ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 10, с. 1769–1778

УДК 519.635

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПОТОКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВЕНАДЦАТИМОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА[1)]

© 2019 г. Ш. А. Акимжанова[1,*], А. Сакабеков[2,]**

([1] 050040 Алматы, ул. Сатпаева, 22, Казахский нац. исслед. ун-т, Казахстан;
[2] 050040 Алматы, пр-т Альфараби, 71, Казахский нац. ун-т, Казахстан)
**e-mail: shinar_a@mail.ru*
***e-mail: auzhani@gmail.com*

Поступила в редакцию 23.03.2019 г.
Переработанный вариант 19.04.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

Приведена постановка граничных условий для одномерной нелинейной нестационарной системы уравнений Больцмана в пятом приближении. Аппроксимируются микроскопические граничные условия Максвелла в случае одномерного уравнения Больцмана, когда часть молекул отражается от поверхности зеркально, а часть – диффузно с максвелловским распределением. Сформулирована начально-краевая задача для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана при граничных условиях Максвелла-Аужана. Для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана поставятся шесть граничных условий на левом и правом концах интервала $(-a, a)$. Библ. 17.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, система моментных уравнений Больцмана, граничное условие Максвелла, макроскопические граничные условия Максвелла-Аужана.

DOI: 10.1134/S0044466919090023

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи динамики разреженного газа требуют решение той или иной задачи для уравнения Больцмана. Прогнозирование аэродинамических характеристик летательных аппаратов при очень высоких скоростях и на больших высотах является важной проблемой аэрокосмической техники.

В случае течения газа около твердого тела или внутри области ограниченной твердой поверхностью, граничные условия описывают взаимодействие молекул газа с твердыми стенками. К сожалению, для изучения взаимодействия газа с поверхностью при очень высоких скоростях и на больших высотах проводить эксперименты почти невозможно. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов при очень высоких скоростях и на больших высотах могут быть определены методами теории разреженного газа [1].

Для анализа аэродинамических характеристик летательных аппаратов в переходном режиме используется полное интегродифференциальное уравнение Больцмана с соответствующими граничными условиями. Условия, которым должна удовлетворять функция распределения частиц на границе области, где происходит движение рассматриваемых частиц, зависят от состояния граничной поверхности, ее температуры и от степени шероховатости и чистоты.

Определение граничных условий на поверхностях, обтекаемых разреженным газом, является одним из важнейших вопросов кинетической теории газов. В высотной аэродинамике важную роль играет взаимодействие газа с поверхностью обтекаемого тела [2]. Аэротермодинамические характеристики тел в потоке газа определяются передачей импульса и энергии к поверхности те-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Республики Казахстан.

ла, то есть связью между скоростями и энергиями молекул, падающих на поверхность, и молекул, отраженных от нее, что является сущностью кинетических граничных условий на поверхности. Граничное условие Максвелла для решения конкретных задач более точно описывает взаимодействие молекул газа с поверхностью. Одним из приближенных методов решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана является моментный метод. С помощью моментного метода можно определить аэродинамические характеристики летательных аппаратов, такие как атмосферные параметры, скорость полета, геометрические параметры и тому подобное. Отметим, что в работе [3] были предложены две новые модели граничных условий: диффузно-моментная и зеркально-моментная, обобщающие известные граничные условия Черчиньяни, а в [4] были изучены аэродинамические характеристики космических аппаратов методом прямого статического моделирования (метод Монте-Карло) и различные модели взаимодействия газа с поверхностью и их влияние на аэродинамические характеристики.

Моментные методы отличаются друг от друга выбором различных систем базисных функций. Например, Грэд [5], [6] при получении моментной системы для однородного уравнения Больцмана раскладывал функцию распределения частиц по полиномам Эрмита около локального максвелловского распределения. Грэд пользовался декартовыми координатами скоростей, и моментная система Грэда содержала в качестве коэффициентов такие неизвестные гидродинамические характеристики, как плотность, температура, средняя скорость и др. В [7] нами получена моментная система, отличающаяся от системы уравнений Грэда. При этом мы пользовались сферическими координатами скоростей и разлагали функцию распределения в ряд по собственным функциям линеаризованного оператора столкновений [1], [8], являющимся произведением полиномов Сонина и сферических функций. Коэффициенты разложения, моменты функции распределения определялись иначе, чем у Грэда. Полученная система уравнений, соответствующая частичной сумме ряда, которую мы называли системой моментных уравнений Больцмана, является нелинейной гиперболической системой относительно моментов функции распределения частиц. Дифференциальная часть полученной системы является линейной, а нелинейность входит как квадратичные формы моментов функции распределения. Квадратичные формы — моменты нелинейного интеграла столкновений — вычислены в работе [9] и выражаются через коэффициенты Тальми [10] и Клебша-Гордона [11].

