ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 10, с. 1731–1751

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ[1)]

© 2019 г. В. Ф. Бутузов

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия)

e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 30.05.2019 г.
Переработанный вариант 30.05.2019 г.
Принята к публикации 10.06.2019 г.

Построена и обоснована асимптотика по малому параметру решения краевой задачи для сингулярно возмущенной стационарной частично диссипативной системы уравнений в случае, когда одно из уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень. Кратность этого корня является причиной того, что пограничный слой оказывается многозонным, а стандартный алгоритм построения асимптотики погранслойного решения становится недостаточным и требует существенной модификации. Обоснование построенной асимптотики проведено с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. Библ. 8.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная частично диссипативная система уравнений, кратный корень вырожденного уравнения, многозонный пограничный слой.

DOI: 10.1134/S0044466919100053

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}-w(x)\frac{du}{dx}\right)=F(u,v,x,\varepsilon),\\ \varepsilon^2\frac{dv}{dx}=f(u,v,x,\varepsilon),\qquad x\in(0;1),\end{gathered}\tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0,\varepsilon)=u^0,\quad v(0,\varepsilon)=v^0,\quad u(1,\varepsilon)=u^1.\tag{2}$$

Здесь $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ – искомые скалярные функции, $\varepsilon>0$ – малый параметр, w, F и f – заданные достаточно гладкие функции.

Система вида (1) относится к классу стационарных *частично диссипативных систем*. Слово "частично" отражает тот факт, что член со второй производной (диссипативный член) содержится только в одном уравнении. Такие системы возникают, в частности, в стационарных задачах химической кинетики в случае быстрых реакций. В этом случае u и v – концентрации реагирующих веществ, ε^{-2} – так называемая константа скорости быстрой реакции (большая величина).

При $\varepsilon=0$ из (1) получаем вырожденную систему

$$F(u,v,x,0)=0,\qquad f(u,v,x,0)=0.\tag{3}$$

Цель работы. Установить условия, при которых существует погранслойное решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), т.е. такое решение, которое при $\varepsilon\to0$ стремится на интервале $0<x<1$ к решению вырожденной системы (3), и построить асимптотическое приближение этого решения по параметру ε на всем отрезке $0\le x\le1$, включая пограничные слои – малые окрестности граничных точек $x=0$ и $x=1$, где решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ отлично от решения вырожденной системы.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00424).

При этом будет рассматриваться случай, когда второе уравнение системы (3) имеет двукратный корень относительно v (см. ниже условие A1). Отметим, что более простой случай однократных корней уравнений (3) рассмотрен в работе [1]. В этом случае асимптотика погранслойного решения строится с помощью известного стандартного алгоритма А.Б. Васильевой (см. [2]). В случае двукратного корня вырожденного уравнения стандартный алгоритм требует существенной модификации, обусловленной тем, что пограничный слой становится многозонным (см., например, [3]–[5]).

Перейдем к условиям, при которых будет рассматриваться задача (1), (2).

A1. Функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,v,x,\varepsilon) = -(v - \varphi(u,x))^2 + \varepsilon f_1(u,v,x,\varepsilon), \tag{4}$$

причем функции $\varphi(u,x)$ и $f_1(u,v,x,\varepsilon)$, а также $w(x)$ и $F(u,v,x,\varepsilon)$ (см. (1)) являются достаточно гладкими при $u \in I_u$, $v \in I_v$, $0 \le x \le 1$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, где I_u и I_v – некоторые интервалы, $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую хотят построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать эти функции бесконечно дифференцируемыми.

При условии A1 второе уравнение вырожденной системы (3) имеет двукратный корень $v = \varphi(u,x)$. Подставив его в первое уравнение системы (3), получим уравнение

$$F(u,\varphi(u,x),x,0) =: g(u,x) = 0. \tag{5}$$

A2. Уравнение (5) имеет корень

$$u = \bar{u}_0(x), \quad x \in [0;1],$$

причем

$$\bar{g}_u(x) := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_0(x),x) > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{6}$$

Положим

$$\bar{v}_0(x) = \varphi(\bar{u}_0(x),x), \quad x \in [0;1].$$

Таким образом, мы получили решение $u = \bar{u}_0(x)$, $v = \bar{v}_0(x)$ вырожденной системы (3), которое будет главной частью асимптотики решения задачи (1), (2).

В разд. 2 будут построены формальные асимптотические ряды для задачи (1), (2). Возникающие при этом условия будем формулировать по ходу построения. В разд. 3 проведено обоснование построенной асимптотики, а разд. 4 содержит некоторые замечания, относящиеся к рассмотренной задаче и ее возможным продолжениям.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

2.1. Вид асимптотики

Формальную асимптотику погранслойного типа в задаче (1), (2) построим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + \Pi u(\xi,\varepsilon) + Pu(\zeta,\varepsilon) + Qu(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{7}$$

$$v(x,\varepsilon) = \bar{v}(x,\varepsilon) + \Pi v(\xi,\varepsilon) + Pv(\zeta,\varepsilon) + Qv(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{8}$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ – регулярные части асимптотики; Πu, Πv и Pu, Pv – погранслойные части, служащие для описания погранслойного поведения решения в окрестности граничной точки $x = 0$; $\xi = x/\varepsilon$ и $\zeta = x/\varepsilon^2$ – погранслойные переменные; Qu, Qv – погранслойные части асимптотики, описывающие поведение решения в окрестности точки $x = 1$; $\tilde{\xi} = (x-1)/\varepsilon$ – погранслойная переменная. Каждое слагаемое в правых частях (7) и (8) будет построено в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Отметим, что в случае, рассмотренном в [1], когда второе уравнение (3) имеет простой (однократный) корень относительно v, асимптотика решения задачи (1), (2) была построена также в виде (7), (8), но каждое слагаемое было рядом по целым степеням ε.

2.2. Регулярные части асимптотики

Построим их в виде

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x), \quad \bar{v}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i(x). \tag{9}$$

Стандартным способом, т.е. подставив ряды (9) в систему (1) вместо u и v, разложив правые части уравнений в ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в левой и правой частях каждого равенства, получим последовательно для $i = 0,1,2,\ldots$ системы уравнений относительно $\bar{u}_i(x)$, $\bar{v}_i(x)$.

Для $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ имеем вырожденную систему

$$F(\bar{u}_0, \bar{v}_0, x, 0) = 0, \quad \left(\bar{v}_0 - \varphi(\bar{u}_0, x)\right)^2 = 0,$$

откуда, используя условие A2, получаем

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(x), \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_0(x) := \varphi\left(\bar{u}_0(x), x\right). \tag{10}$$

Для $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ получается система уравнений

$$\bar{F}_u(x)\bar{u}_1 + \bar{F}_v(x)\bar{v}_1 = 0, \quad \left(\bar{v}_1 - \bar{\varphi}_u(x)\bar{u}_1\right)^2 = \bar{f}_1(x), \tag{11}$$

где

$$\bar{F}_u(x) := \frac{\partial F}{\partial u}\left(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0\right), \quad \bar{F}_v(x) := \frac{\partial F}{\partial v}\left(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0\right), \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}_u(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\bar{u}_0(x), x\right), \quad \bar{f}_1(x) := f_1\left(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0\right). \tag{13}$$

Чтобы система (11) имела решение, необходимо, чтобы функция $\bar{f}_1(x)$ была неотрицательной. Введем более жесткое условие.

A3. Пусть $\bar{f}_1(x) > 0$, $x \in [0;1]$.

Случай, когда $\bar{f}_1(x)$ обращается в нуль в каких-то точках, требует отдельного рассмотрения.

При условии A3 из второго уравнения (11) следует, что $\bar{v}_1 - \bar{\varphi}_u(x)\bar{u}_1$ равно либо $a(x)$, либо $-a(x)$, где

$$a(x) = [\bar{f}_1(x)]^{1/2} > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{14}$$

Оказывается, что для построения и обоснования асимптотики погранслойного решения нужно взять $a(x)$ со знаком плюс:

$$\bar{v}_1 - \bar{\varphi}_u(x)\bar{u}_1 = a(x). \tag{15}$$

Решая теперь линейную систему уравнений, состоящую из первого уравнения в (11) и уравнения (15), и, учитывая, что

$$\bar{F}_u(x) + \bar{F}_v(x)\bar{\varphi}_u(x) = \bar{g}_u(x) > 0$$

(см. (5) и (6)), получаем

$$\bar{u}_1 = -\bar{F}_v(x)\bar{g}_u^{-1}(x)a(x), \quad \bar{v}_1 = \bar{F}_u(x)\bar{g}_u^{-1}(x)a(x).$$

Коэффициенты $\bar{u}_i(x)$, $\bar{v}_i(x)$ рядов (9) при $i \geq 2$ однозначно определяются из линейной системы уравнений

$$\bar{F}_u(x)\bar{u}_i + \bar{F}_v(x)\bar{v}_i = \bar{F}_i(x), \quad -\bar{\varphi}_v(x)\bar{u}_i + \bar{v}_i = \bar{f}_i(x),$$

где $\bar{F}_i(x)$ и $\bar{f}_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x)$, $\bar{v}_j(x)$ с номерами $j < i$.

Итак, ряды (9) построены.

