ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 10, с. 1752–1768

УДК 517.956

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО СИЛЬНОГО РАЗРЫВА С ПЕРЕТЕКАНИЕМ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ И С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ[1)]

© 2019 г. А. М. Блохин[1,2,*], Р. Е. Семенко[1,2,]**

([1] 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский гос. ун-т, Россия;

[2] 630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, Ин-т матем., Россия)

**e-mail: blokhin@math.nsc.ru*

***e-mail: r.semenko@g.nsu.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2018 г.
Переработанный вариант 12.03.2018 г.
Принята к публикации 19.03.2019 г.

В работе обсуждается вопрос об устойчивости течения несжимаемой полимерной жидкости с сильным разрывом в случае, когда возможно перетекание жидкости через разрыв. Численно построены частные решения линеаризованной задачи, растущие со временем. Библ. 14. Фиг. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: линейная система, устойчивость сильного разрыва, частные решения линеаризованной задачи.

DOI: 10.1134/S0044466919100041

ВВЕДЕНИЕ

Растворы и расплавы полимеров представляют из себя жидкости, состоящие из очень длинных молекул сложной формы (макромолекул). Из-за такой особенности полимерные жидкости являются вязкоупругими. Для описания таких жидкостей было предложено большое количество математических моделей, заметно отличающихся как по подходам, так и по сложности. Глобально эти модели можно разделить на две большие группы. Первые – феноменологические модели [1], [2], в которых жидкости описываются на макроскопическом уровне при помощи экспериментально обнаруженных общих закономерностей. Подобный подход, с одной стороны, позволяет получить сравнительно простые соотношения, но с другой, его трудно применять к конкретным реальным полимерам. Другие – микроструктурные (или статистические) модели. В таких моделях описывается форма отдельных молекул, а некоторые их усредненные свойства выводятся при помощи методов математической статистики [3]–[5]. Такой подход в теории позволяет получить более точные результаты, поскольку характерные свойства полимерных жидкостей связаны как раз со сложной формой макромолекул. Но математически такие модели, как правило, достаточно сложны, а также для их построения необходимо привлекать неочевидные и не всегда достаточно обоснованные предположения.

В данной работе мы будем использовать обобщенную модель Покровского-Виноградова [6]–[9], которая в некотором смысле объединяет два описанных подхода. Эта модель применяет мезоскопический подход, при котором моделируется движение молекул, но при этом для описания динамики макромолекул привлекаются феноменологические параметры, определяемые опытным путем. Такой подход позволил отразить различные характерные детали течений полимерных жидкостей и показал хорошее соответствие экспериментальным данным.

Дифференциальные уравнения вышеописанной математической модели изучались в [10]. В этой же работе рассматривались разрывные решения предложенной модели. Сильные разрывы в полимерной жидкости без перетекания ее через разрыв подробно рассматривались в [11].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00791 А) и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5 (проект № 0314-2016-0013).

В то же время возможны режимы течения полимерной жидкости с разрывом и с перетеканием ее через разрыв (см., например, [12]).

Настоящая работа посвящена изучению важного вопроса об устойчивости сильного разрыва с перетеканием полимерной жидкости. Доказана линейная неустойчивость плоского сильного разрыва с уравнением $x = 0$. В разд. 1 изложена постановка линеаризованной задачи об устойчивости сильного разрыва. В разд. 2 построены частные решения линеаризованной задачи, растущие со временем по амплитуде.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работах [7], [10] была сконструирована математическая модель, описывающая течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Ниже мы рассмотрим линейную систему, которая получается путем линеаризации вышеупомянутой математической модели относительно постоянного решения (это постоянное решение подробно описано в [10]; см. также ниже замечание 1.2). В безразмерном варианте эта линейная система будет иметь следующий вид (процесс обезразмеривания также описан в работе [10]):

$$\mathbf{U}_t + B\mathbf{U}_x + C^{(0)}\mathbf{U}_y + R^{(0)}\mathbf{U} + \mathbf{F}^{(0)} = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta_{x,y}\Omega = (\alpha_{22} - \alpha_{11})_{yy} + 2(\alpha_{12})_{xy}, \tag{1.2}$$

$t > 0$, $x \in R^1_+ \cup R^1_-$, $y \in R^1$. Здесь имеем

$$\mathbf{U}(t,x,y) = \begin{cases} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad x \in R^1_+, \\ \mathbf{U}_\infty = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \\ \alpha_{11\infty} \\ \alpha_{12\infty} \\ \alpha_{22\infty} \end{pmatrix}, \quad x \in R^1_-; \end{cases}$$

здесь $R^1_+ = \{x \,|\, x > 0\}$, $R^1_- = \{x \,|\, x < 0\}$, t — время, u, v (u_∞, v_∞) — малые возмущения компонент вектора скорости в декартовой системе координат x, y; $\alpha_{ij}(\alpha_{ij\infty}) = a_{ij}/\mathrm{Re}$ $(= a_{ij\infty}/\mathrm{Re}_\infty)$, $i, j = 1, 2$; $a_{ij}(a_{ij\infty})$, $i, j = 1, 2$ — малые возмущения компонент симметрического тензора анизотропии;

$$B = \begin{cases} B = \hat{u}I_5 + B^{(0)}, \quad B^{(0)} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & O_2 & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_1 \\ 0 & -2\hat{\alpha}_{12} \end{matrix} & O_3 \end{pmatrix}, \quad x \in R^1_+, \\ B_\infty = \hat{u}_\infty I_5 + B^{(0)}_\infty, \quad B^{(0)}_\infty = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & O_2 & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2\hat{\alpha}_{1\infty} & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_{1\infty} \\ 0 & -2\hat{\alpha}_{12\infty} \end{matrix} & O_3 \end{pmatrix}, \quad x \in R^1_-; \end{cases}$$

$$
C^{(0)} = \begin{cases}
C^{(0)} = \begin{pmatrix}
\multicolumn{2}{c}{O_2} & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \\
-2\hat{\alpha}_{12} & 0 & \\
-\hat{\alpha}_2 & 0 & O_3 \\
0 & -2\hat{\alpha}_2 &
\end{pmatrix}, & x \in R^1_+, \\[2ex]
C^{(0)}_\infty = \begin{pmatrix}
\multicolumn{2}{c}{O_2} & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \\
-2\hat{\alpha}_{12\infty} & 0 & \\
-\hat{\alpha}_{2\infty} & 0 & O_3 \\
0 & -2\hat{\alpha}_{2\infty} &
\end{pmatrix}, & x \in R^1_-;
\end{cases}
$$

$$
\Omega(t, x, y) = \begin{cases}
\Omega = p - \alpha_{11}, & x \in R^1_+, \\
\Omega_\infty = p_\infty - \alpha_{11\infty}, & x \in R^1_-;
\end{cases}
$$

$p(p_\infty)$ – малые возмущения давления,

$$
R^{(0)} = \begin{cases}
R^{(0)} = \begin{pmatrix}
 & \multicolumn{3}{c}{O_{23}} \\
O_{52} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\
 & R_{43} & 0 & R_{43} \\
 & R_{53} & R_{34} & R_{55}
\end{pmatrix}, & x \in R^1_+, \\[2ex]
R^{(0)}_\infty = \begin{pmatrix}
 & \multicolumn{3}{c}{O_{23}} \\
O_{52} & R_{33\infty} & R_{34\infty} & R_{35\infty} \\
 & R_{43\infty} & 0 & R_{43\infty} \\
 & R_{53\infty} & R_{34\infty} & R_{55\infty}
\end{pmatrix}, & x \in R^1_-;
\end{cases}
$$

$$
\mathbf{F}^{(0)}(t, x, y) = \begin{cases}
\mathbf{F}^{(0)} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x \in R^1_+, \\[2ex]
\mathbf{F}^{(0)}_\infty = \begin{pmatrix} (\Omega_\infty)_x \\ (\Omega_\infty)_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x \in R^1_-;
\end{cases}
$$

$$
\hat{\alpha}_1(\hat{\alpha}_{1\infty}) = \hat{\alpha}_{11} + \varkappa^2 (= \hat{\alpha}_{11\infty} + \varkappa^2_\infty), \quad \hat{\alpha}_2(\hat{\alpha}_{2\infty}) = \hat{\alpha}_{22} + \varkappa^2 (= \hat{\alpha}_{22\infty} + \varkappa^2_\infty),
$$

$$
\hat{\alpha}_{ij}(\hat{\alpha}_{ij\infty}) = \hat{\alpha}_{ij}/\mathrm{Re}(= \hat{\alpha}_{ij\infty}/\mathrm{Re}_\infty), \quad i, j = 1, 2; \quad \hat{\alpha}_{12}(\hat{\alpha}_{12\infty}) = \hat{\rho}\sin\hat{\alpha}(= \hat{\rho}_\infty \sin\hat{\alpha}_\infty),
$$