В [12], [13] получены моментные системы для пространственно-однородного уравнения Больцмана и условия представимости решения пространственно-однородного уравнения Больцмана в виде ряда Пуанкаре. Заметим, что предложенный в [12] способ (применение преобразования Фурье по скоростной переменной в изотропном случае) сильно упростил интеграл столкновений и, следовательно, вычисление моментов от интеграла столкновений. В работе [13] обобщен результат работы [12] для случая анизотропного рассеяния. В [14] приведен вывод систематической невозмущенной иерархии замкнутой системы моментных уравнений, соответствующих классической теории. Эта статья является фундаментальной работой, описывающей замкнутую систему моментных уравнений в переходном режиме.

Уравнение Больцмана эквивалентно бесконечной системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно моментов функции распределения частиц в силу полноты системы собственных функций линеаризованного оператора. На практике ограничиваются изучением конечной системы уравнений.

Конечная система моментных уравнений для конкретной задачи с некоторой степенью точности заменяет уравнение Больцмана. Необходимо, также приближенно, заменить граничные условия для функции распределения частиц некоторым числом макроскопических условий для моментов, т.е. возникает задача постановки граничных условий для конечной системы уравнений, аппроксимирующих микроскопические граничные условия для уравнения Больцмана. Вопрос постановки граничных условий для конечной системы моментных уравнений можно разбить на две части: сколько условий надо наложить и как они должны быть получены. Из микроскопических граничных условий для уравнения Больцмана можно получить бесконечное множество граничных условий для любого типа разложения. Однако число граничных условий определяется не числом моментных уравнений, т.е. нельзя, например, брать столько граничных условий, сколько уравнений, хотя число моментных уравнений влияет на количество граничных условий. Кроме того, граничные условия должны быть согласованы с моментными уравнениями, и полученная задача должна быть корректной.

Грэд [5] описал конструкцию бесконечной последовательности граничных условий, не пытаясь согласовать порядки аппроксимаций разложения граничного условия и разложения уравнения Больцмана. Постановка граничных условий даже для одномерной системы уравнений Грэда представляет очень трудную задачу, т.к. моментная система уравнений Грэда является гиперболической системой, причем эта система уравнений содержит в качестве коэффициентов такие неизвестные параметры, как плотность, температура, средняя скорость и др. При этом характеристическое уравнение также зависит от неизвестных параметров и, следовательно, сформулировать граничные условия для моментной системы весьма сложно. В работе [15] обсуждены вопросы постановки граничных условий для 13-моментной системы Грэда.

В [7] аппроксимировано однородное граничное условие для функции распределения частиц и доказана корректность начально-краевой задачи для нестационарной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана в трехмерной области. Более точно доказано существование единственного обобщенного решения начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным. Кроме того, в этой же работе приведена аппроксимация микроскопического граничного условия для уравнения Больцмана. Граничное условие можно сформулировать так: определить отраженную половину функции распределения по известной ее половине, соответствующей падающим частицам. Граничное условие задано в виде интегрального соотношения между падающими на границу частиц и отраженными от границы частиц (при условии, что известна вероятность того, что частица, падающая на границу со скоростью v_i отлетит со скоростью v_r).

В данной работе приведем аппроксимацию микроскопического граничного условия, когда часть молекул отражается от поверхности зеркально, а часть — диффузно с максвелловским распределением. При этом макроскопические граничные условия для двенадцатимоментной системы уравнений получаются из микроскопических граничных условий Максвелла.

2. ВЫВОД МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ МАКСВЕЛЛА-АУЖАНА ДЛЯ ДВЕНАДЦАТИМОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

В случае течения газа внутри области, ограниченной замкнутой или незамкнутой поверхностью, или около твердого тела граничные условия задаются в виде соотношения между частицами, падающими на границу и отраженными от границы частиц. Если начальное распределение молекул газа известно, то дальнейшая эволюция газа описывается интегродифференциальным уравнением Больцмана. Тем самым задача сводится к решению начально-краевой задачи для уравнения Больцмана. Приведем постановку начально-краевой задачи для одномерного нестационарного уравнения Больцмана при граничных условиях Максвелла, не вдаваясь в подробности взаимодействия газа со стенкой. Будем аппроксимировать исходную начально-краевую задачу для уравнения Больцмана соответствующей задачей для системы моментных уравнений Больцмана в пятом приближении. Приведем вывод макроскопических граничных условий, которые получаются из микроскопических граничных условий Максвелла. В заключение приведем постановку начально-краевой задачи для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана.

Заметим, что теорема существования глобального по времени решения начально-краевой задачи для 3-мерного нелинейного уравнения Больцмана при граничных условиях Максвелла доказана в [16].