2.3. *Погранслойные части асимптотики* Πu, Πv *и* Pu, Pv

Построим их в виде

$$\Pi u(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i u(\xi), \quad \Pi v(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i v(\xi), \quad \xi = x/\varepsilon, \tag{16}$$

$$Pu(\zeta,\varepsilon) = \varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i u(\zeta), \quad Pv(\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i v(\zeta), \quad \zeta = x/\varepsilon^2. \tag{17}$$

Стандартным способом (см. [2]) для Πu, Πv получаем систему уравнений

$$\frac{d^2\Pi u}{d\xi^2} - \varepsilon w(\varepsilon\xi)\frac{d\Pi u}{d\xi} = \Pi F, \quad \varepsilon\frac{d\Pi v}{d\xi} = \Pi f, \tag{18}$$

где

$$\Pi F := F\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi u, \bar{v}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi v, \varepsilon\xi, \varepsilon\right) - F\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi,\varepsilon\right),$$

$$\Pi f = -[(\bar{v}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi v - \varphi(\bar{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi u, \varepsilon\xi))^2 - (\bar{v}(\varepsilon\xi,\varepsilon) - \varphi(\bar{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon))^2)] + \varepsilon\Pi f_1.$$

Из этой системы также стандартным способом будем извлекать далее уравнения для функций $\Pi_i u$, $\Pi_i v$, $i = 0,1,2,\ldots$

В отличие от рядов Πu и Πv ряды Pu и Pv будут построены не стандартным способом, а с помощью алгоритма, разработанного для сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения [3]–[5], в которых стандартный алгоритм не применим. С этой целью введем еще одну погранслойную переменную $\eta = x/\varepsilon^{3/2}$ и, используя равенства $x = \varepsilon^{3/2}\eta$, $\xi = \sqrt{\varepsilon}\eta$, запишем систему уравнений для Pu, Pv в виде

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2 Pu}{d\zeta^2} - w(\varepsilon^{3/2}\eta)\frac{dPu}{d\zeta} = PF, \quad \frac{dPv}{d\zeta} = Pf, \tag{19}$$

где

$$PF := F(\bar{u}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi u(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon) + Pu, \bar{v}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi v(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon) +$$
$$+ Pv, \varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) - F(\bar{u}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi u(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon), \bar{v}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi v(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon), \varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon),$$

$$Pf := \Big[(\bar{v}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi v(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon) + Pv - \varphi(\bar{u}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi u(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon) + Pu, \varepsilon^{3/2}\eta))^2 -$$
$$- (\bar{v}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi v(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon) - \varphi(\bar{u}(\varepsilon^{3/2}\eta,\varepsilon) + \Pi u(\sqrt{\varepsilon}\eta,\varepsilon), \varepsilon^{3/2}\eta))^2\Big] + \varepsilon Pf_1.$$

Из системы (19) будем извлекать уравнения для $P_i u$, $P_i v$, $i = 0,1,2,\ldots$, описанным ниже нестандартным способом.

Из (18) для $\Pi_0 u$, $\Pi_0 v$ получается система уравнений

$$\frac{d^2\Pi_0 u}{d\xi^2} = F\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u, \bar{v}_0(0) + \Pi_0 v, 0, 0\right),$$

$$\left(\bar{v}_0(0) + \Pi_0 v - \varphi\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u, 0\right)\right)^2 = 0, \quad \xi \ge 0.$$

Из второго уравнения с учетом (10) следует равенство

$$\Pi_0 v = \varphi\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u, 0\right) - \varphi\left(\bar{u}_0(0), 0\right), \tag{20}$$

в силу которого первое уравнение, используя вид (5) функции $g(u,x)$, можно записать в виде

$$\frac{d^2\Pi_0 u}{d\xi^2} = g\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u, 0\right), \quad \xi \ge 0. \tag{21}$$

К этому уравнению нужно добавить граничные условия. Чтобы получить граничное условие при $\xi = 0$, подставим выражение (7) для $u(x,\varepsilon)$ в первое краевое условие из (2), используя представления $\bar{u}$, Πu и Pu в виде рядов и учитывая тот факт, что все члены ряда Qu будут равны нулю при $x = 0$ (см. замечание в конце п. 2.4). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \left(\bar{u}_i(0) + \Pi_i u(0) + \varepsilon P_i u(0)\right) = u^0. \tag{22}$$

Отсюда имеем $\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(0) = u^0$, и, следовательно, граничное условие для $\Pi_0 u(\xi)$ при $\xi = 0$ имеет вид

$$\Pi_0 u(0) = u^0 - \bar{u}_0(0). \tag{23}$$

В качестве второго граничного условия для $\Pi_0 u(\xi)$ и также остальных функций $\Pi_i u(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots$, возьмем стандартное для пограничных функций условие на бесконечности

$$\Pi_i u(\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Итак, функция $\Pi_0 u(\xi)$ определяется как решение задачи (21), (23), (24). Чтобы эта задача имела решение, потребуем выполнения следующего условия.

A4. Пусть $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, 0) > 0$ при $u \in [\bar{u}_0(0), u^0]$.

Заметим, что если u^0 достаточно близко к $\bar{u}_0(0)$, то условие A4 выполнено в силу условия A2 (см. неравенство (6)).

При условии A4 задача для $\Pi_0 u(\xi)$ сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{d\Pi_0 u}{d\xi} = \pm\left[2\int_0^{\Pi_0 u} g\left(\bar{u}_0(0) + s, 0\right) ds\right]^{1/2}, \quad \xi \ge 0, \tag{25}$$

с начальным условием (23), причем в правой части (25) берется знак плюс, если $u^0 < \bar{u}_0(0)$, и знак минус, если $u^0 > \bar{u}_0(0)$. Если же $u^0 = \bar{u}_0(0)$, то $\Pi_0 u(\xi) = 0$ при $\xi \ge 0$, это более простой случай. Будем считать, что $u^0 \ne \bar{u}_0(0)$.

Уравнение (25) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (23) является строго монотонной функцией при $\xi \ge 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0 u(\xi)| \le c \exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0; \tag{26}$$

буквами c и κ (иногда через $c_1, \kappa_1, \ldots$) здесь и далее обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, различные в разных оценках. Оценки вида (26) имеют также производная $\dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi)$ и функция $\Pi_0 v(\xi)$, которая определяется теперь по формуле (20).

Для $\Pi_1 u(\xi)$, $\Pi_1 v(\xi)$ из (18) получается система уравнений

$$\frac{d^2\Pi_1 u}{d\xi^2} = F_u(\xi)\Pi_1 u + F_v(\xi)\Pi_1 v,$$

$$\left(\bar{v}_1(0) + \Pi_1 v - \varphi_u(\xi)\left(\bar{u}_1(0) + \Pi_1 u\right)\right)^2 = b(\xi), \quad \xi \ge 0, \tag{27}$$

где

$$F_u(\xi) := \frac{\partial F}{\partial u}\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), \bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(\xi), 0, 0\right), \tag{28}$$

$F_v(\xi)$ имеет аналогичное выражение,

$$\varphi_u(\xi) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0\right), \tag{29}$$

$$b(\xi) := f_1\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), \bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(\xi), 0, 0\right) - \frac{d\Pi_0 v}{d\xi}(\xi). \tag{30}$$

Используя равенство (20), запишем $b(\xi)$ в виде

$$b(\xi) = f_1\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), \varphi\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0\right), 0, 0\right) - \varphi_u(\xi)\frac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi).$$

Из (25) следует, что

$$\frac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi) = G\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi)\right),$$

где

$$G\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi)\right) := \pm\left[2\int\limits_{\bar{u}_0(0)}^{\bar{u}_0(0)+\Pi_0 u(\xi)} g(t,0)dt\right]^{1/2}.$$

Поэтому выражение для $b(\xi)$ можно записать в виде:

$$b(\xi) = \left[f_1\left(u, \varphi(u,0), 0, 0\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,0)G(u)\right]_{u=\bar{u}_0(0)+\Pi_0 u(\xi)}. \tag{31}$$

Вид второго уравнения в (27) говорит о том, что для разрешимости системы (27) необходимо выполнение неравенства

$$b(\xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 0. \tag{32}$$

Учитывая вид (31) функции $b(\xi)$, и тот факт, что $(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi)) \in (\bar{u}_0(0), u^0]$ при $\xi \geq 0$, введем требование, обеспечивающее выполнение неравенства (32).

A5. Пусть $f_1(u, \varphi(u,0), 0, 0) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,0)G(u) > 0$ при $u \in [\bar{u}_0(0), u^0]$.

При условии A5 из второго уравнения в (27) получаем

$$\bar{v}_1(0) + \Pi_1 v - \varphi_u(\xi)\left(\bar{u}_1(0) + \Pi_1 u\right) = k(\xi), \tag{33}$$

где

$$k(\xi) := \sqrt{b(\xi)} \geq c > 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 0, \tag{34}$$

берем положительный корень из $b(\xi)$, что будет важно при определении функций $P_i u(\zeta)$, $P_i v(\zeta)$.

Из (33) следует

$$\Pi_1 v = \varphi_u(\xi)\Pi_1 v + h_1(\xi), \tag{35}$$

где $h_1(\xi) = k(\xi) - \left(\bar{v}_1(0) - \varphi_u(\xi)\bar{u}_1(0)\right)$ — известная функция, выражающаяся через уже найденные $\Pi_0 u(\xi)$, $\Pi_0 v(\xi)$.