$$
R_{33}(R_{33\infty}) = -\hat{\rho}(\bar{k}/3 + (\bar{k} + 6\beta)\cos\hat{\alpha})\mathrm{Re}/3 \; (= -\hat{\rho}_\infty(\bar{k}_\infty/3 + (\bar{k}_\infty + 6\beta_\infty)\cos\hat{\alpha}_\infty)\mathrm{Re}_\infty/3),
$$

$$
R_{34}(R_{34\infty}) = 2\beta\hat{\rho}\sin\hat{\alpha}\mathrm{Re}(= 2\beta_\infty\hat{\rho}_\infty\sin\hat{\alpha}_\infty\,\mathrm{Re}_\infty), \quad R_{35}(R_{35\infty}) = \bar{k}\,\mathrm{Re}\,\hat{\alpha}_{11}/3(= \bar{k}_\infty\,\mathrm{Re}_\infty\,\hat{\alpha}_{11\infty}/3),
$$

$$
R_{43}(R_{43\infty}) = \hat{k}\,\mathrm{Re}\,\hat{\rho}\sin\hat{\alpha}/3(= \hat{k}_\infty\mathrm{Re}_\infty\hat{\rho}_\infty\sin\hat{\alpha}_\infty/3), \quad R_{53}(R_{53\infty}) = \bar{k}\,\mathrm{Re}\,\hat{\alpha}_{22}/3(= \bar{k}_\infty\,\mathrm{Re}_\infty\,\hat{\alpha}_{22\infty}/3),
$$

$$
R_{55}(R_{55\infty}) = -\hat{\rho}\left(\frac{\bar{k}}{3} - (\bar{k} + 6\beta)\cos\hat{\alpha}\right)\mathrm{Re}/3\left(= -\hat{\rho}_\infty\left(\frac{\bar{k}_\infty}{3} - (\bar{k}_\infty + 6\beta_\infty)\cos\hat{\alpha}_\infty\right)\mathrm{Re}_\infty/3\right),
$$

$$\text{æ}^2(\text{æ}_\infty) = \frac{1}{\mathrm{WRe}}\left(=\frac{1}{\mathrm{W}_\infty\mathrm{Re}_\infty}\right), \quad \hat\rho(\hat\rho_\infty) = \frac{3\text{æ}^2}{2\hat k}\left(=\frac{3\text{æ}_\infty^2}{2\hat k_\infty}\right),$$

$\hat k(\hat k_\infty) = \bar k + 3\beta(=\bar k_\infty + 3\beta_\infty)$, $\bar k(\bar k_\infty) = k - \beta(=k_\infty - \beta_\infty)$, k, β (k_∞, β_∞) – феноменологические параметры реологической модели (см. [7]), при этом $0 < \beta, \beta_\infty < 1$; $\mathrm{Re}(\mathrm{Re}_\infty)$ – число Рейнольдса, $\mathrm{W}, (\mathrm{W}_\infty)$ – число Вайсенберга (см. [7]); постоянные $\hat u(\hat u_\infty)$, $\hat\alpha_{ii}(\hat\alpha_{ii\infty})$, $i = 1, 2$, $\hat\alpha(\hat\alpha_\infty)$ описаны ниже; $\Delta_{x,y} = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ – оператор Лапласа, O_n – нулевая квадратная матрица порядка n, I_n – единичная матрица порядка n, O_{nm} – нулевая прямоугольная матрица (n – число строк, m – число столбцов). К системе (1.1), (1.2) надо добавить начальные данные:

$$\mathbf{U}\big|_{t=0} = \mathbf{U}_0(x, y), \quad \Omega\big|_{t=0} = \Omega_0(x, y), \quad x \in R_+^1 \cup R_-^1, \quad y \in R^1,$$

и краевые условия при $x = 0$ (они будут сформулированы ниже).

Замечание 1.1. Относительно решений системы (1.1), (1.2) будем полагать, что величины $\|\mathbf{U}\| = (\mathbf{U}, \mathbf{U})^{1/2}$, $|\Omega|$ ограничены при $|x| \to \infty$.

Кроме этого, начальные данные должны удовлетворять уравнению (1.2) и *условию несжимаемости* (см. [10])

$$\begin{gathered} u_x + v_y = 0: \\ (u_0)_x + (v_0)_y = 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. Постоянное решение вышеупомянутой математической модели было описано в [10]. Оно имеет следующий вид: $\hat u(\hat u_\infty) = \mathrm{const}$ (не уменьшая общности можно положить далее $\hat u_\infty = 1$), $\hat v(\hat v_\infty) = 0$, $\hat\alpha_{ij}(\hat\alpha_{ij\infty}) = \mathrm{const}$, $\hat p(\hat p_\infty) = \mathrm{const}$, где

$$\begin{gathered} \hat\alpha_{11}(\hat\alpha_{11\infty}) = -\hat\rho(1 + \cos\hat\alpha)\,(= -\hat\rho_\infty(1 + \cos\hat\alpha_\infty)), \\ \hat\alpha_{22}(\hat\alpha_{22\infty}) = -\hat\rho(1 - \cos\hat\alpha)\,(= -\hat\rho_\infty(1 - \cos\hat\alpha_\infty)), \\ \hat\alpha_{12}(\hat\alpha_{12\infty}) = \hat\rho\sin\hat\alpha\,(= \hat\rho_\infty\sin\hat\alpha_\infty), \quad -\frac{\pi}{2} < \hat\alpha, \hat\alpha_\infty < \frac{\pi}{2}. \end{gathered}$$

При этом постоянные $\hat u(\hat u_\infty)$, $\hat\alpha_{ij}(\hat\alpha_{ij\infty})$, $\hat p(\hat p_\infty)$ будут связаны соотношениями на сильном разрыве.

Замечание 1.3. Краевые условия при $x = 0$, о которых говорилось выше, получаются линеаризацией *условий на сильном разрыве*, выведенных в работе [10]. Эти условия имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} f_t[u] - [u^2 + p - \alpha_1] + f_y[uv - \alpha_{12}] = 0, \\ f_t[v] - [uv - \alpha_{12}] + f_y[v^2 + p - \alpha_2] = 0, \\ f_t[u^2 + \alpha_1] - [u(u^2 - \alpha_1)] + f_y[v(u^2 + \alpha_1) - 2\alpha_{12}u] = 0, \\ f_t[uv + \alpha_{12}] - [v(u^2 - \alpha_1)] + f_y[u(v^2 - \alpha_2)] = 0, \\ f_t[v^2 + \alpha_2] - [u(v^2 + \alpha_2) - 2\alpha_{12}v] + f_y[v(v^2 - \alpha_2)] = 0, \\ -[\Omega^{(x)}] + f_y[\Omega^{(y)}] = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $\tilde f(t, x, y) = f(t, y) - x = 0$ – уравнение фронта сильного разрыва в декартовой системе координат, $[F] = F - F_\infty$, где F, F_∞ – значения величины F справа ($\tilde f \to -0$) и слева ($\tilde f \to +0$) от разрыва; $\alpha_i(\alpha_{i\infty}) = \alpha_{ii} + \text{æ}^2(= \alpha_{ii\infty} + \text{æ}_\infty^2)$, $i = 1, 2$; $\Omega^{(x)}(\Omega_\infty^{(x)}) = p_x - (\alpha_1)_x - (\alpha_{12})_y$ $(= (p_\infty)_x - (\alpha_{1\infty})_x - (\alpha_{12\infty})_y)$, $\Omega^{(y)}(\Omega_\infty^{(y)}) = p_y - (\alpha_{12})_x - (\alpha_2)_y\,(= (p_\infty)_y - (\alpha_{12\infty})_x - (\alpha_{2\infty})_y)$. Линеаризуя соотношения (1.4) относительно постоянного решения (см. замечание 1.2) и обозначая малые возмущения прежними буквами, получаем при $x = 0$ следующие краевые условия для системы (1.1), (1.2):

$$\begin{gathered} f_t[\hat u] = [\Omega + 2\hat u u], \quad f_t[\hat\alpha_2] = [u\hat\alpha_2 + \hat u\alpha_{22} - 2\hat\alpha_{12}v], \quad f_t[\hat u^2 + \hat\alpha_1] = [(3\hat u^2 - \hat\alpha_1)u - \hat u\alpha_{11}] + 2\hat\alpha_{12}[\hat u]f_y, \\ [\alpha_{12}] = [\hat u^2]\left(\frac{v}{u} + f_y\right) + 2[\hat\rho\cos\hat\alpha]f_y, \quad \left[\frac{v}{\hat u}\right] = 0, \quad [\Omega_x] = [(\alpha_{12})_y]. \end{gathered} \tag{1.5}$$

При выписывании условия (1.5) мы использовали также соотношения, которым удовлетворяют параметры постоянного решения в силу (1.4):

$$[\hat{u}^2 + \hat{p} - \hat{\alpha}_1] = 0, \quad [\hat{\alpha}_{12}] = 0, \quad [\hat{u}(\hat{u}^2 - \hat{\alpha}_1)] = 0, \quad [\hat{u}\hat{\alpha}_2] = 0. \tag{1.6}$$