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти решение следующей начально-краевой задачи для однородного одномерного уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+|v|\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}=J(f,f),\quad t\in(0,\mathrm{T}],\quad x\in(-a,a),\quad v\in R_3^v, \tag{1}$$

$$f|_{t=0}=f^0(x,v),\quad (x,v)\in[-a,a]\times R_3^v,$$

$$f^+(t,x,v_1,v_2,v_3)=\beta f^-(t,x,v_1,v_2,-v_3)+(1-\beta)\exp\left(-\frac{|v|^2}{2R\mathrm{T}_0}\right), \tag{2}$$

$$v_3=|v|\cos\theta,(n,v)=(n,|v|\cos\theta)>0,\quad x=-a\quad\text{или}\quad x=a, \tag{3}$$

где $f = f(t,x,v)$ — функция распределения частиц в пространстве по скорости и времени; $f^0(x,v)$ — распределение частиц в начальный момент времени (заданная функция);

$$J(f,f) = \int [f(v')f(w') - f(v)f(w)]\sigma(\cos\chi)\,dwdv$$

есть нелинейный оператор столкновений, записанный для максвелловских молекул, n — внешний единичный нормальный вектор границы.

Условие (3) является естественным граничным условием для уравнения Больцмана, которое дает возможность определить отраженную половину функции распределения f, если известна половина, соответствующая падающим частицам. Согласно условию (3), определенная часть падающих частиц отражается зеркально, а остальные частицы абсорбируются стенкой и испускаются затем с максвелловским распределением, соответствующим температуре стенки T_0. Формула (3) написана в предположении, что граница (стенка) неподвижна.

Для одномерных задач собственные функции линеаризованного оператора имеют вид (см. [1], [8])

$$g_{nl}(\alpha\nu) = \left(\frac{\sqrt{\pi}n!(2l+1)}{2\Gamma(n+l+3/2)}\right)^{1/2}\left(\frac{\alpha|\nu|}{\sqrt{2}}\right)^{l} S_n^{l+1/2}\left(\frac{\alpha^2|\nu|^2}{2}\right)P_l(\cos\theta), \quad 2n+l = 0,1,2,\ldots,$$

где $S_n^{l+1/2}\left(\frac{\alpha^2|\nu|^2}{2}\right)$ — полиномы Сонина, $P_l(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, Γ — гамма функция.

Для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3) применим метод Галеркина. Определим приближенное решение одномерной задачи (1)–(3) следующим образом:

$$f_5(t,x,v) = \sum_{2n+l=0}^{5} f_{nl}(t,x)\,g_{nl}(\alpha v), \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{R_3^v}\left(\frac{\partial f_5}{\partial t} + |v|\cos\theta\frac{\partial f_5}{\partial x} - J(f_5,f_5)\right)f_0(\alpha|v|)\,g_{nl}(\alpha v)\,dv = 0,\\ 2n+l = 0,1,\ldots,5, \quad (t,x)\in(0,\mathrm{T}]\times(-a,a),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{R_3^v}[f_5(0,x,v) - f_5^0(x,v)]f_0(\alpha|v|)\,g_{nl}(\alpha v)\,dv = 0,\\ 2n+l = 0,1,\ldots,5, \quad x\in(-a,a),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{(n,v)>0}(n,v)\,f_0(\alpha|v|)\,f_5^+(t,x,v)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv - \beta\int\limits_{(n,v)<0}(n,-v)\,f_0(\alpha|v|)\,f_5^-(t,x,v)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv -\\ -(1-\beta)\int\limits_{(n,v)<0}(n,-v)\,f_0(\alpha|v|)\exp\left(-\frac{|v|^2}{2R\mathrm{T}_0}\right)g_{n,2l}(\alpha v)\,dv = 0,\\ 2(n+l) = 0,2,4, \quad x=-a \quad \text{или} \quad x=a,\end{gathered} \tag{7}$$

где $n = (0,0,1)$ при $x = a$ и $n = (0,0-1)$ при $x = -a$;

$$f_0(\alpha|v|) = \left(\frac{\alpha^2}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\alpha^2v^2}{2}\right)$$

есть глобальное максвелловское распределение, $\alpha^2 = \frac{1}{R\mathrm{T}_0}$;

$$f_{nl}(t,x) = \int\limits_{R_3^v} f_5(t,x,v)f_0(\alpha|v|)\,g_{nl}(\alpha v)\,dv,$$

$$f_5^0(x,v) = \sum_{2n+l=0}^{5} f_{nl}^0(x)\,g_{nl}(\alpha v)\,dv, \tag{8}$$

$$f_{nl}^{0}(x) = \int\limits_{R_3^v} f_5^0(x,v) f_0(\alpha|v|)\, g_{nl}(\alpha v)\, dv.$$

В общем случае аппроксимация граничного условия (3) зависит от четности или нечетности приближения системы моментных уравнений Больцмана [17].

При аппроксимации микроскопического граничного условия учитывали аппроксимацию уравнения Больцмана моментными уравнениями, соответствующими пятому приближению (двенадцатимоментная система уравнений). Тем самым порядки аппроксимации для разложения граничного условия и разложения уравнения Больцмана согласованы. Макроскопические условия (7) были названы граничными условиями Максвелла-Аужана [17].