Из формулы (30) для $b(\xi)$, учитывая экспоненциальные оценки функций $\Pi_0 u(\xi)$, $\dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi)$, $\Pi_0 v(\xi)$ и выражение (14) для $a(x)$, получаем

$$k(\infty) = \sqrt{b(\infty)} = \sqrt{\bar{f}_1(0)} = a(0), \tag{36}$$

а так как $\bar{v}_1(0) - \varphi_u(\infty)\bar{u}_1(0) = \bar{v}_1(0) - \bar{\varphi}_u(0)\bar{u}_1(0) = a(0)$ (см. (15)), то $h_1(\infty) = 0$, и, более того, для $h_1(\xi)$ справедлива экспоненциальная оценка

$$|h_1(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi) \quad \text{при} \quad \xi \geq 0. \tag{37}$$

Подставляя выражение (35) для $\Pi_1 v$ в первое уравнение системы (27), приходим к уравнению для $\Pi_1 u(\xi)$

$$\frac{d^2\Pi_1 u}{d\xi^2} = g_u(\xi)\Pi_1 u + \pi_1(\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{38}$$

где

$$g_u(\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}\left(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0\right) = F_u(\xi) + F_v(\xi)\varphi_u(\xi), \tag{39}$$

$\pi_1(\xi) = F_v(\xi)h_1(\xi)$, $\pi_1(\xi)$ имеет оценку вида (37).

Граничные условия для $\Pi_1 u(\xi)$ получаются из (22) и (24):

$$\Pi_1 u(0) = -\bar{u}_1(0), \quad \Pi_1 u(\infty) = 0. \tag{40}$$

Решение задачи (38), (40) запишем в виде

$$\Pi_1 u(\xi) = -\Phi(\xi)\bar{u}_1(0) + \Phi(\xi)\int_0^{\xi} \Phi^{-2}(s)\int_{\infty}^{s} \Phi(t)\pi_1(t)dtds, \tag{41}$$

где $\Phi(\xi) = \dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi)$. Из этой формулы непосредственно следует экспоненциальная оценка

$$\left|\Pi_1 u(\xi)\right| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0, \tag{42}$$

и такую же оценку имеют производная $\dfrac{d\Pi_1 u}{d\xi}(\xi)$ и функция $\Pi_1 v(\xi)$, которая находится теперь по формуле (35).

При $i \ge 2$ для $\Pi_i u(\xi)$, $\Pi_i v(\xi)$ из (18) стандартным способом получается система уравнений

$$\frac{d^2\Pi_i u}{d\xi^2} = F_u(\xi)\Pi_i u + F_v(\xi)\Pi_i v + \chi_i(\xi), \tag{43}$$

$$\Pi_i v - \varphi_u(\xi)\Pi_i u = h_i(\xi), \quad \xi \ge 0, \tag{44}$$

где $\chi_i(\xi)$ и $h_i(\xi)$ выражаются рекуррентно через $\Pi_j u(\xi)$, $\Pi_j v(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеют экспоненциальные оценки вида (37), если такие же оценки имеют $\Pi_j u(\xi)$, $\dfrac{d\Pi_j u}{d\xi}(\xi)$, $\Pi_j v(\xi)$ при $j < i$.

Выразив $\Pi_i v$ из уравнения (44) через $\Pi_i u$ и подставив это выражение в уравнение (43), получим для $\Pi_i u$ уравнение вида (38):

$$\frac{d^2\Pi_i u}{d\xi^2} = g_u(\xi)\Pi_i u + \pi_i(\xi), \quad \xi \ge 0. \tag{45}$$

Граничные условия для $\Pi_i u(\xi)$ следуют из (22) и (24):

$$\Pi_i u(0) = -\bar{u}_i(0) - P_{i-2}u(0), \quad \Pi_i u(\infty) = 0. \tag{46}$$

Очевидно, что задача (45), (46) решается в точности так же, как была решена задача (38), (40), но предварительно нужно найти $P_{i-2}u(0)$, входящее в граничное условие (46).

Обратимся поэтому к построению рядов Pu, Pv, для которых имеем систему уравнений (19). Разложив правые части уравнений в ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, будем извлекать из системы (19) уравнения для $P_i u$, $P_i v$, как уже говорилось, нестандартным способом.

Уравнения для $P_0 u$, $P_0 v$ возьмем в виде (для упрощения записи используем равенства $\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(0) = u^0$, $\bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(0) = \varphi(u^0, 0)$):

$$\frac{d^2 P_0 u}{d\zeta^2} = \varepsilon(F(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0 v, 0, 0) - F(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0)), \tag{47}$$

$$\frac{dP_0 v}{d\zeta} = -((P_0 v)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}kP_0 v), \quad \zeta \ge 0, \tag{48}$$

где $k := k(0)$ определено в (34), $k > 0$.

Зададим для $P_0 u(\zeta)$ граничное условие на бесконечности

$$P_0 u(\infty) = 0, \tag{49}$$

а для $P_0v(\zeta)$ зададим начальное условие при $\zeta = 0$. Чтобы его получить, подставим выражение (8) для $v(x,\varepsilon)$ во второе условие из (2), учитывая, что все члены ряда Qv будут равны нулю при $x = 0$ (см. замечание в конце п. 2.4). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\left(\bar{v}_i(0) + \Pi_i v(0) + P_i v(0)\right) = v^0, \tag{50}$$

откуда следует равенство $\bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(0) + P_0 v(0) = v^0$, и, значит,

$$P_0 v(0) = P^0, \tag{51}$$

где

$$P^0 := v^0 - \left(\bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(o)\right) = v^0 - \varphi(u^0, 0).$$

Таким образом, функция $P_0v(\zeta)$ определяется как решение уравнения (48) с начальным условием (51). Чтобы $P_0v(\zeta)$ была функцией пограничного слоя, т.е. удовлетворяла условию $P_0v(\infty) = 0$, необходимо потребовать, чтобы ее начальное значение P^0 было неотрицательным. Это непосредственно следует из вида правой части в (48). Если $P^0 = 0$, то $P_0v(\zeta) = 0$ при $\zeta \geq 0$, и этот частный случай требует отдельного рассмотрения (см. ниже замечание 2 в разд. 4). Потребуем, чтобы P^0 было положительным.

A6. Пусть $P^0 := v^0 - \varphi(u^0, 0) > 0$.

Решение задачи (48), (51) находится в явном виде:

$$P_0v(\zeta) = 2\sqrt{\varepsilon}kP^0 \exp(-2\sqrt{\varepsilon}k\zeta)(2\sqrt{\varepsilon}k + P^0(1 - \exp(-2\sqrt{\varepsilon}k\zeta)))^{-1}. \tag{52}$$

Заметим, что P_0v зависит не только от ζ, но и от ε, и то же самое будет иметь место для других пограничных функций, но для упрощения записи будем писать $P_iu(\zeta)$, $P_iv(\zeta)$ вместо $P_iu(\zeta,\varepsilon)$, $P_iv(\zeta,\varepsilon)$.

Несложный анализ выражения (52) показывает, что $P_0v(\zeta)$ – монотонно убывающая положительная функция при $\zeta \geq 0$, причем ее убывание носит различный характер на трех промежутках (в трех зонах) полупрямой $\zeta \geq 0$.

Первая зона – отрезок $0 \leq \zeta \leq \varepsilon^{-\gamma}$, где в качестве γ можно взять любое число из интервала (0; 1/2), сколь угодно близкое к 1/2. В этой зоне $P_0v(\zeta)$ убывает с ростом ζ степенным образом:

$$P_0v(\zeta) = O\left(\frac{1}{1+\zeta}\right), \quad 0 \leq \zeta \leq \varepsilon^{-\gamma}.$$

Вторая (переходная) зона – отрезок $\varepsilon^{-\gamma} \leq \zeta \leq \varepsilon^{-1/2}$. Здесь происходит постепенное изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции P_0v от степенного убывания по отношению к ζ до экспоненциального по отношению к новой погранслойной переменной $\eta = x/\varepsilon^{3/2}$.

Третья зона – полупрямая $\zeta \geq \varepsilon^{-1/2}$. Здесь функция P_0v убывает экспоненциально по отношению к погранслойной переменной η:

$$P_0v = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(-\kappa\eta), \quad \eta \geq 1.$$

Введем функцию

$$P_\kappa(\zeta) = \sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta)(1 + \sqrt{\varepsilon} - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta))^{-1}, \quad \zeta \geq 0, \tag{53}$$

где κ – число интервала $(0, 2k)$, $k = k(0)$, определено в (34). Эта функция будет эталонной (оценочной) функцией для всех функций $P_iu(\zeta)$, $P_iv(\zeta)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. каждая из этих функций будет иметь оценку вида

$$|P_iu(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{54}$$

с различными, вообще говоря, числами c и κ для различных i. Для $P_0v(\zeta)$ эта оценка очевидно следует из (52) для любого $\kappa \in (0, 2k)$.

Отметим, что если формировать уравнение для $P_0v(\zeta)$ стандартным способом, то в правой части уравнения (48) не будет слагаемого $-2\sqrt{\varepsilon}kP_0v$, и тогда на всей полупрямой $\zeta \geq 0$ функция $P_0v(\zeta)$ будет иметь оценку $P_0v(\zeta) = O(1/(1+\zeta))$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1), (2) в пограничном слое. Отмеченное трехзонное поведение функции $P_0v(\zeta)$ и такое же поведение остальных P — функций свидетельствует о том, что пограничный слой в окрестности точки $x = 0$ является многозонным.