Замечание 1.4. Проанализируем более обстоятельно соотношения (1.6) на стационарном разрыве $x = 0$. Для этого соотношение (1.6) перепишем в виде

$$\sin\hat{\alpha} = \hat{\lambda}\sin\hat{\alpha}_\infty, \tag{1.7}$$

$$\cos\hat{\alpha} = \hat{a}\cos\hat{\alpha}_\infty + \hat{b}, \tag{1.8}$$

$$\hat{u}^3 - 2\hat{u}\hat{\rho}\hat{t} + 2\hat{\rho}_\infty\hat{t}_\infty - 1 = 0, \tag{1.9}$$

$$\Delta_0 = [\hat{p}] = 1 + \hat{\rho}(\hat{t} - \hat{\lambda}\hat{t}_\infty) + \hat{\rho}(\hat{\lambda}\cos\hat{\alpha}_\infty - \cos\hat{\alpha}) - \hat{u}^2, \tag{1.10}$$

где

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{\hat{\rho}}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{u}}, \quad \hat{b} = \hat{a}\hat{t}_\infty - \hat{t}, \quad \hat{t} = \frac{2\hat{k} - 3}{3}, \quad \hat{t}_\infty = \frac{2\hat{k}_\infty - 3}{3}.$$

Далее будем полагать, что $\hat{k}, \hat{k}_\infty > 3$, т.е. $\hat{t}, \hat{t}_\infty > 1$. Переписав (1.9) в *каноническом виде* (см., например, [13]):

$$\hat{u}^3 + 3\hat{\mathcal{P}}\hat{u} + 2\hat{Q} = 0, \quad \hat{u} > 0, \tag{1.11}$$

где

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{2}{3}\hat{\rho}\hat{t} \ (< 0), \quad \hat{Q} = \hat{\rho}_\infty\hat{t}_\infty - \frac{1}{2},$$

получим следующее.

1. Если $\hat{Q} > 0$ и $\hat{Q}^2 + \hat{\mathcal{P}}^3 < 0$, при этом

$$\frac{1}{2\hat{t}_\infty} < \hat{\rho}_\infty < \frac{1 + 2|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}{2\hat{t}_\infty},$$

то имеем

$$\hat{u}_\mp = 2|\hat{\mathcal{P}}|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{3} \mp \frac{\varphi}{3}\right), \quad \cos\varphi = \frac{\hat{Q}}{|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}. \tag{1.12}$$

2. Если $\hat{Q} < 0$ и $\hat{Q}^2 + \hat{\mathcal{P}}^3 > 0$, при этом

$$0 < \hat{\rho}_\infty < \frac{1 - 2|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}{2\hat{t}_\infty}, \quad |\hat{\mathcal{P}}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3},$$

то верно

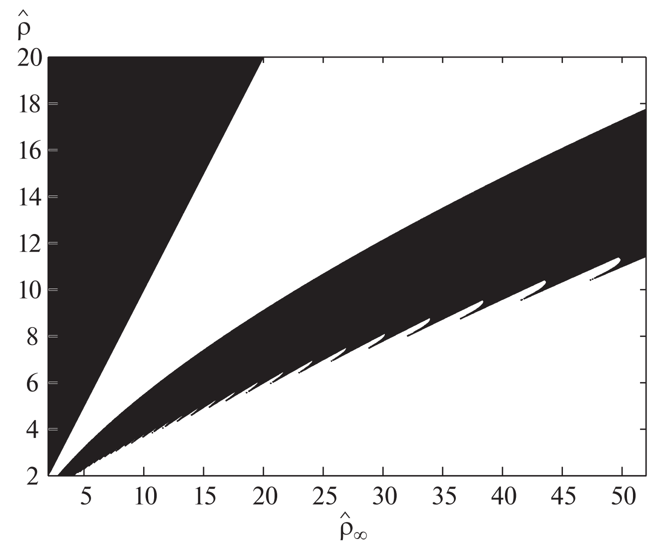
$$\hat{u} = 2|\hat{\mathcal{P}}|^{1/2}\operatorname{ch}\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{|\hat{Q}|}{|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}. \tag{1.13}$$

3. Если $\hat{Q} < 0$ и $\hat{Q}^2 + \hat{\mathcal{P}}^3 < 0$, при этом

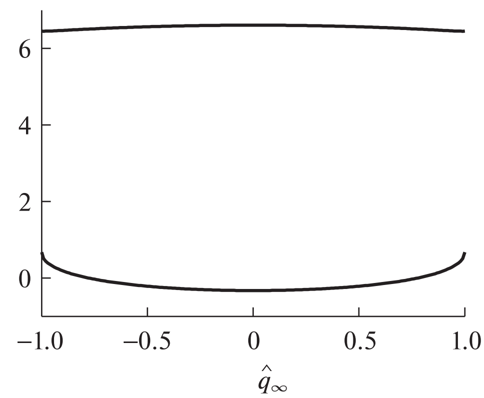
$$\frac{1}{2\hat{t}_\infty} > \hat{\rho}_\infty > \frac{1 - 2|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}{2\hat{t}_\infty},$$

то получаем

$$\hat{u} = 2|\hat{\mathcal{P}}|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad \cos\varphi = \frac{|\hat{Q}|}{|\hat{\mathcal{P}}|^{3/2}}. \tag{1.14}$$



Фиг. 1. Область значений $\hat{\rho}$ и $\hat{\rho}_{\infty}$, при которых существуют решения. Здесь $\hat{t} = 6$, $\hat{t}_{\infty} = 5$, $\hat{v}_{\infty} = 0$.



Фиг. 2. График уравнения (1.15) для $\hat{q}_{\infty}$. Два графика соответствуют уравнениям для разных значений $\hat{u}$ согласно (1.12). Здесь $\hat{\rho} = 8$, $\hat{\rho}_{\infty} = 5$, $\hat{t} = 6$, $\hat{t}_{\infty} = 5$, $\hat{v}_{\infty} = 0$.

Поскольку $1 > \cos\hat{\alpha}$, $\cos\hat{\alpha}_{\infty} > 0$, то из (1.7), (1.8) получаем уравнение для определения параметра $\hat{q}_{\infty} = \sin\hat{\alpha}_{\infty}$, $|\hat{q}_{\infty}| < 1$:

$$\sqrt{1 - (\hat{\lambda}\hat{q}_{\infty})^2} = \hat{a}\sqrt{1 - \hat{q}_{\infty}^2} + \hat{b}, \quad |\hat{\lambda}\hat{q}_{\infty}| \le 1. \tag{1.15}$$

Некоторые результаты численных расчетов по формулам (1.11)–(1.15) приведены на фиг. 1, 2 и в табл. 1.

Таблица 1. Значения постоянного решения с плоским разрывом. Здесь $\hat{\rho} = 8$, $\hat{\rho}_{\infty} = 5$, $\hat{t} = 6$, $\hat{t}_{\infty} = 5$, $\hat{v}_{\infty} = 0$

	До разрыва (∞)	После разрыва
$\hat{u}$	1	0.551
$\hat{\alpha}_1$	21.85	41
$\hat{\alpha}_2$	28.14	55
$\hat{\alpha}_{12}$	3.88	3.88

2. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала преобразуем систему (1.1) следующим образом. Поскольку

$$T^{-1}B^{(0)}T = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\chi \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2\chi^2 & -2\chi^2 & 2\chi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\chi/2 & \chi/2 \\ 1 & 0 & 0 & -\hat{\alpha}_{12}/\chi & \hat{\alpha}_{12}/\chi \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\hat{\alpha}_{12}/\chi^2 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2\chi^2 & -2\hat{\alpha}_{12}/\chi^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/\chi & 0 \end{pmatrix},$$