Систему моментных уравнений Больцмана (5), соответствующую разложению (4), запишем в развернутом виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{nl}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[l\left(\sqrt{\frac{2(n+l+1/2)}{(2l-1)(2l+1)}}f_{n,l-1} - \sqrt{\frac{2(n+1)}{(2l-1)(2l+1)}}f_{n+1,l-1}\right) + \right.\\ \left. + (l+1)\left(\sqrt{\frac{2(n+l+3/2)}{(2l+1)(2l+3)}}f_{n,l+1} - \sqrt{\frac{2n}{(2l+1)(2l+3)}}f_{n-1,l+1}\right)\right] = I_{nl},\\ 2n+l = 0,1,\ldots,5,\end{gathered} \tag{9}$$

где моменты I_{nl} интеграла столкновений выражаются через коэффициенты Тальми и Клебша-Гордона следующим образом [9]:

$$I_{nl} = \sum \langle N_3L_3n_3l_3 : l|nl00 : l\rangle \langle N_3L_3n_3l_3 : l|n_1l_1n_2l_2 : l\rangle (l_10l_20/l0)(\sigma_{l_3} - \sigma_0) f_{n_1l_1} f_{n_2l_2},$$

$\langle N_3L_3n_3l_3 : l|n_1l_1n_2l_2 : l\rangle$ – обобщенные коэффициенты Тальми,$(l_10l_20/l0)$ – коэффициенты Клебша-Гордона. В этой формуле суммирование проводится по всем повторяющимся индексам $N_3L_3n_3l_3$, $n_1l_1n_2l_2$, причем они принимают ряд значений, которые определяются из следующих ограничений.

1. Закон сохранения энергии $2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2N_3 + L_3 + 2n_3 + l_3$.

2. Закон сохранения четности $(-1)^{l_1+l_2} = (-1)^{L_3+l_3}$.

Кроме того, составлена программа для вычисления значений коэффициентов Тальми.

Приведем постановку граничных условий Максвелла-Аужана для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана. Если $2n+l$ в (9) принимает значения от 0 до 5, то получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{00}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f_{01}}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial f_{02}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}f_{01} + \frac{3}{\sqrt{5}}f_{03} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}\right) = I_{02},\\ \frac{\partial f_{04}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(4\left(\frac{1}{\sqrt{7}}f_{03} - \sqrt{\frac{2}{7\times 9}}f_{13}\right) + \frac{5}{3}f_{05}\right) = I_{04},\\ \frac{\partial f_{10}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{01} + \sqrt{\frac{5}{3}}f_{11}\right) = 0,\\ \frac{\partial f_{12}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(\sqrt{\frac{7}{3\times 5}}f_{11} - \frac{2}{\sqrt{3\times 5}}f_{21}\right) + 3\left(\frac{3}{\sqrt{5\times 7}}f_{13} - \sqrt{\frac{2}{5\times 7}}f_{03}\right)\right) = I_{12},\\ \frac{\partial f_{20}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}f_{21} - \frac{2}{\sqrt{3}}f_{11}\right) = I_{20},\\ \frac{\partial f_{01}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{00} + \frac{2}{\sqrt{3}}f_{02} - \sqrt{\frac{2}{3}}f_{10}\right) = 0,\\ \frac{\partial f_{03}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}f_{02} - \sqrt{\frac{2}{5\times 7}}f_{12}\right) + \frac{4}{\sqrt{7}}f_{04}\right] = I_{03},\end{gathered} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f_{05}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{3}f_{04}\right)=I_{05},$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}f_{10}-\frac{2}{\sqrt{3}}f_{20}+2\left(\sqrt{\frac{7}{3\times 5}}f_{12}-\sqrt{\frac{2}{3\times 5}}f_{02}\right)\right)=I_{11},$$

$$\frac{\partial f_{13}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{\sqrt{5\times 7}}f_{12}-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}f_{04}\right)=I_{13},$$

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}f_{20}-\frac{2}{\sqrt{3\times 5}}f_{12}\right)=I_{21},\quad x\in(-a,a),\quad t>0,$$

где $f_{00}=f_{00}(t,x)$, $f_{02}=f_{02}(t,x)$, …, $f_{21}=f_{21}(t,x)$ – моменты функции распределения частиц; I_{02}, I_{04}, I_{12}, I_{20}, I_{03}, I_{05}, I_{11}, I_{13}, I_{21} – моменты интеграла столкновений – знаконеопределенные квадратичные формы.