Так как функция $P_0v(\zeta)$ найдена, то правая часть в уравнении (47) теперь известная функция (обозначим ее $\varepsilon\chi_0(\zeta)$), имеющая оценку

$$|\varepsilon\chi_0(\zeta)| \leq c\varepsilon P_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0. \tag{55}$$

Решение задачи (47), (49) имеет вид

$$P_0u(\zeta) = \varepsilon\int_\infty^\zeta ds\int_\infty^s \chi_0(t)dt,$$

откуда в силу (55) следует оценка вида (54) для $P_0u(\zeta)$. Отметим, что нестандартность формирования уравнения (47) для $P_0u(\zeta)$, состоящая в том, что правая часть в (47) содержит сомножитель ε, нацелена именно на то, чтобы получить для $P_0u(\zeta)$ оценку вида (54).

Так как функция $P_0u(\zeta)$ найдена, то известно число $P_0u(0)$, входящее в граничное условие для функции $\Pi_2u(\xi)$ (см. (46) при $i = 2$). Функция $\Pi_2u(\xi)$ определяется теперь аналогично тому, как была определена функция $\Pi_1u(\xi)$ (см. (41)). И далее для любого $i > 2$ на i-м шаге построения рядов (16) и (17) функция $P_{i-2}u(\xi)$ будет уже известной, и тем самым будет известно число $P_{i-2}u(0)$, входящее в граничное условие для функции $\Pi_iu(\xi)$ (см. (46)), что дает возможность найти эту функцию как решение задачи (45), (46), а затем по формуле (44) найти $\Pi_iv(\xi)$. Отметим, что для каждого $i = 0,1,2,\ldots$ функции $\Pi_iu(\xi)$, $\frac{d\Pi_iu}{d\xi}(\xi)$ и $\Pi_iv(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки вида (42).

Таким образом, на любом i-м шаге сначала определяется функция $\Pi_iu(\xi)$, а затем $\Pi_iv(\xi)$, что делает известным число $\Pi_iv(0)$. Оно понадобится, как мы увидим далее, при определении функции $P_iv(\zeta)$, которая, в свою очередь, войдет в правую часть уравнения для $P_iu(\zeta)$.

Уравнения для $P_iu(\zeta)$, $P_iv(\zeta)$ при $i \geq 1$ извлекаются из системы (19) также нестандартным способом и имеют вид

$$\frac{d^2P_iu}{d\zeta^2} = \varepsilon\hat{F}_v(\zeta)P_iv(\zeta) + \chi_i(\zeta,\varepsilon), \tag{56}$$

$$\frac{dP_iv}{d\zeta} = -2(P_0v(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}k)P_iv + p_i(\zeta,\varepsilon), \tag{57}$$

где $\hat{F}_v(\zeta) = \frac{\partial F}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0,0) + P_0v(\zeta), 0, 0)$, а $\chi_i(\zeta,\varepsilon)$ и $p_i(\zeta,\varepsilon)$ выражаются рекуррентно через $P_ju(\zeta)$, $P_jv(\zeta)$ с номерами $j < i$ и формируются так, чтобы они имели оценки

$$|\chi_i(\zeta,\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon}(P_\kappa^2(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta)), \quad |p_i(\zeta,\varepsilon)| \leq c(P_\kappa^2(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta)), \quad \zeta \geq 0.$$

При этом в процессе формирования этих функций используется переменная η (см. (19)), а в уравнениях (56) и (57) она заменяется на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$.

Граничное условие для $P_iu(\zeta)$ такое же, как (49):

$$P_iu(\infty) = 0, \tag{58}$$

а для $P_iv(\zeta)$ из (50) получаем

$$P_iv(0) = -\bar{v}_i(0) - \Pi_iv(0) =: P_i^0. \tag{59}$$

Решение задачи (57), (59) имеет вид

$$P_iv(\zeta) = \Psi(\zeta)\Psi^{-1}(0)P_i^0 + \Psi(\zeta)\int\limits_0^{\zeta}\Psi^{-1}(s)p_i(s,\varepsilon)ds, \tag{60}$$

где

$$\Psi(\zeta) = \frac{dP_0v}{d\zeta}(\zeta) = -((P_0v(\zeta))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}kP_0v(\zeta)),$$

и так как функция $P_iv(\zeta)$ найдена, то правая часть в (56) становится известной функцией. Решение задачи (56), (58) выражается формулой

$$P_iu(\zeta) = \int\limits_{\infty}^{\zeta}ds\int\limits_{\infty}^{s}(\varepsilon\hat{F}_v(t)P_iv(t) + \chi_i(t,\varepsilon)dt). \tag{61}$$

Из (60) и (61) следуют оценки вида (54) для $P_iv(\zeta)$ и $P_iu(\zeta)$.

Итак, ряды Pu и Pv построены и их коэффициенты P_iu и P_iv имеют оценки вида (54).

2.4. Погранслойные части асимптотики Qu, Qv

Ряды

$$Qu(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_iu(\xi), \quad Qv(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_iv(\xi), \quad \xi = (x-1)/\varepsilon,$$

строятся аналогично рядам Πu, Πv.

Для $Q_0u(\xi)$ получается уравнение, аналогичное (21),

$$\frac{d^2Q_0u}{d\xi^2} = g\left(\bar{u}_0(1) + Q_0u, 1\right), \quad \xi \le 0,$$

с граничными условиями

$$Q_0u(0) = u^1 - \bar{u}_0(1), \quad Q_0u(-\infty) = 0.$$

Введем требование, аналогичное А4.

А7. Пусть $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,1) > 0$ при $u \in [\bar{u}_0(1), u^1]$.

Отметим, что если u^1 достаточно близко к $\bar{u}_0(1)$, то условие А4 выполнено в силу условия А2 (см. неравенство (6)).

При условии А7 задача для $Q_0u(\xi)$ сводится к уравнению первого порядка, аналогичному (25):

$$\frac{dQ_0u}{d\xi} = \pm\left[2\int\limits_0^{Q_0u}g(\bar{u}_0(1) + s, 1)ds\right]^{1/2}, \quad \xi \le 0, \tag{62}$$

с начальным условием

$$Q_0u(0) = u^1 - \bar{u}_0(1), \tag{63}$$

причем в правой части (62) берется знак плюс, если $u^1 > \bar{u}_0(1)$, и знак минус, если $u^1 < \bar{u}_0(1)$. Если же $u^1 = \bar{u}_0(1)$, то $Q_0u(\xi) = 0$ при $\xi \le 0$. Будем считать, что $u^1 \ne \bar{u}_0(1)$.

Уравнение (62) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (63) является строго монотонной функцией при $\xi \le 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$|Q_0u(\xi)| \le c\exp(\kappa\xi), \quad \xi \le 0. \tag{64}$$

Такие же оценки имеют производная $\dfrac{dQ_0u}{q\tilde{\xi}}(\tilde{\xi})$ и функция $Q_o v(\tilde{\xi})$, которая определяется по формуле, аналогичной (20):

$$Q_0 v(\tilde{\xi}) = \varphi(\overline{u}_0(1) + Q_0 u(\tilde{\xi}), 1) - \varphi(\overline{u}_0(1), 1).$$

При $i \geq 1$ функции $Q_i u(\tilde{\xi})$, $Q_i v(\tilde{\xi})$ определяются аналогично функциям $\Pi_i u(\xi)$, $\Pi_i v(\xi)$. При этом вводится требование, аналогичное A5.

A8. Пусть

$$f_1(u, \varphi(u,1), 1, 0) - \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,1)\tilde{G}(u) > 0 \quad \text{при} \quad u \in [\overline{u}_0(1), u^1],$$

где

$$\tilde{G}(u) = \pm\left[2\int_{\overline{u}_0}^{u} g(t,1)dt\right]^{1/2}.$$

Для каждого i функции $Q_i u(\tilde{\xi})$, $\dfrac{dQ_i u}{d\tilde{\xi}}(\tilde{\xi})$ и $Q_i v(\tilde{\xi})$ имеют оценки вида (64).

Итак, все ряды, входящие в правые части равенств (7) и (8), построены.

Замечание. При построении рядов Πu, Πv и Pu, Pv говорилось о том, что все члены рядов Qu и Qv будут равны нулю в точке $x = 0$. Это является результатом стандартной процедуры умножения пограничных функций на бесконечно дифференцируемые срезающие функции. При этом функции $Q_i u$, $Q_i v$ не изменяются при $1 - \delta \leq x \leq 1$ и становятся равными нулю при $0 \leq x \leq 1 - 2\delta$, где в качестве δ возьмем какое-нибудь не зависящее от ε число из интервала $0 < \delta < 1/4$. Указанная процедура не влияет на построенные разложения, так как в силу оценок вида (64) при $0 \leq x \leq 1 - \delta$ (т.е. при $\xi \leq -\delta/\varepsilon$) для любого N имеем равенства

$$Q_i u(\tilde{\xi}) = O\left(\exp\left(-\frac{\kappa\delta}{\varepsilon}\right)\right) = o(\varepsilon^N), \quad Q_i v(\tilde{\xi}) = o(\varepsilon^N).$$

Аналогичное умножение на срезающие функции произведем для $\Pi_i u$, $\Pi_i v$, $P_i u$, $P_i v$.

В результате этой процедуры $\Pi_i u = \Pi_i v = P_i u = P_i v = 0$ при $x \in [1/2, 1]$, $Q_i u = Q_i v = 0$ при $x \in [0; 1/2]$.

