log a + bx = \log\left|\varphi^r(x) - y\right|$) для пары интерполируемых точек $(x,y)$, можно получить коэффициенты $a$ и $b$ интерполирующей функции $f(x) = \varphi^r(x) + ae^{bx}$ и $f(x) = \varphi^l(x) + ae^{bx}$.

5. Если $m = M$, то процесс завершается. В противном случае, переходим к п. 4.

### *3.1. Динамически адаптированная $\varepsilon$-независимая сетка*

Заметим, что динамически адаптированная сетка, процесс построения которой описан выше, является $\varepsilon$-зависимой по переменной $x$, т.е число узлов сетки растет, если $\varepsilon$ стремится к нулю. Однако этот выбор сетки имеет ряд преимуществ для численных расчетов в практических задачах с фиксированным $\varepsilon$. Во-первых, используя асимптотическую информацию о положении фронта, мы уточняем только два интервала базовой сетки, что в любом случае обеспечивает более экономичные численные расчеты по сравнению с равномерной сеткой. Во-вторых, узлы базовой грубой сетки фиксированы, следовательно, базовая сетка такого типа позволяет упростить процедуру интерполяции для вновь вводимых узлов нестационарной сгущенной сетки: не нужно вычислять значения сеточной функции во всех узлах, а необходимо лишь выполнить интерполяцию в двух вновь вводимых сгущенных интервалах сетки. Это дает возможность также упростить процедуру апостериорного контроля точности с помощью экстраполяции Ричардсона, выполненной только на базовой сетке.

Теперь рассмотрим другой подход к построению динамически адаптированной сетки, $\varepsilon$-независимой по пространственной переменной $x$. Эта сетка в каждый момент времени имеет одинаковое (или пропорциональное) количество узлов внутри и вне области локализации внутреннего слоя, причем их число не зависит от малого параметра $\varepsilon$.




**Фиг. 3.** Пример построения $\varepsilon$-независимой динамически адаптированной сетки $XT_M$.

Для каждого временного слоя $m$ сетки $T_M$ вводим кусочно-равномерную сетку $XT_m$ по переменной $x$, с равномерным сгущением в $\varepsilon\ln\varepsilon$-окрестности точки перехода $x_{tr}(t_m)$:

$$XT_m = \{x_n,\ 0 \le n \le N + KN : x_n = 0 \text{ для } n = 0,\ x_n = x_{n-1} + h_{\text{left}} \text{ для } n = \overline{1, N_{\text{left}}},$$
$$x_n = x_{n-1} + h_{\text{int}} \text{ для } n = \overline{N_{\text{left}} + 1, N_{\text{left}} + KN},$$
$$x_n = x_{n-1} + h_{\text{right}} \text{ для } n = \overline{N_{\text{left}} + K_{\text{int}}N + 1, N + KN}\},$$

где $N$ — управляющий параметр, который определяет число интервалов внутри области переходного слоя. При этом интервалы вне области фронта нормируются так, что $h_{\text{left}} \cong h_{\text{right}}$:

$$N_{\text{left}} = \left[\frac{(x_{tr}(t_m) - C|\ln\varepsilon|) - (-1)}{1 - (-1) - 2C|\varepsilon\ln\varepsilon|}N\right], \quad N_{\text{right}} = N - N_{\text{left}},$$
$$h_{\text{left}} = \frac{(x_{tr}(t_m) - C|\varepsilon\ln\varepsilon|) - (-1)}{N_{\text{left}}}, \quad h_{\text{right}} = \frac{1 - (x_{tr}(t_m) + C|\varepsilon\ln\varepsilon|)}{N_{\text{right}}}, \quad h_{\text{int}} = \frac{2C|\varepsilon\ln\varepsilon|}{K_{\text{int}}N}.$$