На границах $x=-a$ и $x=a$ будем ставить следующие граничные условия (нормальный вектор $n=(0,0,-1)$ при $x=-a$ и $n=(0,0,1)$ при $x=a$):

$$\int_0^\infty\int_{-1}^0\int_0^{2\pi}(-|v|\mu)f_5^+(t,-a,v)\,f_0(\alpha|v|)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv-\beta\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{2\pi}|v|\mu f_5^-(t,-a,v)\,f_0(\alpha|v|)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv-$$

$$-(1-\beta)\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{2\pi}|v|\mu f_0\,(a|v|)\exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right)g_{n,2l}(\alpha v)\,dv=0,\tag{11}$$

$$2(n+l)=0,2,4\Rightarrow n=1=0;\quad n=0,\quad l=1;\quad n=1,\quad l=0;$$
$$n=0,\quad l=2;\quad n=1,\quad l=1;\quad n=2,\quad l=0,$$

$$\int_0^\infty\int_0^2\int_0^{2\pi}|v|\mu f_5^+(t,a,v)\,f_0(\alpha|v|)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv-\beta\int_0^\infty\int_{-1}^0\int_0^{2\pi}(-|v|\mu)f_5^-(t,a,v)\,f_0(\alpha|v|)\,g_{n,2l}(\alpha v)\,dv-$$

$$-(1-\beta)\int_0^\infty\int_{-1}^0\int_0^{2\pi}(-|v|\mu)f_0(\alpha|v|)\exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right)g_{n,2l}(\alpha v)\,dv=0$$

$$2(n+l)=0,2,4\Rightarrow n=1=0;\quad n=0,\quad l=1;\quad n=1,\quad l=0;\tag{12}$$
$$n=0,\quad l=2;\quad n=1,\quad l=1;\quad n=2,\quad l=0,$$

$$\mu=\cos\theta,\quad dv=|v|^2\,d|v|\,d\mu d\varphi,\quad f_5^\pm(t,x,v)=\sum_{2n+l=0}^{5}f_{nl}^\pm(t,x)\,g_{nl}(\alpha v).$$

Из равенств (11) и (12) следует, что для двенадцатимоментной системы уравнений (10) нужно задавать по шесть граничных условий на левой и правой концах интервала $(-a,\,a)$. При аппроксимации граничного условия (3) приравниваем к нулю четные моменты невязки, соответствующие краевому условию (3). Если в равенствах (11) и (12) вместо $g_{n,2l}(\alpha\nu)$ подставим значения

$$g_{00}=1,$$

$$g_{02}(\alpha v)=\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\frac{\alpha|v|}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right),\quad g_{04}(\alpha v)=\frac{1}{\sqrt{105}}\left(\alpha|v|/\sqrt{2}\right)^4\left(35\mu^4-30\mu^2+3\right)/2,$$

$$g_{10}(\alpha v)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha^2|v|^2}{\sqrt{2}}\right),\quad g_{12}=\sqrt{2/21}\left(\alpha|v|/\sqrt{2}\right)^2\left(7/2-\alpha^2v^2/2\right)\left(3\mu^2-1\right),$$

$$g_{20}=\sqrt{2/15}\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha^2v^2}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\alpha^2v^2\right)-\frac{\alpha^2v^2}{2}\right]$$

и проинтегрируем, то получим следующие граничные условия (мы опускаем громоздкие вычисления граничных интегралов):