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

3.1. Дополнительные условия и формулировка теоремы

Для обоснования построенной асимптотики понадобятся еще два условия, связанные с производными $\partial F/\partial v$ и $\partial\varphi/\partial u$.

A9. Пусть

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u^0, v, 0, 0) < 0 \quad \text{при} \quad v \in [\varphi(u^0, 0), v^0],$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, \varphi(u,0), 0, 0) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [\overline{u}_0(0), u^0],$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(\overline{u}_0(x), \overline{v}_0(x), x, 0) < 0 \quad \text{при} \quad x \in [0; 1],$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, \varphi(u,1), 1, 0) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [\overline{u}_0(1), u^1].$$

A10. Пусть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, 0) > 0 \quad \text{при} \quad u \in [\overline{u}^0(0), u^0],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\overline{u}_0(x), x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0; 1],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,1) > 0 \quad \text{при} \quad u \in [\overline{u}_0(1), u^1].$$

Назначение этих условий будет объяснено ниже.

Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ и $V_n(x,\varepsilon)$, $n = 0,1,2,\ldots$, частичные суммы построенных рядов (7) и (8):

$$\begin{aligned} U_n(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}(\overline{u}_i(x) + \Pi_i u(\xi) + \varepsilon P_i u(\zeta) + Q_i u(\tilde{\xi})), \\ V_n(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}(\overline{v}_i(x) + \Pi_i v(\xi) + P_i v(\zeta) + Q_i v(\tilde{\xi})). \end{aligned} \tag{65}$$

Из самого способа построения этих сумм следует, что они удовлетворяют соотношениям

$$L_\varepsilon(U_n,V_n) := \varepsilon^2\left(\frac{d^2U_n}{dx^2} - w(x)\frac{dU_n}{dx}\right) - F(U_n,V_n,x,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \tag{66}$$

$$M_\varepsilon(V_n,U_n) := \varepsilon^2\frac{dV_n}{dx} - f(U_n,V_n,x,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad x \in [0;1]; \tag{67}$$

$$U_n(0,\varepsilon) = u^0 + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad V_n(0,\varepsilon) = v^0, \quad U_n(1,\varepsilon) = u^1, \tag{68}$$

два последних равенства в (68) получены с учетом замечания.

Теорема. *Если выполнены условия* A1–A10, *то для любого n при достаточно малых* ε *задача* (1), (2) *имеет решение* $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, *для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad x \in [0;1]. \tag{69}$$

3.2. О методе доказательства теоремы

Доказательство проведем с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что для построения нижнего и верхнего решений задачи используется построенная (пока формальная) асимптотика; такой подход был предложен в [6]. В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (1), (2).

Определение 1. Две пары функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$, непрерывных на отрезке $0 \le x \le 1$ и таких, что $\underline{U}$ и $\overline{U}$ непрерывно дифференцируемы по x дважды, а $\underline{V}$ и $\overline{V}$ – один раз на интервале $0 < x < 1$, называются *упорядоченными* нижним и верхним решениями задачи (1), (2), если они удовлетворяют следующим условиям:

1^0. $\underline{U}(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon)$, $x \in [0;1]$ (условие упорядоченности).

2^0. $L_\varepsilon(\underline{U},v) := \varepsilon^2\left(\dfrac{d^2\underline{U}}{dx^2} - w(x)\dfrac{d\underline{U}}{dx}\right) - F(\underline{U},v,x,\varepsilon) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\overline{U},v)$

при $\underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \overline{V}(x,\varepsilon)$, $0 < x < 1$;

$$M_\varepsilon(\underline{V},u) := \varepsilon^2\frac{d\underline{V}}{dx} - f(u,\underline{V},x,\varepsilon) \le 0 \le M_\varepsilon(\overline{V},u)$$

при $\underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \overline{U}(x,\varepsilon)$, $0 < x < 1$.

3^0. $\underline{U}(0,\varepsilon) \le u^0 \le \overline{U}(0,\varepsilon)$, $\underline{V}(0,\varepsilon) \le v^0 \le \overline{V}(0,\varepsilon)$, $\underline{U}(1,\varepsilon) \le u^1 \le \overline{U}(1,\varepsilon)$.

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \le v(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \tag{70}$$

Нетрудно усмотреть, что если функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а функция $f(u, v, x, \varepsilon)$ – неубывающей функцией аргумента u в области

$$G_0 = \{(u, v, x, \varepsilon) : \underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \overline{U}(x,\varepsilon), \underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \overline{V}(x,\varepsilon), 0 \le x \le 1, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$$

(в таком случае говорят, что функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности в области G_0), то для выполнения условия 2^0 из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}), \quad x \in (0;1), \tag{71}$$

$$M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) \le 0 \le M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}), \quad x \in (0;1). \tag{72}$$

Ниже будет показано, что для достаточно малых ε условие A9 обеспечивает квазимонотонность функции F, а A10 совместно с другими условиями – квазимонотонность функции f.

3.3. Оценка производных функций F, f и φ

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые представления и оценки производных функций F, f и φ. Введем обозначение

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}\big(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon\big), \quad x \in [0;1],$$

и такой же смысл придадим обозначениям $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$. Выбор n будем уточнять по ходу изложения. Используя выражения (65) и (66) для U_n и V_n и оценку вида (54) для $P_0 v(\zeta)$, представим $F_u(x,\varepsilon)$ в виде (для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$F_u(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi) + Q_0 u(\tilde{\xi}), \bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi) + Q_0 v(\tilde{\xi}), x, 0) + \\ + O\big(P_\kappa(\zeta)\big) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1].$$

Рассмотрим это выражение раздельно на отрезках $0 \le x \le 1/2$ и $1/2 \le x \le 1$.

На отрезке $[0;1/2]$ $Q_i u(\tilde{\xi}) = 0$, $Q_i v(\tilde{\xi}) = 0$ (см. замечание), поэтому

$$F_u(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}\big(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), \bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi), x, 0\big) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

а так как

$$\bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi) = \varphi\big(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x\big) + O(\varepsilon),$$

то

$$F_u(x,\varepsilon) = \hat{F}_u(x,\xi) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1/2], \tag{73}$$

где

$$\hat{F}_u(x,\xi) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), \varphi\big(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x\big), x, o). \tag{74}$$

В свою очередь для $\hat{F}_u(x,\xi)$ нетрудно получить представление

$$\hat{F}_u(x,\xi) = F_u(\xi) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0) + O(\varepsilon),$$

где $F_u(\xi)$ и $\bar{F}_u(x)$ определены в (28) и (12).

Таким образом,

$$F_u(x,\varepsilon) = F_u(\xi) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0) + O\big(P_\kappa(\zeta)\big) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1/2]. \tag{75}$$

Для производной

$$F_v(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial v}(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon)$$

имеют место представления, аналогичные (73) и (75):

$$F_v(x,\varepsilon) = \hat{F}_v(x,\xi) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}) = F_v(\xi) + \bar{F}_v(x) - \bar{F}_v(0) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1/2], \tag{76}$$

где

$$\hat{F}_v(x,\xi) = \frac{\partial F}{\partial v}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), \varphi(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x), x, 0).$$

Нетрудно усмотреть, что в силу условия A9 производная $F_v(x,\varepsilon)$ для достаточно малых ε удовлетворяет неравенству

$$F_v(x,\varepsilon) \le -c < 0, \quad x \in [0;1], \tag{77}$$

где число $c > 0$ не зависит от ε, а в силу второго и третьего неравенств из условия A9 справедливо неравенство

$$\hat{F}_v(x,\xi) \le -c < 0, \quad x \in [0;1/2]. \tag{78}$$

Буквой c здесь и далее обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, разные в разных оценках.

Для производной

$$\varphi_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(U_n(x,\varepsilon), x)$$

имеют место представления

$$\varphi_u(x,\varepsilon) = \hat{\varphi}_u(x,\xi) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \varphi_u(\xi) + \bar{\varphi}_u(x) - \bar{\varphi}_u(0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1/2], \tag{79}$$

где

$$\hat{\varphi}_u(x,\xi) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x),$$

$\varphi_u(\xi)$ и $\bar{\varphi}_u(x)$ определены в (29) и (13).