где $\chi^2 = \hat{\alpha}_1 = \hat{l} - \hat{\rho}\cos\hat{a} > 0$, $\hat{l} = æ^2 - \hat{\rho} = \hat{\rho}\hat{t} > 0$, то после замены

$$\mathbf{U} = T\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

система (1.1) при $x > 0$ примет следующий вид (случай $x < 0$ рассматривается аналогично):

$$\mathbf{Z}_t + (\hat{u}I_5 + D)\mathbf{Z}_x + \Lambda\mathbf{Z}_y + \tilde{R}\mathbf{Z} + T^{-1}\mathbf{F}^{(0)} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\Lambda = T^{-1}C^{(0)}T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{2\hat{\alpha}_{12}\hat{\alpha}_2}{\chi^2} & -\hat{\alpha}_2 & -\hat{\alpha}_2 \\ 0 & 0 & (1+2\hat{\alpha}_2)\dfrac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi^2} & \dfrac{\chi}{2} - \hat{\alpha}_2 & -\left(\dfrac{\chi}{2} + \hat{\alpha}_2\right) \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\chi}{2} & -\dfrac{\chi}{2} \\ 2\chi^2 - 1 & -2\chi^2 & \dfrac{\hat{\alpha}_2}{\chi} + 2\chi^2 & \dfrac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi} & -\dfrac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi} \\ 2\chi^2 - 1 & -2\chi^2 & -\dfrac{\hat{\alpha}_2}{\chi} + 2\chi^2 & \dfrac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi} & -\dfrac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R} = T^{-1}R^{(0)}T = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & -\tilde{R}_{13} & \tilde{R}_{13} & -\tilde{R}_{15} & \tilde{R}_{15} \\ \tilde{R}_{21} & -\tilde{R}_{23} & \tilde{R}_{23} & -\tilde{R}_{25} & \tilde{R}_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{R_{43}}{\chi}(2\chi^2+1) & 2\chi R_{43} & -2\chi R_{43} & \dfrac{R_{43}\hat{\alpha}_{12}}{\chi^2} & -\dfrac{R_{43}\hat{\alpha}_{12}}{\chi^2} \\ \dfrac{R_{43}}{\chi}(2\chi^2+1) & -2\chi R_{43} & 2\chi R_{43} & -\dfrac{R_{43}\hat{\alpha}_{12}}{\chi^2} & \dfrac{R_{43}\hat{\alpha}_{12}}{\chi^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_{11} = \tilde{R}_{13} + \tilde{N}, \quad \tilde{R}_{15} = \hat{\alpha}_{12}\tilde{N}/\chi + \chi R_{34}/2, \quad \tilde{R}_{13} = 2\chi^2(R_{53} - 2\hat{\alpha}_{12}R_{43}/\chi^2), \quad \tilde{R}_{21} = \tilde{R}_{11} - R_{33} - R_{35}/2\chi^2,$$

$$\tilde{R}_{23} = \tilde{R}_{13} - R_{33}, \quad \tilde{R}_{25} = \chi(1 - 1/2\chi^2)R_{34}/2 + \hat{\alpha}_{12}\tilde{N}/\chi - \hat{\alpha}_{12}R_{35}/2\chi^3, \quad \tilde{N} = R_{55} - 2\hat{\alpha}_{12}R_{43}/\chi^2;$$

$$T^{-1}\mathbf{F}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_x \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_y \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, из (2.1) следует

$$\begin{gathered} u = z_3, \quad v = \frac{z_4 + z_5}{2} = \frac{\sigma}{2}, \quad \alpha_{11} = 2\chi^2(z_1 - z_2 + z_3), \\ \alpha_{12} = \frac{z_5 - z_4}{2}\chi = \frac{\chi}{2}\nu, \quad \alpha_{22} = z_1 + \nu\frac{\hat{\alpha}_{12}}{\chi}. \end{gathered} \tag{2.1'}$$

Будем искать у системы (2.2), (1.2) решения специального вида (далее волну над искомыми переменными опускаем):

$$\begin{gathered} \mathbf{Z}(t,x,y) = \tilde{\mathbf{Z}}(x)\exp(\lambda t + i\omega y), \quad x > 0, \\ \mathbf{Z}_\infty(t,x,y) = \tilde{Z}_\infty(x)\exp(\lambda t + i\omega y), \quad x < 0, \\ \Omega(t,x,y) = \tilde{\Omega}(x)\exp(\lambda t + i\omega y), \quad x > 0, \\ \Omega_\infty(t,x,y) = \tilde{\Omega}_\infty(x)\exp(\lambda t + i\omega y), \quad x < 0, \\ f(t,y) = \tilde{f}\exp(\lambda t + i\omega y), \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\lambda = \eta + i\omega_0$; $\omega_0, \omega \in R^1$, $\tilde{f}$ — постоянная. После подстановки (2.3) в (2.2), (1.2), (1.5) мы получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered} (\lambda I_5 + i\omega\Lambda + \tilde{R})\mathbf{Z} + (\hat{u}I_5 + D)\mathbf{Z}' + \Gamma = 0, \\ \Omega'' - \omega^2\Omega = i\omega\chi\nu' - \omega^2\left(z_1 + \frac{\nu\hat{\alpha}_{12}}{\chi} - 2\chi^2(z_1 - z_2 + z_3)\right), \quad x > 0; \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} (\lambda I_5 + i\omega\Lambda_\infty + \tilde{R}_\infty)\mathbf{Z}_\infty + (I_5 + D_\infty)\mathbf{Z}'_\infty + \Gamma_\infty = 0, \\ \Omega''_\infty - \omega^2\Omega_\infty = i\omega\chi_\infty\nu'_\infty - \omega^2\left(z_{1\infty} + \frac{\nu_\infty\hat{\alpha}_{12\infty}}{\chi_\infty} - 2\chi_\infty^2(z_{1\infty} - z_{2\infty} + z_{3\infty})\right), \quad x < 0; \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \lambda f[\hat{u}] = [\Omega + 2\hat{u}z_3], \quad \lambda f[\hat{\alpha}_2] = \left[\hat{\alpha}_2 z_3 + \hat{u}\left(z_1 + \frac{\nu\hat{\alpha}_{12}}{\chi}\right) - \hat{\alpha}_{12}\sigma\right], \\ \lambda f[\hat{u}^2 + \chi^2] = [(3\hat{u}^2 - \chi^2)z_3 - 2\chi^2\hat{u}(z_1 - z_2 + z_3)] + 2i\omega\hat{\alpha}_{12}[\hat{u}]f, \\ \left[\frac{\chi\nu}{2}\right] = [\hat{u}^2]\left(\frac{\sigma}{2\hat{u}} + i\omega f\right) + 2i\omega[\hat{\rho}\cos\hat{\alpha}]f, \quad \left[\frac{\sigma}{2\hat{u}}\right] = 0, \quad [\Omega'] = i\omega\left[\frac{\chi}{2}\nu\right], \quad x = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega' \\ \Omega' \\ i\omega\Omega \\ i\omega\Omega \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega'_\infty \\ \Omega'_\infty \\ i\omega\Omega_\infty \\ i\omega\Omega_\infty \end{pmatrix}.$$

Полагая $\omega > 0$ (случай $\omega < 0$ может быть рассмотрен аналогично) и вводя следующие зависимые и независимые переменные:

$$X = \omega x, \quad z_1 = i\omega\xi_1, \quad z_2 = i\omega\xi_2, \quad z_3 = i\omega\xi_3, \quad \sigma_2 = \xi_2 - \frac{1 + 2\hat{\alpha}_2}{2\hat{\alpha}_2}\xi_1 - \xi_3,$$

$$\Omega = i\omega Q, \quad \mathcal{P} = \frac{\hat{u}\sigma - \chi\nu}{2\omega}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{\omega},$$

$$z_{1\infty} = i\omega\xi_{1\infty}, \quad z_{2\infty} = i\omega\xi_{2\infty}, \quad z_{3\infty} = i\omega\xi_{3\infty}, \quad \sigma_{2\infty} = \xi_{2\infty} - \frac{1 + 2\hat{\alpha}_{2\infty}}{2\hat{\alpha}_{2\infty}}\xi_{1\infty} - \xi_{3\infty},$$

$$\Omega_\infty = i\omega Q_\infty, \quad \mathcal{P}_\infty = \frac{\sigma_\infty - \chi_\infty\nu_\infty}{2\omega}, \quad \frac{d}{dX} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx},$$

где $\hat{\alpha}_2 = \hat{l} + \hat{\rho}\cos\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\alpha}_{2\infty} = \hat{l}_\infty + \hat{\rho}_\infty\cos\hat{\alpha}_\infty > 0$, перепишем задачу (2.4)–(2.6) в виде

$$\frac{d\mathbf{U}}{dX} = \mathcal{A}\mathbf{U}, \quad X > 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{d\mathbf{U}_\infty}{dX} = \mathcal{A}_\infty\mathbf{U}_\infty, \quad X < 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}[Q + 2\hat{u}\xi_3] + if\lambda_0[\hat{u}] = 0, \quad \left[\hat{u}\xi_1 + \hat{\alpha}_2\xi_3 + \frac{2\hat{u}\hat{\delta}}{\chi^2}\mathcal{P} + \frac{2\Delta\hat{\delta}}{\chi^2}\xi'_3\right] + if\lambda_0[\hat{\alpha}_2] = 0, \\ \left[\frac{\chi^2\hat{u}}{\hat{\alpha}_2}\xi_1 + 2\chi^2\hat{u}\sigma_2 + (3\hat{u}^2 - \chi^2)\xi_3\right] + f(2\hat{\alpha}_{12}[\hat{u}] + i\lambda_0[\hat{u}^2 + \chi^2]) = 0, \\ [\mathcal{P}] + if[\hat{u}^2 + 2\hat{\rho}\cos\hat{\alpha}] = 0, \quad \left[\frac{\xi'_3}{\hat{u}}\right] = 0, \quad [\lambda_0\xi_3 + \hat{u}\xi'_3] = 0, \quad X = 0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь имеем