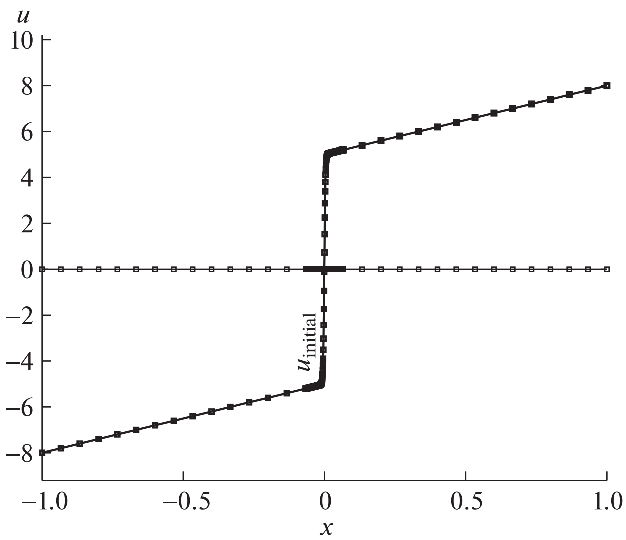
Здесь $C$ — управляющий параметр, позволяющий регулировать ширину области сгущения (по умолчанию $C = 1$); $K$ — управляющий параметр, задающий относительную плотность сгущения в области внутреннего переходного слоя (по умолчанию $K = 1$).

В результате получаем динамически адаптированную сетку $XT_M$ (см. фиг. 3), которая на каждом слое по времени $T_m$ имеет фиксированное число интервалов $N + KN$.

## 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В данном разделе предложенный метод проиллюстрирован на примере уравнения Бюргерса с периодическими коэффициентами

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + u\frac{\partial u}{\partial x} - b(t)u = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, 1.5],$$
$$u(-1,t) = u_{\text{left}}(t), \quad u(1,t) = u_{\text{right}}(t), \quad t \in (0, 1.5], \tag{25}$$
$$u(x,0) = u_{\text{init}}(x), \quad x \in [-1, 1],$$




**Фиг. 4.** Пример начального условия $u_{\text{init}}(x)$ для $\varepsilon = 10^{-2}$ (в окрестности переходного слоя выполнено сгущение сетки).

где

$$\begin{gathered} u_{\text{left}}(t) = -8 + \sin(4\pi t), \\ u_{\text{right}}(t) = 8 - 2\sin(4\pi t), \\ b(t) = 2 + \cos(4\pi t). \end{gathered} \tag{26}$$

Как было показано в конце разд. 2, все условия применимости процедуры асимптотического анализа [18] для данного примера выполнены.

Зададим начальное условие $u_{\text{init}}(x)$ как решение стационарной задачи (см. фиг. 4):

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + g\frac{\partial g}{\partial x} - b(0)g = 0, \quad x \in (-1, 1), \\ g(-1) = u_{\text{left}}(0), \quad g(1) = u_{\text{right}}(0). \end{gathered}$$

Для численного решения уравнения (25) применяется жесткий метод прямых (SMOL), т.е. уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть решена по схеме Розенброка с комплексными коэффициентами [20]:

$$\begin{gathered} \frac{du_n}{dt} = \frac{2}{x_{n+1} - x_{n-1}}\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right) + \frac{1}{\varepsilon}u_n\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon}b(t)u_n, \quad n = \overline{1, N-1}, \\ u_0 = u_{\text{left}}(t), \quad u_N = u_{\text{right}}(t), \quad t \in (0, 1.5], \\ u(x_n, 0) = u_{\text{init}}(x_n), \quad n = \overline{0, N}. \end{gathered}$$