Из условия A10 следует, что для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varphi_u(x,\varepsilon) \ge c > 0, \quad x \in [0;1], \tag{80}$$

и, значит, в силу (79)

$$\hat{\varphi}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad x \in [0;1/2]. \tag{81}$$

Аналогично из условий (6) и A4 для достаточно малых ε следует неравенство

$$\hat{g}_u(x,\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x) \ge c > 0, \quad x \in [0;1/2], \tag{82}$$

а так как

$$\hat{g}_u(x,\xi) = \hat{F}_u(x,\xi) + \hat{F}_v(x,\xi)\hat{\varphi}_u(x,\xi), \tag{83}$$

то в силу (78), (80) и (82) из (83) получаем оценку для $\hat{F}_u(x,\xi)$:

$$\hat{F}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad x \in [0;1/2]. \tag{84}$$

На отрезке $[1/2;1]$ $\Pi_i u(\xi) = 0$, $\Pi_i v(\xi) = 0$, $P_i u(\zeta) = 0$, $P_i v(\zeta) = 0$, поэтому аналогично (73)–(76) и (79) получаются представления

$$\begin{aligned} F_u(x,\varepsilon) &= \tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \tilde{F}_u(\tilde{\xi}) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [1/2;1], \\ F_v(x,\varepsilon) &= \tilde{F}_v(x,\tilde{\xi}) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \tilde{F}_v(\tilde{\xi}) + \bar{F}_v(x) - \bar{F}_v(1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [1/2;1], \end{aligned} \tag{85}$$

$$\varphi_u(x,\varepsilon) = \tilde{\varphi}_u(x,\tilde{\xi}) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi}) + \bar{\varphi}_u(x) - \bar{\varphi}_u(1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [1/2;1], \tag{86}$$

где

$$\tilde{F}_u x,(\tilde{\xi}) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + Q_0 u(\tilde{\xi}), \varphi(\bar{u}_0(x) + Q_0 u(\tilde{\xi}), x), x, 0),$$

$$\tilde{F}_u(\tilde{\xi}) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(1) + Q_0 u(\tilde{\xi}), \bar{v}_0(1) + Q_0 u(\tilde{\xi}), 1, 0),$$

$\tilde{F}_v(x,\xi)$ и $\tilde{F}_v(\xi)$ имеют аналогичные выражения,

$$\tilde{\varphi}_0(x,\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + Q_0u(\xi), x), \quad \tilde{\varphi}_u(\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\bar{u}_0(1) + Q_0u(\xi), 1). \tag{87}$$

Используя третье и четвертое неравенства из условия A9, получаем для достаточно малых ε оценку для $\tilde{F}_v(x,\xi)$:

$$\tilde{F}_v(x,\xi) \le -c < 0, \quad x \in [1/2;1], \tag{88}$$

а из условия A10 – оценку для $\tilde{\varphi}_u(x,\xi)$:

$$\tilde{\varphi}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad x \in [1/2;1]. \tag{89}$$

С помощью этих оценок, а также оценки

$$\tilde{g}_u(x,\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + Q_0u(\xi), x) \ge c > 0, \quad x \in [1/2;1] \tag{90}$$

(она следует из условий (6) и A7), получается оценка для $\tilde{F}_u(x,\xi)$, аналогичная (84):

$$\tilde{F}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad x \in [1/2;1]. \tag{91}$$

Перейдем к представлениям и оценкам для производных $f_u(x,\varepsilon)$ и $f_v(x,\varepsilon)$. Для $f_v(x,\varepsilon)$ получаем (см. (4)):

$$f_v(x,\varepsilon) := \frac{\partial f}{\partial v}(U_n, V_n, x, \varepsilon) = -2(V_n(x,\varepsilon) - \varphi(U_n(x,\varepsilon), x)) + \varepsilon f_{1v}(x,\varepsilon). \tag{92}$$

Пусть $x \in [0;1/2]$ и $n \ge 1$. Тогда

$$f_v(x,\varepsilon) = -2[\bar{v}_0(x) + \Pi_0v(\xi) + P_0v(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}(\bar{v}_1(x) + \Pi_1v(\xi) + P_1v(\zeta)) -$$
$$- \varphi(\bar{u}_0(x) + \Pi_0u(\xi) + \sqrt{\varepsilon}(\bar{u}_1(x) + \Pi_1u(\xi)), x)] + O(\varepsilon).$$

Несложные преобразования выражения в квадратных скобках с использованием формул (15) и (33) приводят к равенству

$$f_v(x,\varepsilon) = -2[P_0v(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_1v(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}(k(\xi) + a(x) - a(0))] + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1/2]. \tag{93}$$

Так как $P_0v(\zeta) > 0$, $k(\xi) \ge c > 0$ (см. (34)), $a(x) \ge c > 0$ (это следует из (14)) и $k(\infty) = a(0)$ (см. (36)), то для достаточно малых ε из (93) следует оценка

$$f_v(x,\varepsilon) < -c_0\sqrt{\varepsilon}, \quad x \in [0;1/2], \tag{94}$$

где число $c_0 > 0$ не зависит от ε.

Для $f_u(x,\varepsilon)$ из (4) получаем

$$f_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial f}{\partial u}(U_n, V_n, x, \varepsilon) = 2(V_n(x,\varepsilon) - \varphi(U_n(x,\varepsilon), x))\varphi_u(x,\varepsilon) + \varepsilon f_{1u}(x,\varepsilon),$$

где

$$\varphi_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial\varphi}{\partial u}(U_n(x,\varepsilon), x).$$

Сопоставляя выражение для $f_u(x,\varepsilon)$ с выражением (92) для $f_v(x,\varepsilon)$, приходим к равенству

$$f_u(x,\varepsilon) = -f_v(x,\varepsilon)\varphi_u(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1], \tag{95}$$

откуда, используя (94) и (80), получаем для достаточно малых ε оценку для $f_v(x,\varepsilon)$ (отметим еще раз, что оценка (94) получена при $n \ge 1$)

$$f_u(x,\varepsilon) > c_1\sqrt{\varepsilon}, \quad x \in [0;1/2], \tag{96}$$

где $c_1 = c_0c$, c_0 и c – числа из неравенств (94) и (80).

Если $x \in [1/2;1]$ и $n \ge 1$, то для $f_v(x,\varepsilon)$ и $f_u(x,\varepsilon)$ аналогичным образом получаются оценки вида (94) и (96):

$$f_v(x,\varepsilon) \le -c_0\sqrt{\varepsilon}, \quad f_u(x,\varepsilon) \ge c_1\sqrt{\varepsilon}, \quad x \in [1/2;1]. \tag{97}$$

3.4. Нижнее и верхнее решения задачи (1), (2)

Определим функции $\alpha(x,\xi,\tilde{\xi})$ и $\beta(x,\xi,\tilde{\xi})$ при $x\in[0;1]$ как решение системы линейных уравнений

$$F_u(x,\xi,\tilde{\xi})\alpha+F_v(x,\xi,\tilde{\xi})\beta=A,\quad -\varphi_u(x,\xi,\tilde{\xi})\alpha+\beta=A, \tag{98}$$

где

$$F_u(x,\xi,\tilde{\xi})=\begin{cases}\hat{F}_u(x,\xi), & x\in[0;1/2],\\ \tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}), & x\in[1/2;1],\end{cases}$$

$\hat{F}_u(x,\xi)$ и $\tilde{F}_u(x,\tilde{\xi})$ определены в (74) и (86), обозначения $F_v(x,\xi,\tilde{\xi})$ и $\varphi_u(x,\xi,\tilde{\xi})$ имеют аналогичный смысл, $A>0$ – число, выбор которого уточним ниже.

Так как все пограничные функции были умножены на срезающие функции, то коэффициенты системы (98) являются бесконечно дифференцируемыми функциями на отрезке $0\le x\le 1$, включая точку $x=1/2$, и такими же будут функции α и β.

Построение нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) проведем раздельно на отрезках $[0;1/2]$ и $[1/2;1]$.

На отрезке $[0;1/2]$ определитель системы (98) равен

$$\hat{F}_u(x,\xi)+\hat{F}_v(x,\xi)\hat{\varphi}_u(x,\xi)=\hat{g}_u(x,\xi)\ge c>0$$

(см. (82) и (83)), поэтому система (98) имеет единственное решение:

$$\begin{gathered}\alpha=\hat{\alpha}(x,\xi):=(1-\hat{F}_v(x,\xi))\hat{g}_u^{-1}(x,\xi)A\ge cA>0,\\ \beta=\hat{\beta}(x,\xi):=(\hat{F}_u(x,\xi)+\hat{\varphi}_u(x,\xi))\hat{g}_u^{-1}(x,\xi)A\ge cA>0,\end{gathered} \tag{99}$$

неравенства следуют из оценок (78), (81), (82), (84), а буквой c, как и ранее, обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от A и ε и, вообще говоря, разные в разных оценках. Нижнее и верхнее решения $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\overline{U}$, $\overline{V}$ на отрезке $[0;1/2]$ построим в виде

$$\begin{gathered}\underline{U}(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)-(\hat{\alpha}(x,\xi)+\gamma(\xi))\varepsilon^{n/2}+\sigma(\zeta)\varepsilon^{n/2+1},\\ \underline{V}(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)-(\hat{\beta}(x,\xi)+\varphi_u(\xi)\gamma(\xi))\varepsilon^{n/2},\end{gathered} \tag{100}$$

$$\begin{gathered}\overline{U}(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+(\hat{\alpha}(x,\xi)+\gamma(\xi))\varepsilon^{n/2}-\sigma(\zeta)\varepsilon^{n/2+1},\\ \overline{V}(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)+(\hat{\beta}(x,\xi)+\varphi_u(\xi)\gamma(\xi))\varepsilon^{n/2},\end{gathered} \tag{101}$$

где $n\ge 2$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ определены в (99), $\varphi_u(\xi)$ определена в (29), а функции $\gamma(\xi)$ и $\sigma(\zeta)$ будут выбраны так, что

$$0\le\gamma(\xi)\le cA\exp(-\kappa\xi),\quad \xi\ge 0, \tag{102}$$

$$0\le\sigma(\zeta)\le cAP_\kappa(\zeta),\quad \zeta\ge 0, \tag{103}$$

здесь $P_\kappa(\zeta)$ – функция, определенная в (53).

Покажем, как выбрать функции $\gamma(\xi)$, $\sigma(\zeta)$ и число A так, чтобы при достаточно малых ε функции $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\overline{U}$, $\overline{V}$ удовлетворяли на отрезке $[0;1/2]$ требованиям к нижнему и верхнему решениям из определения 1.