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \sigma_2 \\ \mathcal{P} \\ Q \\ \xi'_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_\infty = \begin{pmatrix} \xi_{1\infty} \\ \sigma_{2\infty} \\ \mathcal{P}_\infty \\ Q_\infty \\ \xi'_{3\infty} \\ \xi_{3\infty} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2\hat{\alpha}_2}{\hat{u}} & -\dfrac{2\hat{\alpha}_2\hat{\delta}}{\chi^2\hat{u}} \\ 0 & -\tilde{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\chi^2 + \hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_2} & -2\chi^2 & -\dfrac{2\hat{\delta}}{\chi^2} & 1 & \lambda_0 - \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}}{\chi^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2\hat{u} & -\lambda_0 \\ \dfrac{\chi^2 + \hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_2\Delta}\hat{u} & \dfrac{2\chi^2\hat{u}}{\Delta} & -\dfrac{\lambda_0}{\Delta} + \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}}{\chi^2\Delta} & -\dfrac{\hat{u}}{\Delta} & -2\lambda_0\dfrac{\hat{u}}{\Delta} + \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}^2}{\Delta\chi^2} & \dfrac{\hat{\alpha}_2}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\mathcal{A}_\infty = \begin{pmatrix}
-\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & -2\hat\alpha_{2\infty} & -\dfrac{2\hat\alpha_{2\infty}\hat\delta_\infty}{\chi_\infty^2} \\
0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{\chi_\infty^2 + \hat\alpha_{2\infty}}{\hat\alpha_{2\infty}} & -2\chi_\infty^2 & -\dfrac{2\hat\delta_\infty}{\chi_\infty^2} & 1 & \lambda_0 - \dfrac{2\hat\delta_\infty}{\chi_\infty^2} & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -\lambda_0 \\
\dfrac{\chi_\infty^2 + \hat\alpha_{2\infty}}{\hat\alpha_{2\infty}\Delta_\infty} & \dfrac{2\chi_\infty^2}{\Delta_\infty} & -\dfrac{\lambda_0}{\Delta_\infty} + \dfrac{2\hat\delta_\infty}{\chi_\infty^2\Delta_\infty} & -\dfrac{1}{\Delta_\infty} & -\dfrac{2\lambda_0}{\Delta_\infty} + \dfrac{2\hat\delta_\infty}{\Delta_\infty\chi_\infty^2} & \dfrac{\hat\alpha_{2\infty}}{\Delta_\infty} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\xi_3' = \frac{d\xi_3}{dX}, \quad \xi_{3\infty}' = \frac{d\xi_{3\infty}}{dX}, \quad \tilde\lambda = \frac{\lambda_0}{\hat u},
$$

$\hat\delta = \hat\alpha_{12} i$, $\hat\delta_\infty = \hat\alpha_{12\infty} i$ ($\hat\delta_\infty = \hat\delta$, см. (1.6)), $\Delta = \hat u^2 - \chi^2$, $\Delta_\infty = 1 - \chi_\infty^2$ (знаки Δ и Δ_∞ совпадают, см. (1.6)).

Замечание 2.1. Условия $\hat k, \hat k_\infty > 3$ обеспечивают неравенства $\hat\alpha_1\hat\alpha_2 - \hat\alpha_{12}^2 > 0$, $\hat\alpha_{1\infty}\hat\alpha_{2\infty} - \hat\alpha_{12\infty}^2 > 0$. В работе [10] было показано, что эти неравенства, а также полученные ранее условия $\hat\alpha_1 > 0$, $\hat\alpha_2 > 0$, $\hat\alpha_{1\infty} > 0$, $\hat\alpha_{2\infty} > 0$ гарантируют t-гиперболичность системы (1.1) при заданном давлении p, p_∞.

Замечание 2.2. При формулировке задачи (2.7)–(2.9) отбрасываем матрицы $\tilde R$, $\tilde R_\infty/\omega$, поскольку их элементы имеют порядок величин $1/(\omega \mathrm{W})$, $1/(\omega \mathrm{W}_\infty)$, т.е. при больших параметрах ω (в случае коротковолновых возмущений) и числах Вайсенберга W, W_∞ элементы этих матриц – малые величины.

Решения систем (2.7), (2.8) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}(X) &= e^{X\mathcal{A}}\mathbf{U}(0), \quad X > 0, \\
\mathbf{U}_\infty(X) &= e^{X\mathcal{A}_\infty}\mathbf{U}_\infty(0), \quad X < 0,
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

причем векторы $\mathbf{U}(0)$, $\mathbf{U}_\infty(0)$ подлежат определению. Справедливы следующие представления:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\hat T &= \hat T \operatorname{diag}(-\tilde\lambda, -\tilde\lambda, q^+, q^-, -1, -1), \\
\mathcal{A}_\infty \hat T_\infty &= \hat T_\infty \operatorname{diag}(-\lambda_0, -\lambda_0, q_\infty^+, q_\infty^-, -1, -1) \quad \text{при} \quad \Delta > 0 \quad (\Delta_\infty > 0);
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\hat T &= \hat T \operatorname{diag}(-\tilde\lambda, -\tilde\lambda, q^-, -1, q^+, 1), \\
\mathcal{A}_\infty \hat T_\infty &= \hat T_\infty \operatorname{diag}(-\lambda_0, -\lambda_0, q_\infty^-, -1, q_\infty^+, 1) \quad \text{при} \quad \Delta < 0 \quad (\Delta_\infty < 0);
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

где (далее, если размер матрицы превышает ширину страницы, мы будем разбивать ее на две строки, обозначая вертикальной чертой линию переноса матрицы)

$$
\hat T = \begin{pmatrix}
1 & 0 & R^+ & R^- & R_{-1} & R_1 \\
-\dfrac{\chi^2 + \hat\alpha_2}{2\chi^2\hat\alpha_2} & \dfrac{1}{2\chi^2}\left(1 + \left(\tilde\lambda - \dfrac{2\hat\delta}{\chi^2}\right)\tilde\lambda\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \tilde\lambda & L^+ & L^- & L_{-1} & L_1 \\
0 & 1 & K^+ & K^- & K_{-1} & K_1 \\
0 & 0 & -q^+(q^+ + \tilde\lambda) & -q^-(q^- + \tilde\lambda) & \tilde\lambda - 1 & -(\tilde\lambda + 1) \\
0 & 0 & -(q^+ + \tilde\lambda) & -(q^- + \tilde\lambda) & -(\tilde\lambda - 1) & -(\tilde\lambda + 1)
\end{pmatrix},
$$

$$\hat{T}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & R_\infty^+ & R_\infty^- & R_{-1\infty} & R_{1\infty} \\ -\dfrac{\chi_\infty^2 + \hat{\alpha}_{2\infty}}{2\chi_\infty^2\hat{\alpha}_{2\infty}} & \dfrac{1}{2\chi_\infty^2}\left(1 + \left(\lambda_0 - \dfrac{2\hat{\delta}_\infty}{\chi_\infty^2}\right)\lambda_0\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & L_\infty^+ & L_\infty^- & L_{-1\infty} & L_{1\infty} \\ 0 & 1 & K_\infty^+ & K_\infty^- & K_{-1\infty} & K_{1\infty} \\ 0 & 0 & -q_\infty^+(q_\infty^+ + \lambda_0) & -q_\infty^-(q_\infty^- + \lambda_0) & \lambda_0 - 1 & -(\lambda_0 + 1) \\ 0 & 0 & -(q_\infty^+ + \lambda_0) & -(q_\infty^- + \lambda_0) & -(\lambda_0 - 1) & -(\lambda_0 + 1) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \Delta > 0;$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & R^- & R_{-1} & R^+ & R_1 \\ -\dfrac{\chi^2 + \hat{\alpha}_2}{2\chi^2\hat{\alpha}_2} & \dfrac{1}{2\chi^2}\left(1 + \left(\tilde{\lambda} - \dfrac{2\hat{\delta}}{\chi^2}\right)\tilde{\lambda}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} & L^- & L_{-1} & L^+ & L_1 \\ 0 & 1 & K^- & K_{-1} & K^+ & K_1 \\ 0 & 0 & -q^-(q^- + \tilde{\lambda}) & \tilde{\lambda} - 1 & -q^+(q^+ + \tilde{\lambda}) & -(\tilde{\lambda} + 1) \\ 0 & 0 & -(q^- + \tilde{\lambda}) & -(\tilde{\lambda} - 1) & -(q^+ + \tilde{\lambda}) & -(\tilde{\lambda} + 1) \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & R_\infty^- & R_{-1\infty} & R_\infty^+ & R_{1\infty} \\ -\dfrac{\chi_\infty^2 + \hat{\alpha}_{2\infty}}{2\chi_\infty^2\hat{\alpha}_{2\infty}} & \dfrac{1}{2\chi_\infty^2}\left(1 + \left(\lambda_0 - \dfrac{2\hat{\delta}_\infty}{\chi_\infty^2}\right)\lambda_0\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & L_\infty^- & L_{-1\infty} & L_\infty^+ & L_{1\infty} \\ 0 & 1 & K_\infty^- & K_{-1\infty} & K_\infty^+ & K_{1\infty} \\ 0 & 0 & -q_\infty^-(q_\infty^- + \lambda_0) & \lambda_0 - 1 & -q_\infty^+(q_\infty^+ + \lambda_0) & -(\lambda_0 + 1) \\ 0 & 0 & -(q_\infty^- + \lambda_0) & -(\lambda_0 - 1) & -(q_\infty^+ + \lambda_0) & -(\lambda_0 + 1) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \Delta < 0;$$