При $x = -a$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{2}f_{00}^{+}-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{02}^{+}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{105}}f_{04}^{+}+\frac{1}{\sqrt{3}}f_{10}^{+}-\frac{1}{\sqrt{21}}f_{12}^{+}+\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{20}^{+}\right)+f_{01}^{+}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}f_{00}^{-}+\sqrt{\frac{2}{3}}f_{02}^{-}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{105}}f_{04}^{-}-\frac{1}{\sqrt{3}}f_{10}^{-}+\frac{1}{\sqrt{21}}f_{12}^{-}-\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{20}^{-}\right)+f_{01}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{4\sqrt{2}}=0;$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00}^{-}-2\sqrt{2}f_{02}^{+}-\frac{13}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{04}^{+}+f_{10}^{+}+\frac{2}{\sqrt{7}}f_{12}^{+}-\frac{1}{2\sqrt{5}}f_{20}^{+}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}f_{01}^{+}+\frac{3}{\sqrt{5}}f_{03}^{+}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}^{+}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00}^{-}+2\sqrt{2}f_{02}^{-}+\frac{13}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{04}^{-}-f_{10}^{-}-\frac{2}{\sqrt{7}}f_{12}^{-}+\frac{1}{2\sqrt{5}}f_{20}^{-}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}f_{01}^{-}+\frac{3}{\sqrt{5}}f_{03}^{-}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{8\sqrt{6}}=0;$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\sqrt{210}}f_{00}^{+}-\frac{26}{3\sqrt{70}}f_{02}^{+}+\frac{4}{7\sqrt{2}}f_{04}^{+}-\frac{5}{3\sqrt{35}}f_{10}^{+}+\frac{13}{\sqrt{245}}f_{12}^{+}-\frac{1}{2\sqrt{7}}f_{20}^{+}\right)+\frac{4}{\sqrt{7}}f_{03}^{+}+\frac{5}{3}f_{05}^{+}-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}f_{13}^{+}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{2}{\sqrt{210}}f_{00}^{-}+\frac{26}{3\sqrt{70}}f_{02}^{-}-\frac{4}{7\sqrt{2}}f_{04}^{-}+\frac{5}{3\sqrt{35}}f_{10}^{-}-\frac{13}{\sqrt{245}}f_{12}^{-}+\frac{1}{2\sqrt{7}}f_{20}^{-}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\sqrt{7}}f_{03}^{-}+\frac{5}{3}f_{05}^{-}-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}f_{13}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{8\sqrt{3}}=0;$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}f_{00}^{+}+f_{02}^{+}-\frac{5}{3\sqrt{35}}f_{04}^{+}-\frac{6}{\sqrt{2}}f_{10}^{+}-\frac{3}{\sqrt{14}}f_{12}^{+}+\frac{5}{2\sqrt{10}}f_{20}^{+}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{01}^{-}+\sqrt{\frac{5}{3}}f_{11}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}+ \qquad (13)$$
$$+\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{16\sqrt{210}}=0;$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}f_{00}^{+}+\frac{2}{\sqrt{7}}f_{02}^{+}+\frac{13}{\sqrt{245}}f_{04}^{+}-\frac{3}{\sqrt{14}}f_{10}^{+}-\frac{34}{7\sqrt{2}}f_{12}^{+}-\frac{23}{4}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{20}^{+}\right)-\right.$$
$$\left.-3\sqrt{\frac{2}{35}}f_{03}^{-}+2\sqrt{\frac{7}{15}}f_{11}^{+}+\frac{9}{\sqrt{35}}f_{13}^{+}-\frac{4}{\sqrt{15}}f_{21}^{+}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}f_{00}^{-}-\frac{2}{\sqrt{7}}f_{02}^{-}-\frac{13}{\sqrt{245}}f_{04}^{-}+\frac{3}{\sqrt{14}}f_{10}^{-}+\frac{34}{7\sqrt{2}}f_{12}^{-}+\frac{23}{4}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{20}^{-}\right)-\right.$$
$$\left.-3\sqrt{\frac{2}{35}}f_{03}^{-}+2\sqrt{\frac{7}{15}}f_{11}^{-}+\frac{9}{\sqrt{35}}f_{13}^{-}-\frac{4}{\sqrt{15}}f_{21}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{4\sqrt{35}}=0;$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{00}^{+}-\frac{1}{2\sqrt{5}}f_{02}^{+}-\frac{1}{2\sqrt{7}}f_{04}^{+}+\frac{5}{2\sqrt{10}}f_{10}^{+}-\frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}}f_{12}^{+}-\frac{15}{\sqrt{2}}f_{20}^{+}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}f_{11}^{+}+\sqrt{\frac{7}{3}}f_{21}^{+}\right]\Bigg|_{x=-a}-$$
$$-\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{00}^{-}+\frac{1}{2\sqrt{5}}f_{02}^{-}+\frac{1}{2\sqrt{7}}f_{04}^{-}-\frac{5}{2\sqrt{10}}f_{10}^{-}+\frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}}f_{12}^{-}+\frac{15}{\sqrt{2}}f_{20}^{-}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}f_{11}^{-}+\sqrt{\frac{7}{3}}f_{21}^{-}\right]\Bigg|_{x=-a}-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{15}}=0.$$

При $x = a$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{2}f_{00}^{+}-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{02}^{+}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{105}}f_{04}^{+}+\frac{1}{\sqrt{3}}f_{10}^{+}-\frac{1}{\sqrt{21}}f_{12}^{+}+\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{20}^{+}\right)-f_{01}^{+}\right]\Bigg|_{x=a}-$$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}f_{00}^- + \sqrt{\frac{2}{3}}f_{02}^- - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{105}}f_{04}^- - \frac{1}{\sqrt{3}}f_{10}^- + \frac{1}{\sqrt{21}}f_{12}^- - \frac{1}{2\sqrt{15}}f_{20}^-\right) - f_{01}^-\right]\Bigg|_{x=a} - \frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{4\sqrt{2}} = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00}^+ - 2\sqrt{2}f_{02}^+ - \frac{13}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{04}^+ + f_{10}^+ + \frac{2}{\sqrt{7}}f_{12}^+ - \frac{1}{2\sqrt{5}}f_{20}^+\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}f_{01}^+ - \frac{3}{\sqrt{5}}f_{03}^+ + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}^+\right]\Bigg|_{x=a} -$$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00}^- + 2\sqrt{2}f_{02}^- + \frac{13}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{04}^- - f_{10}^- - \frac{2}{\sqrt{7}}f_{12}^- + \frac{1}{2\sqrt{5}}f_{20}^-\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}f_{01}^- - \frac{3}{\sqrt{5}}f_{03}^- + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}^-\right]\Bigg|_{x=a} -$$

$$-\frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{8\sqrt{6}} = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\sqrt{210}}f_{00}^+ - \frac{26}{3\sqrt{70}}f_{02}^+ + \frac{4}{7\sqrt{2}}f_{04}^+ - \frac{5}{3\sqrt{35}}f_{10}^+ + \frac{13}{\sqrt{245}}f_{12}^+ - \frac{1}{2\sqrt{7}}f_{20}^+\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\sqrt{7}}f_{03}^+ - \frac{5}{3}f_{05}^+ + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}f_{13}^+\right]\Bigg|_{x=a} -$$