Условие 1^0, т.е. условие упорядоченности, очевидно, выполнено для достаточно малых ε при любом выборе числа $A>0$ и функций $\gamma(\xi)$ и $\sigma(\zeta)$, удовлетворяющих неравенствам (102) и (103).

Перейдем к условию 2^0. Заметим, что в силу неравенств (78) и (97) в области

$$G_0=\{(u,v,x,\varepsilon):\underline{U}(x,\varepsilon)\le u\le\overline{U}(x,\varepsilon),\ \underline{V}(x,\varepsilon)\le v\le\overline{V}(x,\varepsilon),\ 0\le x\le 1/2,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$$

при достаточно малом ε_0 функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности. Отметим, что для функции f важную роль играет здесь тот факт, что $n\ge 2$ в формулах (100) и (101), в силу чего добавки к U_n и V_n в формулах (100), (101) являются величинами порядка $o(\sqrt{\varepsilon})$, поэтому они не повлияют на знак $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ в области G_0 для достаточно малого ε_0.

Следовательно, условие 2^0 из определения 1 будет выполнено на промежутке $(0;1/2]$, если на этом промежутке справедливы неравенства (71), (72).

Рассмотрим выражение для $L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V})$:

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) = L_\varepsilon(U_n,V_n) - \varepsilon^2\left(\frac{d^2\hat{\alpha}}{dx^2} - w(x)\frac{d\hat{\alpha}}{dx}\right)\varepsilon^{n/2} - \left(\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} - \varepsilon w(x)\frac{d\gamma}{d\xi}\right)\varepsilon^{n/2} + \left(\varepsilon^{-2}\frac{d^2\sigma}{d\zeta^2} - w(x)\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)\varepsilon^{n/2+1} - \\ - [F(U_n - (\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n/2} + \sigma\varepsilon^{n/2+1}, V_n - (\hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma)\varepsilon^{n/2}, x, \varepsilon) - F(U_n, V_n, x, \varepsilon)]. \tag{104}$$

Функцию $\varepsilon^2\dfrac{d^2\hat{\alpha}}{dx^2}$ представим в виде

$$\varepsilon^2\frac{d^2\hat{\alpha}}{dx^2} = \frac{\partial^2\hat{\alpha}}{d\xi^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2\hat{\alpha}}{\partial x\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = Aq(\xi) + O(A)\varepsilon, \tag{105}$$

где $q(\xi)$ – известная функция, имеющая оценку

$$|q(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0,$$

а выражение в квадратных скобках в правой части равенства (104) преобразуем, используя для производных F_u и F_v формулы (73)–(76):

$$\begin{aligned} -[\cdots] &= F_u(x,\varepsilon)((\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n/2} - \sigma\varepsilon^{n/2+1}) + F_v(x,\varepsilon)(\hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma)\varepsilon^{n/2} + O(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 + \gamma^2 + \sigma^2)\varepsilon^n = \\ &= (\hat{F}_u(x,\xi) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}))\hat{\alpha}\varepsilon^{n/2} + (F_u(\xi) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}))\gamma\varepsilon^{n/2} - \\ &- F_u(x,\varepsilon)\sigma\varepsilon^{n/2+1} + (\hat{F}_v(x,\xi) + O(P_\kappa(\zeta)) + O(\sqrt{\varepsilon}))\hat{\beta}\varepsilon^{n/2} + (F_v(\xi) + \bar{F}_v(x) - \bar{F}_v(0) + O(P_\kappa(\zeta)) + \\ &+ O(\sqrt{\varepsilon}))\varphi_u(\xi)\gamma\varepsilon^{n/2+1} + O(A^2)\varepsilon^n = A\varepsilon^{n/2} + O(AP_\kappa(\zeta))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{\frac{n+1}{2}} + g_u(\xi)\gamma\varepsilon^{n/2} + O(A^2)\varepsilon^n. \end{aligned} \tag{106}$$

Последнее равенство получено с учетом того, что

$$\bar{F}_u(x,\xi)\hat{\alpha} + \bar{F}_v(x,\xi)\hat{\beta} = A \quad (\text{см. } (98)), \quad F_u(\xi) + F_v(\xi)\varphi_u(\xi) = g_u(\xi) \quad (\text{см. } (39)),$$

$$\hat{\alpha} = O(A), \quad \hat{\beta} = O(A) \quad (\text{см. } (99)), \quad \sigma = O(AP_\kappa(\zeta)) \quad (\text{см. } (103)),$$

$$(\bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0))\gamma(\xi) + (\bar{F}_v(x) - \bar{F}_v(0))\varphi_u(\xi)\gamma(\xi) = O(\varepsilon\xi)\gamma(\xi) = O(A)\varepsilon$$

(см. (102), оценки (102) и (103) будут получены ниже).

Определим теперь функцию $\gamma(\xi)$ как решение задачи

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = g_u(\xi)\gamma - Ar(\xi), \quad \xi \ge 0; \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(\infty) = 0,$$

где $r(\xi) = q(\xi) + \psi(\xi)$, $q(\xi)$ – функция из (105), а в качестве $\psi(\xi)$ возьмем любую функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$|q(\xi)| \le \psi(\xi) \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0. \tag{107}$$

Тогда получим

$$\gamma(\xi) = -A\Phi(\xi)\int_0^\xi \Phi^{-2}(s)\int_\infty^s \Phi(t)r(t)dtds,$$

где $\Phi(\xi) = \dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi)$. Отсюда следует оценка (102) для $\gamma(\xi)$.

Второе слагаемое в правой части (106) имеет оценку

$$\left|O(AP_\kappa(\zeta))\varepsilon^{n/2}\right| \le cAP_\kappa(\zeta)\varepsilon^{n/2}, \quad \zeta \ge 0.$$

Определим функцию $\sigma(\zeta)$ как решение задачи

$$\frac{d^2\sigma}{d\zeta^2} = \varepsilon cAP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0; \quad \sigma(\infty) = 0.$$

Тогда имеем

$$\sigma(\zeta) = \varepsilon cA\int_\infty^\zeta ds\int_\infty^s P_\kappa(t)dt,$$

откуда следует оценка (103) для $\sigma(\zeta)$, а также оценка производной

$$\left|\frac{d\sigma}{d\zeta}(\zeta)\right| \le \sqrt{\varepsilon} c A P_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0$$

(числа c в разных оценках, вообще говоря, разные).

При сделанном выборе функций $\gamma(\xi)$ и $\sigma(\zeta)$ из (104) получаем

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) = L_\varepsilon(U_n,V_n) + A\varepsilon^{n/2} + A\psi(\xi)\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n, \quad x \in (0;1/2],$$

где $L_\varepsilon(U_n,V_n) = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$ (см. (66)), а третье слагаемое в правой части равенства неотрицательное в силу (107). Поэтому для достаточно малых ε слагаемое $A\varepsilon^{n/2}$ обеспечивает выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) > 0, \quad x \in (0;1/2].$$

Рассмотрим теперь выражение для $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ на промежутке (0;1/2]:

$$\begin{gathered} M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = M_\varepsilon(V_n,U_n) - \varepsilon^2\frac{d\hat{\beta}}{dx}\varepsilon^{n/2} - \varepsilon\frac{d}{d\xi}(\varphi_u(\xi)\gamma)\varepsilon^{n/2} - \\ - [f(U_n - (\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n/2} + \sigma\varepsilon^{n/2+1}, V_n - (\hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma)\varepsilon^{n/2}, x, \varepsilon) - f(U_n,V_n,x,\varepsilon)]. \end{gathered} \tag{108}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (108) является величиной порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, не зависящей от A (см. (68)), два следующих слагаемых – величины порядка $O(A)\varepsilon^{n/2+1}$, а выражение в квадратных скобках преобразуем, используя равенства (79) и (95):

$$\begin{gathered} -[\cdots] = f_u(x,\varepsilon((\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n/2} - \sigma\varepsilon^{n/2+1}) + f_v(x,\varepsilon)(\hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma)\varepsilon^{n/2} + O(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 + \gamma^2 + \sigma^2)\varepsilon^n = \\ = f_v(x,\varepsilon)[-\varphi_u(x,\varepsilon)(\hat{\alpha}+\gamma) + \hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma]\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{n/2+1} + O(A^2)\varepsilon^n = \\ = f_v(x,\varepsilon)[(-\hat{\varphi}_u(x,\xi)\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + O(\sqrt{\varepsilon})\hat{\alpha} + (-\varphi_u(x,\varepsilon) + \varphi_u(\xi))\gamma]\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{n/2+1} + O(A^2)\varepsilon^n = \\ = f_v(x,\varepsilon)(A + O(\sqrt{\varepsilon})A)\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{n/2+1} + O(A^2)\varepsilon^n. \end{gathered}$$

Последнее равенство получено с учетом того, что

$$\begin{gathered} -\hat{\varphi}_u(x,\xi)\hat{\alpha} + \hat{\beta} = A \quad (\text{см. } (98)), \quad (-\varphi_u(x,\varepsilon) + \varphi_u(\xi))\gamma = \\ = (-\bar{\varphi}_u(x) + \bar{\varphi}_u(0) + O(\sqrt{\varepsilon}))\gamma = O(\sqrt{\varepsilon})A \quad (\text{см. } (79) \text{ и } (102)). \end{gathered}$$

Таким образом,

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) + O(A)\varepsilon^{n/2+1} + f_v(x,\varepsilon)(1 + O(\sqrt{\varepsilon}))A\varepsilon^{n/2} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Отсюда, используя оценку (94) для $f_v(x,\varepsilon)$, получаем неравенство

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \le O(\varepsilon^{(n+1)/2}) + O(A)\varepsilon^{n/2+1} - c_0(1 + O(\sqrt{\varepsilon}))A\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n, \quad x \in (0;1/2].$$

Так как первое слагаемое в правой части неравенства не зависит от A и $n > (n+1)/2$ (поскольку $n \ge 2$), то для достаточно большого A и достаточно малых ε третье слагаемое будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) < 0, \quad x \in (0;1/2].$$

Таким же образом доказывается, что при достаточно большом A и достаточно малых ε функции $\bar{U}(x,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,\varepsilon)$, определенные в (101), удовлетворяют неравенствам

$$L_\varepsilon(\bar{U},\bar{V}) < 0, \quad M_\varepsilon(\bar{V},\bar{U}) > 0, \quad x \in (0;1/2].$$

Итак, неравенства (71) и (72) выполнены на промежутке (0;1/2].