$$R^\pm = \frac{2\hat{\alpha}_2}{\hat{u}}\left(\frac{\hat{\delta}}{\chi^2} + q^\pm\right), \quad R_{-1,1} = \frac{2\hat{\alpha}_2}{\hat{u}}\left(\frac{\hat{\delta}}{\chi^2} \mp 1\right), \quad R_\infty^\pm = 2\hat{\alpha}_{2\infty}\left(\frac{\hat{\delta}_\infty}{\chi_\infty^2} + q_\infty^\pm\right), \quad R_{-1,1\infty} = 2\hat{\alpha}_{2\infty}\left(\frac{\hat{\delta}_\infty}{\chi_\infty^2} \mp 1\right),$$

$$L^\pm = \frac{1}{\hat{u}}(\Delta(q^\pm)^2 + q^\pm\lambda_0\hat{u} - \hat{\alpha}_2), \quad L_\infty^\pm = (\Delta_\infty(q_\infty^\pm)^2 + q_\infty^\pm\lambda_0 - \hat{\alpha}_{2\infty}),$$

$$L_{-1,1} = \frac{1}{\hat{u}}(\Delta - \hat{\alpha}_2 \mp \lambda_0\hat{u}), \quad L_{-1,1\infty} = (\Delta_\infty - \hat{\alpha}_{2\infty} \mp \lambda_0),$$

$$K^{\pm} = \frac{(2\hat{u}q^{\pm} + \lambda_0)(q^{\pm} + \tilde{\lambda}) - L^{\pm}}{q^{\pm}}, \quad K_{\infty}^{\pm} = \frac{(2q_{\infty}^{\pm} + \lambda_0)(q^{\pm} + \lambda_0) - L_{\infty}^{\pm}}{q_{\infty}^{\pm}},$$

$$K_{-1,1} = \mp 1((\mp 2\hat{u} + \lambda_0)(\tilde{\lambda} \mp 1) - L_{-1,1}), \quad K_{-1,1\infty} = \mp 1((\mp 2 + \lambda_0)(\lambda_0 \mp 1) - L_{-1,1\infty});$$

$$\begin{gathered}
q^{\pm} = \frac{-(\hat{u}\lambda_0 - \hat{\delta}) \pm \sqrt{\lambda_0^2\chi^2 - \Delta\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_{12}^2 - 2\lambda_0\hat{u}\hat{\delta}}}{\Delta}, \\
q_{\infty}^{\pm} = \frac{-(\lambda_0 - \hat{\delta}_{\infty}) \pm \sqrt{\lambda_0^2\chi_{\infty}^2 - \Delta_{\infty}\hat{\alpha}_{2\infty} - \hat{\alpha}_{12\infty}^2 - 2\lambda_0\hat{\delta}_{\infty}}}{\Delta_{\infty}} \quad \text{при} \quad \Delta > 0; \\
q^{\pm} = \frac{(\hat{u}\lambda_0 - \hat{\delta}) \pm \sqrt{\lambda_0^2\chi^2 + |\Delta|\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_{12}^2 - 2\lambda_0\hat{u}\hat{\delta}}}{|\Delta|}, \\
q_{\infty}^{\pm} = \frac{(\lambda_0 - \hat{\delta}) \pm \sqrt{\lambda_0^2\chi_{\infty}^2 + |\Delta_{\infty}|\hat{\alpha}_{2\infty} - \hat{\alpha}_{12\infty}^2 - 2\lambda_0\hat{\delta}_{\infty}}}{|\Delta_{\infty}|} \quad \text{при} \quad \Delta < 0.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Замечание 2.3. При вычислении квадратных корней в формулах (2.13) мы будем рассматривать ветвь, которая соответствует *неотрицательной вещественной части*, т.е.

$$\sqrt{A + iB} = r + i\frac{B}{2r}, \quad r = \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)^{1/2} + A}{2}}. \tag{2.14}$$

С учетом (2.14) перепишем формулы (2.13) в виде

$$\begin{gathered}
q^{\pm} = \frac{-\hat{u}\eta_0 \pm r}{\Delta} + i\left(\frac{\hat{\alpha}_{12} - \hat{u}\omega_0 \pm B/2r}{\Delta}\right), \\
q_{\infty}^{\pm} = \frac{-\eta_0 \pm r_{\infty}}{\Delta_{\infty}} + i\left(\frac{\hat{\alpha}_{12\infty} - \omega_0 \pm B_{\infty}/2r_{\infty}}{\Delta_{\infty}}\right) \quad \text{при} \quad \Delta > 0; \\
q^{\pm} = \frac{\hat{u}\eta_0 \pm r}{|\Delta|} + i\left(\frac{\hat{u}\omega_0 - \hat{\alpha}_{12} \pm B/2r}{|\Delta|}\right), \\
q_{\infty}^{\pm} = \frac{\eta_0 \pm r_{\infty}}{|\Delta_{\infty}|} + i\left(\frac{\omega_0 - \hat{\alpha}_{12\infty} \pm B_{\infty}/2r_{\infty}}{|\Delta_{\infty}|}\right) \quad \text{при} \quad \Delta < 0.
\end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\lambda_0 = \eta_0 + i\zeta_0, \quad \eta_0 = \eta/\omega, \quad \zeta_0 = \omega_0/\omega; \quad A = \chi^2(\eta_0^2 - \zeta_0^2) - \Delta\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_{12}^2 + 2\hat{u}\zeta_0\hat{\alpha}_{12}, \quad B = 2(\chi^2\zeta_0 - \hat{u}\hat{\alpha}_{12})\eta_0, \\
A_{\infty} = \chi_{\infty}^2(\eta_0^2 - \zeta_0^2) - \Delta_{\infty}\hat{\alpha}_{2\infty} - \hat{\alpha}_{12\infty}^2 + 2\zeta_0\hat{\alpha}_{12\infty}, \quad B_{\infty} = 2(\chi_{\infty}^2\zeta_0 - \hat{\alpha}_{12\infty})\eta_0 \quad \text{при} \quad \Delta > 0;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A = \chi^2(\eta_0^2 - \zeta_0^2) + |\Delta|\,\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_{12}^2 + 2\hat{u}\zeta_0\hat{\alpha}_{12}, \quad B = 2(\chi^2\zeta_0 - \hat{u}\hat{\alpha}_{12})\eta_0, \\
A_{\infty} = \chi^2(\eta_0^2 - \zeta_0^2) + |\Delta_{\infty}|\,\hat{\alpha}_{2\infty} - \hat{\alpha}_{12\infty} + 2\zeta_0\hat{\alpha}_{12\infty}, \quad B_{\infty} = 2(\chi_{\infty}^2\zeta_0 - \hat{\alpha}_{12\infty})\eta_0 \quad \text{при} \quad \Delta < 0.
\end{gathered}$$

В результате громоздких выкладок можно показать следующее:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re} q^{\pm}\left(= \frac{-\hat{u}\eta_0 \pm r}{\Delta}\right), \quad \operatorname{Re} q_{\infty}^{\pm}\left(= \frac{-\eta_0 \pm r_{\infty}}{\Delta_{\infty}}\right) < 0 \quad \text{при} \quad \Delta > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\lambda_0(= \eta_0) > 0; \\
\operatorname{Re} q^{-}\left(= \frac{\hat{u}\eta_0 - r}{|\Delta|}\right), \quad \operatorname{Re} q_{\infty}^{-}\left(= \frac{\eta_0 - r_{\infty}}{|\Delta_{\infty}|}\right)) < 0, \\
\operatorname{Re} q^{+}\left(= \frac{\hat{u}\eta_0 + r}{|\Delta|}\right), \quad \operatorname{Re} q_{\infty}^{+}\left(= \frac{\eta_0 + r_{\infty}}{|\Delta_{\infty}|}\right) > 0 \quad \text{при} \quad \Delta < 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\lambda_0 > 0.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Вернемся теперь к формулам (2.10). В силу (2.11), (2.12) эти формулы перепишем (см. [14]) в виде

$$\mathbf{U}(X) = T\begin{pmatrix} e^{XA^-} & 0 \\ 0 & e^X \end{pmatrix}\mathbf{C} = T\begin{pmatrix} e^{XA^-}\mathbf{C}^- \\ e^X C^+ \end{pmatrix}, \quad X > 0,$$

$$\mathbf{U}_\infty(X) = T_\infty\begin{pmatrix} e^{XA_\infty^-}\mathbf{C}_\infty^- \\ e^X C_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad X < 0 \quad \text{при} \quad \Delta > 0;$$

$$\mathbf{U}(X) = T\begin{pmatrix} e^{XA^-}\mathbf{C}^- \\ e^{XA^+}\mathbf{C}^+ \end{pmatrix}, \quad X > 0,$$

$$\mathbf{U}_\infty(X) = T_\infty\begin{pmatrix} e^{XA_\infty^-}\mathbf{C}_\infty^- \\ e^{XA_\infty^+}\mathbf{C}_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad X < 0 \quad \text{при} \quad \Delta < 0;$$