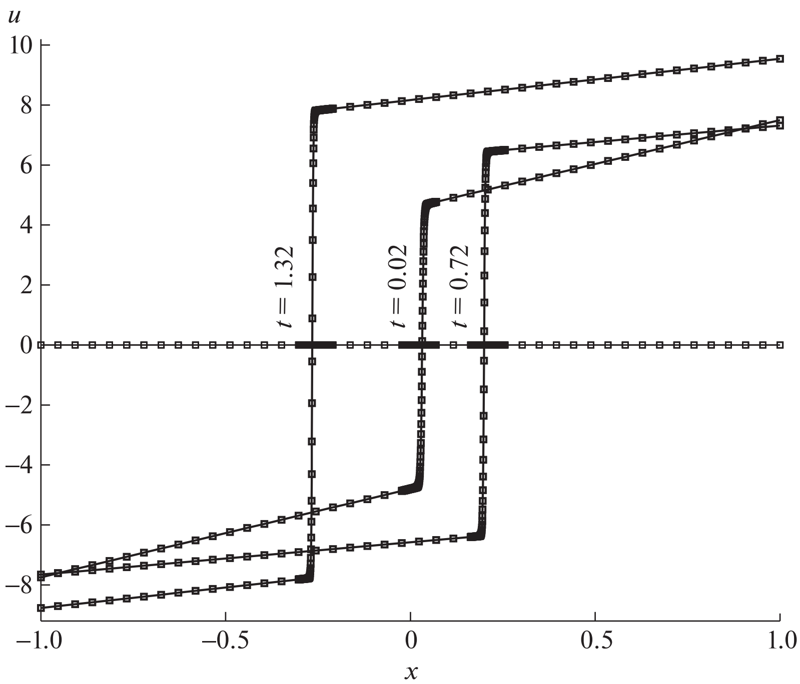
Данная система может быть переписана в виде

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad t \in (0, 1.5], \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{\text{init}}, \end{gathered} \tag{27}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots u_{N-1})^{\text{т}}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, \ldots f_{N-1})^{\text{т}}$ and $\mathbf{u}_{\text{init}} = (u_{\text{init}}(x_1), u_{\text{init}}(x_2), u_{\text{init}}(x_3), \ldots u_{\text{init}}(x_{N-1}))^{\text{т}}$.

Численное решение системы (27) строится по схеме Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1), которая является монотонной, устойчивой и обеспечивает порядок точности $O(\tau^2)$ [20]:

$$\mathbf{u}(t_{m+1}) = \mathbf{u}(t_m) + (t_{m+1} - t_m)Re\,\mathbf{w}, \tag{28}$$




**Фиг. 5.** Пример численного расчета для $\varepsilon = 10^{-2}$. Параметр $N_0 = 43$ (вычисляется автоматически), $N_{\text{int}} = 100$ (управляющий параметр, выбираемый вручную).

где $\mathbf{w}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left[E - \frac{1+i}{2}(t_{m+1} - t_m)\,\mathbf{f}_{\mathbf{u}(\mathbf{u}(t_m),t)}\right]\mathbf{w} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}(t_m), \frac{t_m + t_{m+1}}{2}\right),$$

$E$ – единичная матрица, а $\mathbf{f}_\mathbf{u}$ – матрица Якоби.

В численной схеме (28) используются значения сеточной функции $\mathbf{u}(t_m)$, вычисленные на сетке $XT_m$. После применения схемы (28) необходимо интерполировать сеточную функцию $\mathbf{u}(t_{m+1})$ на сетку $XT_{m+1}$. Заметим, что процедуры указанной интерполяции различны для разных подходов построения динамически адаптированной сетки, предложенных выше: в первом случае ($\varepsilon$-зависимая сетка) выполняется только локальная интерполяция с использованием информации о структуре внутреннего переходного слоя; во втором случае ($\varepsilon$-независимая сетка) необходимо производить полную интерполяцию.

Пример результатов численных расчетов представлен на фиг. 5.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование численных методов для решения сингулярно возмущенных задач, как правило, сталкивается с проблемами, связанными с наличием малого параметра: чем меньше параметр, тем менее точным и менее устойчивым получается численное решение. С другой стороны, чем меньше параметр, более точную априорную информацию о решении можно получить на основе асимптотического анализа. Этот факт дает возможность для продуктивного сочетания асимптотического и численного подходов с целью существенного повышения эффективности вычислительного эксперимента.