Проверим выполнение условия 3^0 из определения 1, относящегося к точке $x = 0$. Используя выражение для $\bar{U}(x,\varepsilon)$ (см. (100)), а также первое равенство в (68), и учитывая, что $\gamma(0) = 0$, получаем

$$\underline{U}(0,\varepsilon) = u^0 + O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \hat{\alpha}(0,0)\varepsilon^{n/2} + \sigma(0)\varepsilon^{n/2+1}.$$

Так как $\hat{\alpha}(0,0) \geq cA$ (см. (99)), то для достаточно малых ε имеет место неравенство $\underline{U}(0,\varepsilon) < u^0$.

Таким же образом проверяется выполнение остальных неравенств из условия 3^0, относящихся к точке $x = 0$.

Перейдем к отрезку [1/2;1]. На этом отрезке решение системы (98) имеет вид (неравенства следуют из оценок (88)–(91)):

$$\alpha = \tilde{\alpha}(x,\tilde{\xi}) := (1 - \tilde{F}_v(x,\tilde{\xi}))\tilde{g}_u^{-1}(x,\tilde{\xi})A \geq cA > 0,$$
$$\beta = \tilde{\beta}(x,\tilde{\xi}) := (\tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}) + \tilde{\varphi}_u(x,\tilde{\xi}))\tilde{g}_u^{-1}(x,\tilde{\xi})A \geq cA > 0.$$

Нижнее и верхнее решения на отрезке [1/2;1] возьмем в виде

$$\begin{aligned}\underline{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) - (\tilde{\alpha}(x,\tilde{\xi}) + \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n/2},\\ \underline{V}(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) - (\tilde{\beta}(x,\tilde{\xi}) + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n/2},\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) + (\tilde{\alpha}(x,\tilde{\xi}) + \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n/2},\\ \bar{V}(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) + (\tilde{\beta}(x,\tilde{\xi}) + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n/2},\end{aligned} \tag{110}$$

где $n \geq 2$, $\tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})$ определена в (87), а функция $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$ определяется таким же образом, как $\gamma(\xi)$, и имеет оценку

$$0 \leq \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) \leq cA\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \leq 0.$$

Так же, как это было сделано на отрезке [0;1/2], доказывается, что для достаточно большого A и достаточно малых ε функции $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\bar{U}$, $\bar{V}$, определенные в (109) и (110), удовлетворяют на отрезке [1/2;1] всем требованиям, предъявляемым к нижнему и верхнему решениям. При этом для производных $F_u(x,\varepsilon)$, $F_v(x,\varepsilon)$ и $\varphi_u(x,\varepsilon)$ используются представления вида (85) и (86), а для производных $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$ – соотношение (95) и оценки (97).

Умножим функции $\gamma(\xi)$, $\sigma(\zeta)$ и $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$ на срезающие функции. Тогда пары функций $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\bar{U}$, $\bar{V}$, определенные на отрезке [0;1/2] формулами (100) и (101), а на отрезке [1/2;1] формулами (109) и (110), будут сколь угодно гладкими на всем отрезке [0;1] и, следовательно, будут упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2).

3.5. Завершение доказательства теоремы

Из существования упорядоченных нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) следует, что эта задача имеет для достаточно малых ε решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам (70). Из этих неравенств, учитывая вид (100), (109) и (101), (110) нижнего и верхнего решений, получаем асимптотические равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}),$$

$$v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0;1].$$

Эти равенства доказаны для $n \geq 2$, и, следовательно, для $n \geq 1$ имеем равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_{n+1}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

$$v(x,\varepsilon) = V_{n+1}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad x \in [0;1]. \tag{111}$$

Так как

$$U_{n+1}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad V_{n+1}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad x \in [0;1],$$

то из (111) для $n \geq 1$ получаем равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

$$v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad x \in [0;1], \tag{112}$$

т.е. равенства (69) доказаны для $n \geq 1$.

При $n = 1$ из (112) получаем

$$u(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad v(x,\varepsilon) = V_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1], \tag{113}$$

а поскольку

$$U_1(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad V_1(x,\varepsilon) = V_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1],$$

то из (113) следуют равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v(x,\varepsilon) = V_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0;1],$$

т.е. равенства (69) имеют место также и для $n = 0$. Теорема доказана.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задача (1), (2) рассмотрена в том случае, когда функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид (4). В более общем случае, когда

$$f(u,v,x,\varepsilon) = -h(u,v,x)\big(v - \varphi(u,x)\big)^2 + \varepsilon f_1(u,v,x,\varepsilon),$$

при определенных требованиях к функции $h(u,v,x)$ для задачи (1), (2) также можно построить и обосновать асимптотику вида (7), (8), но построение и обоснование асимптотики станут более громоздкими.

2. Как уже отмечалось в п. 2.3, если $P^0 := v^0 - \varphi(u^0,0) = 0$, то $P_0v(\zeta) = 0$ при $\zeta \geq 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения.

Нетрудно показать, что в этом случае вместо погранслойной переменной $\zeta = x/\varepsilon^2$ появляется погранслойная переменная $\eta = x/\varepsilon^{3/2}$, ряды Pu и Pv имеют вид

$$Pu(\eta,\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_iu(\eta), \quad Pv(\eta,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_iv(\eta),$$

и их коэффициенты $P_iu(\eta)$ и $P_iv(\eta)$ определяются с помощью стандартного алгоритма.

Для $P_0u(\eta)$, $P_0v(\eta)$ получается система уравнений

$$\frac{d^2P_0u}{d\eta^2} = mP_0v, \tag{114}$$

$$\frac{dP_0v}{d\eta} = -((P_0v)^2 + 2kP_0v), \quad \eta \geq 0, \tag{115}$$

с граничными условиями

$$P_ou(\infty) = 0, \tag{116}$$

$$P_0v(0) = -k, \tag{117}$$

где $m = \dfrac{\partial F}{\partial v}(u^0,v^0,0,0)$, $k = k(0) > 0$ (см. (34)).

Решение уравнения (115) с начальным условием (117) имеет вид

$$P_0v(\eta) = -\frac{2k\exp(-2k\eta)}{1+\exp(-2k\eta)}, \quad \eta \geq 0,$$

откуда следует оценка

$$|P_ov(\eta)| \leq c\exp(-\kappa\eta), \quad \eta \geq 0. \tag{118}$$

Зная $P_0v(\eta)$, находим решение задачи (114), (116):

$$P_0u(\eta) = m\int_{\infty}^{\eta} ds\int_{\infty}^{s} P_0v(t)dt,$$

откуда для $P_0u(\eta)$ получается оценка вида (118).

Функции $P_iu(\eta)$, $P_iv(\eta)$ при $i \geq 1$ также находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки вида (118).

Таким образом, в этом частном случае, в отличие от общего случая, когда $P^0 > 0$ (см. A6), убывание пограничных функций P_iu, P_iv имеет не трехзонный, а однозонный характер, а эталонной (оценочной) функцией для них на всей полупрямой $\eta \geq 0$ является функция $\exp(-\kappa\eta)$.

3. Решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) является стационарным решением соответствующей нестационарной частично диссипативной системы уравнений (она получается из (1) добавлением производных по времени $\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ в первое уравнение и $\frac{\partial v}{\partial t}$ – во второе уравнение). Возникают вопросы об устойчивости при $t \to \infty$ стационарного решения $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ и о его области притяжения(в случае устойчивости), т.е. о множестве таких начальных функций, для которых решение начально-краевой задачи для нестационарной системы стремится при $t \to \infty$ к решению $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$. В более простом случае однократных корней уравнений (3) эти вопросы исследованы в [1].

4. Представляет также интерес исследование задачи (1), (2) в случае, когда второе уравнение вырожденной системы (3) имеет корень кратности 3. Некоторые сингулярно возмущенные задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения рассматривались в [7], [8]. В этом случае возникают свои качественные особенности в построении и обосновании асимптотики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика и устойчивость стационарного погранслойного решения частично диссипативной системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1201–1229.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990. 208 с.
3. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 68–80.
4. *Бутузов В.Ф.* Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 12. С. 1593–1605.
5. *Бутузов В.Ф.* О зависимости структуры пограничного слоя от краевых условий в сингулярно возмущенной краевой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 201–214.
6. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
7. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 4. С. 605–614.
8. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Известия РАН. Серия матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 21–44.