где

$$A^- = \operatorname{diag}(-\tilde{\lambda}, -\tilde{\lambda}, q^+, q^-, -1), \quad A_\infty^- = \operatorname{diag}(-\lambda_0, -\lambda_0, q_\infty^+, q_\infty^-, -1) \quad \text{при} \quad \Delta > 0;$$

$$A^- = \operatorname{diag}(-\tilde{\lambda}, -\tilde{\lambda}, q^-, 1), \quad A_\infty^- = \operatorname{diag}(-\lambda_0, -\lambda_0, q_\infty^-, 1), \quad A^+ = \operatorname{diag}(q^+, 1), \quad A_\infty^+ = \operatorname{diag}(q_\infty^+, 1)$$
$$\text{при} \quad \Delta < 0;$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^- \\ C^+ \end{pmatrix} = T^{-1}\mathbf{U}(0), \quad \mathbf{C}^- = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty^- \\ C_\infty^+ \end{pmatrix} = T_\infty^{-1}\mathbf{U}_\infty(0), \quad \mathbf{C}_\infty^- = \begin{pmatrix} C_{1\infty} \\ \vdots \\ C_{5\infty} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \Delta > 0;$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} = T^{-1}\mathbf{U}(0), \quad \mathbf{C}^- = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^+ = \begin{pmatrix} C_5 \\ C_6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty^- \\ \mathbf{C}_\infty^+ \end{pmatrix} = T_\infty^{-1}\mathbf{U}_\infty(0), \quad \mathbf{C}_\infty^- = \begin{pmatrix} C_{1\infty} \\ \vdots \\ C_{4\infty} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_\infty^+ = \begin{pmatrix} C_{5\infty} \\ C_{6\infty} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \Delta < 0.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$ и в силу (2.15) решения систем (2.7), (2.8) окончательно надо искать в следующем виде:

1) при $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}(X) = T\begin{pmatrix} e^{XA^-}\mathbf{C}^- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X > 0, \\ &\mathbf{U}_\infty(X) = T_\infty\begin{pmatrix} 0 \\ e^X C_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad X < 0; \end{aligned} \tag{2.16}$$

2) при $\Delta < 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}(X) = T\begin{pmatrix} e^{XA^-}\mathbf{C}^- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X > 0, \\ &\mathbf{U}_\infty(X) = T_\infty\begin{pmatrix} 0 \\ e^{XA_\infty^+}\mathbf{C}_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad X < 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Обратимся теперь к краевым условиям (2.9), которые можно переписать так (при этом мы положим $f = 0$):

$$\mathcal{B}\mathbf{U}(0) = B_\infty \mathbf{U}_\infty(0). \tag{2.18}$$

Здесь

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\hat{u} \\ \hat{u} & 0 & \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}}{\chi^2} & 0 & \dfrac{2\hat{\delta}\Delta}{\chi^2} & \hat{\alpha}_2 \\ \dfrac{\chi^2}{\hat{\alpha}_2}\hat{u} & 2\chi^2\hat{u} & 0 & 0 & 0 & 3\hat{u}^2 - \chi^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\hat{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{u} & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \dfrac{2\hat{\delta}_\infty}{\chi_\infty^2} & 0 & \dfrac{2\hat{\delta}_\infty\Delta_\infty}{\chi_\infty^2} & \hat{\alpha}_{2\infty} \\ \dfrac{\chi_\infty^2}{\hat{\alpha}_{2\infty}} & 2\chi_\infty^2 & 0 & 0 & 0 & 3 - \chi_\infty^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

С учетом (2.16), (2.17) перепишем (2.18) в виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}T\begin{pmatrix} \mathbf{C}^- \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{B}_\infty T_\infty \begin{pmatrix} 0 \\ C_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad \Delta > 0; \\ &\mathcal{B}T\begin{pmatrix} \mathbf{C}^- \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{B}_\infty T_\infty \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_\infty^+ \end{pmatrix}, \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Имея в виду представления

$$\mathcal{B}T = \left.\left(\begin{array}{cc} \underbrace{D^-}_{5\ \text{столбцов}} & \overset{1\ \text{столбец}}{\vdots} \end{array}\right)\right\}\ 6\ \text{строк},$$

$$\mathcal{B}_\infty T_\infty = \left.\left(\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}}_{5\ \text{столбцов}} & \overbrace{D_\infty^+}^{1\ \text{столбец}} \end{array}\right)\right\}\ 6\ \text{строк}, \quad \Delta > 0;$$

$$\mathcal{B}T = \left(\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{matrix}}^{\text{2 столбца}} \\ D^- & \\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\text{4 столбца}} & \end{array}\right)\Bigg\}\ \text{6 строк},$$

$$\mathcal{B}_\infty T_\infty = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\text{4 столбца}}\end{matrix} & \overbrace{D_\infty^+}^{\text{2 столбца}} \end{array}\right)\Bigg\}\ \text{6 строк}, \qquad \Delta < 0;$$

равенство (2.19) примет вид (см. [14]):

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\mathbf{C}^-\\ -C_\infty^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D^- & D_\infty^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{C}^-\\ -C_\infty^+\end{pmatrix} = 0, \qquad \Delta > 0;$$

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\mathbf{C}^-\\ -\mathbf{C}_\infty^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D^- & D_\infty^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{C}^-\\ -\mathbf{C}_\infty^+\end{pmatrix} = 0, \qquad \Delta < 0.$$

Пусть нарушается *условие Лопатинского* (см. [14]):

$$\text{при некоторых } \lambda_0 : \operatorname{Re}\lambda_0 > 0 : \det\mathfrak{D} = 0.$$

В этом случае существуют нетривиальные частные решения (2.3), растущие со временем (что указывает на неустойчивость плоского сильного разрыва $x = 0$). После громоздких выкладок находим матрицы $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r^+ & r^- & r_{-1} & r_{1\infty}\\ \hat{u} & \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}\tilde{\lambda}}{\chi^2} & a^+ & a^- & a_{-1} & a_{1\infty}\\ -\hat{u} & \hat{u}\left(1+\left(\tilde{\lambda}-\dfrac{2\hat{\delta}}{\chi^2}\right)\tilde{\lambda}\right) & b^+ & b^- & b_{-1} & b_{1\infty}\\ 0 & \tilde{\lambda} & L^+ & L^- & L_{-1} & L_{1\infty}\\ 0 & 0 & -\dfrac{q^+(q^++\tilde{\lambda})}{\hat{u}} & -\dfrac{q^-(q^-+\tilde{\lambda})}{\hat{u}} & \dfrac{\tilde{\lambda}-1}{\hat{u}} & -(\lambda_0+1)\\ 0 & 0 & -\hat{u}(q^++\tilde{\lambda})^2 & -\hat{u}(q^-+\tilde{\lambda})^2 & -\hat{u}(\tilde{\lambda}-1)^2 & -(\lambda_0+1)^2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta > 0;$$

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r^- & r_{-1} & r_\infty^+ & r_{1\infty}\\ \hat{u} & \dfrac{2\hat{\delta}\hat{u}\tilde{\lambda}}{\chi^2} & a^- & a_{-1} & a_\infty^+ & a_{1\infty}\\ -\hat{u} & \hat{u}\left(1+\left(\tilde{\lambda}-\dfrac{2\hat{\delta}}{\chi^2}\right)\tilde{\lambda}\right) & b^- & b_{-1} & b_\infty^+ & b_{1\infty}\\ 0 & \tilde{\lambda} & L^- & L_{-1} & L_\infty^+ & L_{1\infty}\\ 0 & 0 & -\dfrac{q^-(q^-+\tilde{\lambda})}{\hat{u}} & \dfrac{\tilde{\lambda}-1}{\hat{u}} & -q_\infty^+(q_\infty^++\lambda_0) & -(\lambda_0+1)\\ 0 & 0 & -\hat{u}(q^-+\tilde{\lambda})^2 & -\hat{u}(\tilde{\lambda}-1)^2 & -(q_\infty^++\lambda_0)^2 & -(\lambda_0+1)^2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta < 0;$$