$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{2}{\sqrt{210}}f_{00}^- + \frac{26}{3\sqrt{70}}f_{02}^- - \frac{4}{7\sqrt{2}}f_{04}^- + \frac{5}{3\sqrt{35}}f_{10}^- - \frac{13}{\sqrt{245}}f_{12}^- + \frac{1}{2\sqrt{7}}f_{20}^-\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\sqrt{7}}f_{03}^- - \frac{5}{3}f_{05}^- + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}f_{13}^-\right]\Bigg|_{x=a} - \frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{8\sqrt{3}} = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}f_{00}^+ + f_{02}^+ - \frac{5}{3\sqrt{35}}f_{04}^+ - \frac{6}{\sqrt{2}}f_{10}^+ - \frac{3}{\sqrt{14}}f_{12}^+ + \frac{5}{2\sqrt{10}}f_{20}^+\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}f_{01}^+ - \sqrt{\frac{5}{3}}f_{11}^+\right]\Bigg|_{x=a} - \tag{14}$$

$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}f_{00}^- - f_{02}^- + \frac{5}{3\sqrt{35}}f_{04}^- + \frac{6}{\sqrt{2}}f_{10}^- + \frac{3}{\sqrt{14}}f_{12}^- - \frac{5}{2\sqrt{10}}f_{20}^-\right) +\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{2}{3}}f_{01}^- - \sqrt{\frac{5}{3}}f_{11}^-\right]\Bigg|_{x=a} + \frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{16\sqrt{210}} = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}f_{00}^+ + \frac{2}{\sqrt{7}}f_{02}^+ + \frac{13}{\sqrt{245}}f_{04}^+ - \frac{3}{\sqrt{14}}f_{10}^+ - \frac{34}{7\sqrt{2}}f_{12}^+ - \frac{23}{4}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{20}^+\right) +\right.$$

$$\left.+3\sqrt{\frac{2}{35}}f_{03}^+ - 2\sqrt{\frac{7}{15}}f_{11}^+ - \frac{9}{\sqrt{35}}f_{13}^+ + \frac{4}{\sqrt{15}}f_{21}^+\right]\Bigg|_{x=a} -$$

$$-\beta\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}f_{00}^- - \frac{2}{\sqrt{7}}f_{02}^- - \frac{13}{\sqrt{245}}f_{04}^- + \frac{3}{\sqrt{14}}f_{10}^- + \frac{34}{7\sqrt{2}}f_{12}^- + \frac{23}{4}\sqrt{\frac{2}{35}}f_{20}^-\right) +\right.$$

$$\left.+3\sqrt{\frac{2}{35}}f_{03}^- - 2\sqrt{\frac{7}{15}}f_{11}^- - \frac{9}{\sqrt{35}}f_{13}^- + \frac{4}{\sqrt{15}}f_{21}^-\right]\Bigg|_{x=a} - \frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{4\sqrt{35}} = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{00}^+ - \frac{1}{2\sqrt{5}}f_{02}^+ - \frac{1}{2\sqrt{7}}f_{04}^+ + \frac{5}{2\sqrt{10}}f_{10}^+ - \frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}}f_{12}^+ - \frac{15}{\sqrt{2}}f_{20}^+\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}f_{11}^+ - \sqrt{\frac{7}{3}}f_{21}^+\right]\Bigg|_{x=a} -$$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{15}}f_{00}^- + \frac{1}{2\sqrt{5}}f_{02}^- + \frac{1}{2\sqrt{7}}f_{04}^- - \frac{5}{2\sqrt{10}}f_{10}^- + \frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}}f_{12}^- + \frac{15}{\sqrt{2}}f_{20}^-\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{3}}f_{11}^- - \sqrt{\frac{7}{3}}f_{21}^-\right]\Bigg|_{x=a} - \frac{(1-\beta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{15}} = 0.$$

Введем в рассмотрение следующие векторы и матрицы:

$$u = (f_{00}, f_{02}, f_{04}, f_{10}, f_{12}, f_{20}), \quad w = (f_{01}, f_{03}, f_{05}, f_{11}, f_{13}, f_{21}),$$

$$J_1(u,\nu) = (0, J_{02}, J_{04}, 0, J_{12}, J_{20}), \quad J_2(u,\nu) = (0, J_{03}, J_{05}, J_{11}, J_{13}, J_{12}),$$

$$A = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 3/\sqrt{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} & 0 & 0 \\ 0 & 4/\sqrt{7} & 5/3 & 0 & -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 0 & \sqrt{5/3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5\times 7}} & 0 & \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3\times 5}} & \frac{9}{\sqrt{5\times 7}} & -\frac{4}{\sqrt{3\times 5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{7/3} \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{105}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{2} & \frac{26}{3\sqrt{70}} & -1 & -\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{105}} & \frac{26}{3\sqrt{70}} & -\frac{4}{7\sqrt{2}} & \frac{5}{3\sqrt{35}} & -\frac{13}{\sqrt{245}} & \frac{1}{2\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{5}{3\sqrt{35}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{5}{2\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{13}{\sqrt{245}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{34}{7\sqrt{2}} & \frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{7}} & -\frac{5}{2\sqrt{10}} & \frac{23\sqrt{2}}{4\sqrt{35}} & \frac{15}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$F = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}; \frac{1}{8\sqrt{6}}; \frac{1}{8\sqrt{3}}; -\frac{1}{16\sqrt{210}}; \frac{1}{4\sqrt{35}}; \frac{1}{\sqrt{15}}\right).$$