На основе этих идей предложен аналитико-численный метод для решения некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция, позволяющий существенно повысить устойчивость и скорость численных расчетов по сравнению с классическими подходами. Разработанный алгоритм с использованием динамически адаптированных сеток был применен авторами и показал высокую эффективность для решения систем с малыми параметрами (см. [14]), а также оптимизации решения обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция (см. [19]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishkin G.* Grid approximation of a singularly perturbed quasilinear equation in the presence of a transition layer // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 1993. V. 47. № 1. P. 83–88.
2. *O'Riordan E., Shishkin G.* Singularly perturbed parabolic problems with non-smooth data // J. of Comput. and Appl. Math. 2004. 66. № 1. P. 233–245.
3. *Franz S., Kopteva N.* Green's function estimates for a singularly perturbed convection-diffusion problem // J. Differential Equations. 2012. V. 252. № 2. P. 1521–1545.
4. *Kopteva N.* Numerical analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem // Lecture Notes in Computer Sci. 2009. V. 5434. P. 80–91.
5. *Kopteva N., O'Riordan E.* Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations // Internat. J. of Numerical Analysis and Modeling. 2010. V. 1. № 1. P. 1–18.
6. *Farrell P., Hegarty A., Miller J., O'Riordan E., Shishkin G.* Robust computational techniques for boundary layers // Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL. 2000.
7. *O'Riordan E., Quinn J.* Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem // Lect. Notes in Comput. Sci. and Eng. 2011. V. 81. P. 187–195.
8. *O'Riordan E., Quinn J.* Parameter-uniform numerical method for some linear and nonlinear singularly perturbed convection-diffusion boundary turning point problems // BIT Numerical Math. 2011. V. 51. № 2. P. 317–337.
9. *Kopteva N., Stynes M.* Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solutions // Applied Numerical Math. 2004. V. 51. P. 273–288.
10. *Kopteva N., Stynes M.* Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem // Numerische Math. 2011. V. 119. № 2. P. 787–810.
11. *Shishkin G.I., Shishkina L.P., Hemker P.W.* A class of singularly perturbed convection-diffusion problems with a moving interior layer. An a Posteriori Adaptive Mesh Technique // Comput. Meth. Appl. Math. 2004. V. 4. № 1. P. 105–127.
12. *Shishkin G.* Grid approximation of a singularly perturbed parabolic equation on a composite domain in the case of a concentrated source on a moving interface // Comput. Math. and Math. Phys. 2003. V. 43. № 12. P. 1738–1755.
13. *Shishkin G.* Necessary conditions for ε-uniform convergence of finite difference schemes for parabolic equations with moving boundary layers // Comput. Math. and Math. Phys. 2007. V. 47. № 10. P. 1636–1655.
14. *Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D.* Front dynamics in an activator-inhibitor system of equations // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. V. 10187. P. 492–499.
15. *Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N.* Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. V. 10187. P. 721–729.
16. *Quinn J.* A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location // Comput. and Appl. Math. 2015. V. 290. № 15. P. 500–515.
17. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.* Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. V. 10187. P. 107–118.
18. *Nefedov N., Recke L., Schneider K.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Analysis and Appl. 2013. V. 405. № 1. P. 90–103.
19. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communicat. in Nonlinear Sci. and Numerical Simulat. 2018. V. 54. P. 233–247.
20. *Al'shinn A.B., Al'shina E.A., Kalitkin N.N., Koryagina A.B.* Rosenbrock schemes with complex coefficients for stiff and differential algebraic systems // Comput. Math. and Math. Phys. 2006. V. 46. № 8. P. 1320–1340.
21. *Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina E.A., Rogov B.V.* Computations on Quasi-Uniform Grids. Moscow: Fizmatlit, 2005 [in Russian].