где

$$r^{\pm} = K^{+} - 2\hat{u}(q^{\pm} + \tilde{\lambda}), \quad r_{-1} = K_{-1} - 2\hat{u}(\tilde{\lambda} - 1), \quad r_{1\infty} = K_{1\infty} - 2(\lambda_0 + 1), \quad r_{\infty}^{+} = K_{\infty}^{+} - 2(q_{\infty}^{+} + \lambda_0),$$

$$a^{\pm} = 2\hat{\delta}q^{\pm}\tilde{\lambda} + \hat{\alpha}_2(q^{\pm} - \tilde{\lambda}), \quad a_{-1} = -2\hat{\delta}\tilde{\lambda} - \hat{\alpha}_2(\tilde{\lambda} + 1), \quad a_{1\infty} = 2\hat{\delta}_{\infty}\lambda_0 + \hat{\alpha}_{2\infty}(1 - \lambda_0),$$

$$a_{\infty}^{+} = 2\hat{\delta}_{\infty}q_{\infty}^{+}\lambda_0 + \hat{\alpha}_{2\infty}(q_{\infty}^{+} - \lambda_0), \quad b^{\pm} = 2(\hat{\delta} - \chi^2\tilde{\lambda}) - 3\Delta(q^{\pm} + \tilde{\lambda}), \quad b_{-1} = 2(\hat{\delta} - \chi^2\tilde{\lambda}) - 3\Delta(\tilde{\lambda} - 1),$$

$$b_{1\infty} = 2(\hat{\delta}_{\infty} - \chi_{\infty}^2\lambda_0) - 3\Delta_{\infty}(1 + \lambda_0), \quad b_{\infty}^{+} = 2(\hat{\delta}_{\infty} - \chi_{\infty}^2\lambda_0) - 3\Delta_{\infty}(q_{\infty}^{+} + \lambda_0)$$

и

$$\det\mathcal{D}_0 = -\lambda_0 \det\left(\begin{array}{cc} A^{+} & A^{-} \\ L^{+} - \tilde{\lambda}r^{+} & L^{-} - \tilde{\lambda}r^{-} \\ q^{+}(q^{+} + \tilde{\lambda}) & q^{-}(q^{-} + \tilde{\lambda}) \\ q^{+} + \tilde{\lambda} & q^{-} + \tilde{\lambda} \end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} b_{-1} + a_{-1} - \hat{u}r_{-1}(1 + \hat{\lambda}^2) & A_{1\infty} \\ L_{-1} - \tilde{\lambda}r_{-1} & L_{1\infty} - \tilde{\lambda}r_{1\infty} \\ -(\tilde{\lambda} - 1) & \hat{u}(\lambda_0 + 1) \\ \tilde{\lambda} - 1 & \dfrac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0}(\lambda_0 + 1 - \hat{u}^2) \end{array}\right) = 0, \quad \Delta > 0;$$

$$\det\mathcal{D}_0 = -\lambda_0 \det\left(\begin{array}{cc} A^{-} & b_{-1} + a_{-1} - \hat{u}r_{-1}(1 + \hat{\lambda}^2) \\ L^{-} - \tilde{\lambda}r^{-} & L_{-1} - \tilde{\lambda}r_{-1} \\ q^{-}(q^{-} + \tilde{\lambda}) & -(\tilde{\lambda} - 1) \\ q^{-} + \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} - 1 \end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} A_{\infty}^{+} & A_{1\infty} \\ L_{\infty}^{+} - \tilde{\lambda}r_{\infty}^{+} & L_{1\infty} - \tilde{\lambda}r_{1\infty} \\ \hat{u}q_{\infty}^{+}(q_{\infty}^{+} + \lambda_0) & \hat{u}(\lambda_0 + 1) \\ \dfrac{\lambda_0 + q_{\infty}^{+}}{\lambda_0}(\lambda_0 + q_{\infty}^{+}(1 - \hat{u}^2)) & \dfrac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0}(\lambda_0 + 1 - \hat{u}^2) \end{array}\right) = 0, \quad \Delta < 0.$$

Вычислим агрегаты $L_{-1} - \tilde{\lambda}r_{-1}$ и $b_{-1} + a_{-1} - \hat{u}r_{-1}(1 + \hat{\lambda}^2)$:

$$L_{-1} - \tilde{\lambda}r_{-1} = -(\tilde{\lambda} - 1)(L_{-1} - \tilde{\lambda}\lambda_0) = (\tilde{\lambda} - 1)B_{-1},$$

$$b_{-1} + a_{-1} - \hat{u}r_{-1}(1 + \hat{\lambda}^2) = -(\tilde{\lambda} - 1)(2\hat{\delta} + 3\Delta - \hat{u}^2(1 + \hat{\lambda}^2)(1 + \tilde{\lambda}) - \chi^2(\tilde{\lambda} - 1) - \hat{\alpha}_2\tilde{\lambda}) = (\tilde{\lambda} - 1)A_{-1}.$$

В итоге получаем

$$\det\mathcal{D} = -\lambda_0(\tilde{\lambda} - 1)\det\left(\begin{array}{cc} A^{+} & A^{-} \\ L^{+} - \tilde{\lambda}r^{+} & L^{-} - \tilde{\lambda}r^{-} \\ q^{+}(q^{+} + \tilde{\lambda}) & q^{-}(q^{-} + \tilde{\lambda}) \\ q^{+} + \tilde{\lambda} & q^{-} + \tilde{\lambda} \end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} A_{-1} & A_{1\infty} \\ B_{-1} & L_{1\infty} - \tilde{\lambda}r_{1\infty} \\ -1 & \hat{u}(\lambda_0 + 1) \\ 1 & \dfrac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0}(\lambda_0 + 1 - \hat{u}^2) \end{array}\right) = 0, \quad \Delta > 0; \qquad (2.20)$$

$$\det \mathfrak{D} = -\lambda_0(\tilde{\lambda} - 1)\det \left(\begin{array}{cc|cc} A^- & A_{-1} & A^+_\infty & A_{1\infty} \\ L^- - \tilde{\lambda} r^- & B_{-1} & L^+_\infty - \tilde{\lambda} r^+_\infty & L_{1\infty} - \tilde{\lambda} r_{1\infty} \\ q^-(q^- + \tilde{\lambda}) & -1 & \hat{u} q^+_\infty(q^+_\infty + \lambda_0) & \hat{u}(\lambda_0 + 1) \\ q^- + \tilde{\lambda} & 1 & \dfrac{\lambda_0 + q^+_\infty}{\lambda_0}(\lambda_0 + q^+_\infty(1 - \hat{u}^2)) & \dfrac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0}(\lambda_0 + 1 - \hat{u}^2) \end{array} \right) = 0, \quad \Delta < 0. \tag{2.21}$$

Здесь $A^\pm = b^\pm + a^\pm - \hat{u} r^\pm(1 + \hat{\lambda}^2)$, $A^+_\infty = b^+_\infty + a^+_\infty - \hat{u}\hat{r}^+_\infty(1 + \hat{\lambda}^2)$, $A_{1\infty} = b_{1\infty} + a_{1\infty} - \hat{u} r_{1\infty}(1 + \hat{\lambda}^2)$.

Из (2.20), (2.21) следует, что, например, при $\tilde{\lambda} = 1$ ($\lambda_0 = \hat{u}$) можно построить частное решение вида (2.3), растущее со временем. Следовательно, плоский сильный разрыв с перетеканием полимерной жидкости неустойчив при любых Δ ($\Delta \lesseqgtr 0$) и при наличии анизотропии ($\hat{\alpha}_{12} \neq 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oldroyd J.G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc R. Soc. 1950. V. 200. № 1063. P. 523–541.
2. *Leonov A.I., Prokunin A.N.* Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids. New York: Chapman and Hall, 1994. 475 p.
3. *De Gennes P.G.* Scaling Concepts in Polymer Physics. Cornell University Press. 1979. 324 p.
4. *Doi M., Edwards S.F.* The Theory of Polymer Dynamics. Clarendon: Oxford, 1986. 391 p.
5. *Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Fluids. V. 2. New York: Wiley. 1987. 464 p.
6. *Покровский В.Н.* Статистическая механика разбавленных суспензий. М.: Наука, 1978. 136 с.
7. *Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА. 2012. 122 с.
8. *Pokrovskii V.N.* The mesoscopic theory of polymer dynamics, 2nd Ed. London-New York: Springer, Dordrecht-Heidelberg. 2010. 256 p.
9. *Pyshnograi G.V., Gusev A.S., Pokrovskii V.N.* Constitutive equations for weakly entangled linear polymers // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2009. V. 163. № 1. P. 17–28.
10. *Блохин А.М., Бамбаева Н.В.* Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 5. С. 55–69.
11. *Блохин А.М., Семенко Р.Е.* Стационарные электродинамические течения несжимаемых полимерных сред с сильным разрывом // Сиб. ж. чист. и прикл. матем. 2017. Т. 17. № 2. С. 3–13.
12. *Блохин А.М., Семенко Р.Е.* Обтекание плоского клина потоком несжимаемой полимерной жидкости // Прикл. механ. и техн. физ. 2018. Т. 59. № 1. С. 39–48.
13. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1964.
14. *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Уч. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994. Т. 1: Краевые задачи. 264 с.