Тогда начально-краевую задачу для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана (10) при граничных условиях Максвелла-Аужана (13), (14) запишем в векторно-матричной форме:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = J_1(u,w), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + A'\frac{\partial u}{\partial x} = J_2(u,w), \quad t \in (0,\mathrm{T}], \quad x \in (-a,a), \end{gathered} \tag{15}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad w\big|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in (-a,a), \tag{16}$$

$$(Aw^+ - Bu^+)\big|_{x=-a} = \beta(Aw^- + Bu^-)\big|_{x=-a} + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}(1-\beta)F, \quad t \in [0,\mathrm{T}], \tag{17}$$

$$(Aw^+ + Bu^+)\big|_{x=a} = \beta(Aw^- - Bu^-)\big|_{x=a} + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}(1-\beta)F, \quad t \in [0,\mathrm{T}], \tag{18}$$

где A' – транспонированная матрица;

$$u_0(x) = \left(f_{00}^0(x), f_{02}^0(x), f_{10}^0(x), f_{04}^0(x), f_{12}^0(x), f_{20}^0(x)\right)',$$

$$w_0(x) = \left(f_{01}^0(x), f_{03}^0(x), f_{05}^0(x), f_{11}^0(x), f_{13}^0(x), f_{21}^0(x)\right)'$$

суть заданные начальные вектор-функции.

Матрицы A и B невырожденные. Требуется найти решение системы уравнений (15), удовлетворяющих начальному условию (16) и граничным условиям (17) и (18).

Если функция распределения $f^+(t,x,|v|\cos\theta)$ падающих на границу частиц известна, то левые части равенств (17), (18) векторы u^+ и v^+ известны.

При этом

$$Au^- \mp Bv^-\Big|_{x=\pm a} = \frac{1}{\beta}(Au^+ \pm Bv^+)_{x=\pm a} - \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{1-\beta}{\beta}F, \quad (19)$$

где u^- и v^- — моменты функции распределения $f^-(t, x, -|v|\cos\theta)$, отраженной от границы частиц. Тогда задача сводится к нахождению решения системы уравнений (15), удовлетворяющих начальному условию (16) и граничным условиям (19).

Эта работа носит теоретический характер, исходная начально-краевая задача (1)–(3) аппроксимирована соответствующей задачей для двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана. Вывод макроскопических граничных условий для моментной системы уравнений представляет важную и неотъемлемую часть будущих исследований. В последующих исследованиях будут изучены вопросы корректности начально-краевой задачи (15)–(18), а именно, существование и единственность решения начально-краевой задачи (15)–(18) и проведены численные эксперименты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
3. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Моментные граничные условия в задачах скольжения разреженного газа // Механ. жидкости и газа. 2004. № 2. С. 193–208.
4. *Хлопков Ю.И.*, *Зея Мьо Мьинт, Хлопков А.Ю.* Методики решения задач высотной аэродинамики в разреженном газе // Междунар. журнал прикл. и фундаментальных исследований. 2014. № 1. С. 156–162.
5. *Grad G.* Kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 331.
6. *Grad G.* Principle of the kinetic theory of gases. Handuch der Physik. V. 12. Berlin: Springer. P. 205–294.
7. *Сакабеков А.* Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 9. С. 67–88.
8. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
9. *Kumar K.* Polynomial expansions in kinetic theory of gases // Annals Phys. 1966. V. 57. P. 115–141.
10. *Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф.* Нуклонные ассоциации в легких ядрах. Л.: Наука, 1969.
11. *Мошинский М.* Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков. М.: Мир, 1972.
12. *Бобылев А.В.* Метод преобразования Фурье в теории уравнения Больцмана для максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1041–1044.
13. *Веденяпин В.В.* Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 338–342.
14. Moment closure Hierarchies for Kinetic Theories // J. Statist. Phys. 1996. V. 83. № 5/6. C.D. Levermore.
15. *Баранцев Р.Г., Луцет М.О.* О граничных условиях для моментных уравнений разреженного газа // Вестник ЛГУ, серия матем. мех. 1969. № 1. С. 92–101.
16. *Mischler S.* Kinetic equations with Maxwell boundary condition // Annales scientifique del ENS 43, 2010, fascicule 5. P. 719–760.
17. *Sakabekov A., Auzhani Y.* Boundary conditions for the one dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations // J. Math. Phys. 2014. V. 55. 123507.