УДК 517.977.1

ЗАДАЧА ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ СИСТЕМОЙ С НЕГЛАДКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1)]

© 2019 г. А. В. Фоминых

(199034 С.-Пб., Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия)

e-mail: alexfomster@mail.ru

Поступила в редакцию 29.04.2019 г.
Переработанный вариант 29.04.2019 г.
Принята к публикации 10.06.2019 г.

Рассматривается задача программного управления объектом, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений в нормальной форме. Правая часть системы содержит негладкие слагаемые. Исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации некоторого негладкого функционала. Для него найдены необходимые и достаточные условия минимума в терминах субдифференциала. На основании данных условий к рассматриваемой задаче применяется метод субдифференциального спуска. Используемая методика иллюстрируется на численных примерах. Библ. 24. Табл. 2.

Ключевые слова: программное управление, недифференцируемый функционал, негладкая правая часть, вариационная задача, метод субдифференциального спуска.

DOI: 10.1134/S0044466919100077

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается рост числа как теоретических, так и прикладных исследований по негладкой оптимизации, включая негладкие задачи управления. Динамические системы с недифференцируемыми правыми частями возникают во многих приложениях, например, в экономике [1], в аквакультуре [2], и особенно в механике [3]–[6].

В работах [7]–[10] были получены многочисленные необходимые условия минимума (некоторые из них в форме принципа максимума) для негладких задач управления, включая случай смешанных ограничений. Интегральное ограничение на управление (такое как в данной статье) было ранее рассмотрено в некоторых работах, например, в статье [11]. Работа [12] использует подход к решению задач оптимального управления, подобный рассматриваемому в данной статье.

Некоторые статьи посвящены построению численных методов для негладких задач управления. Например, работы [13], [14] используют технику "сглаживания"; статьи [15], [16] используют подход штрафных функций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = A_1(t)\left|x\right| + A_2(t)x + B(t)u + c(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2}$$

$$x(T) = \mathbf{x_T}, \tag{3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 18-71-00006).

где

$$A_1(t)|x| = \begin{pmatrix} a_{11}^1(t)|x_1| + a_{12}^1(t)|x_2| + \ldots + a_{1n}^1(t)|x_n| \\ a_{21}^1(t)|x_1| + a_{22}^1(t)|x_2| + \ldots + a_{2n}^1(t)|x_n| \\ \ldots \\ a_{n1}^1(t)|x_1| + a_{n2}^1(t)|x_2| + \ldots + a_{nn}^1(t)|x_n| \end{pmatrix}.$$

В системе (1) конечная величина $T > 0$ – заданный момент времени, $x(t)$ есть n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва) и ограниченной на $[0,T]$ производной ($\dot{x} \in P_n[0,T]$), $u(t)$ есть m-мерная вектор-функция управлений, которую будем считать кусочно непрерывной (с конечным числом точек разрыва) и ограниченной на $[0,T]$ ($u \in P_m[0,T]$). $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B(t)$ – вещественные непрерывные на $[0,T]$ матрицы порядков $n \times n$, $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, $c(t)$ – вещественная непрерывная на $[0,T]$ n-мерная вектор-функция. Предполагаем, что система (1) является управляемой [17] из начального положения (2) в конечное состояние (3). В выражениях (2), (3) $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_\mathbf{T} \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$ – заданные векторы.

Пусть управление u принадлежит следующему множеству допустимых управлений:

$$U = \left\{ u \in P_m[0,T] \mid \|u\|^2 = \int_0^T (u(t), u(t))dt \le C \right\}, \tag{4}$$

где C – заданное конечное число, $\int_0^T (v_1(t), v_2(t))dt$ – скалярное произведение вектор-функций $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Если $t_0 \in [0,T)$ – точка разрыва вектор-функции $u(t)$, то для определенности полагаем

$$u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t).$$

В точке T считаем, что

$$u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t).$$

При этом $\dot{x}(t_0)$ – правосторонняя производная вектор-функции x в точке t_0, $\dot{x}(T)$ – левосторонняя производная вектор-функции x в точке T.

Требуется подобрать такое управление, которое принадлежит множеству допустимых управлений (4) и переводит систему (1) из начального положения (2) в конечное состояние (3) за время T.

3. СВЕДЕНИЕ К ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Пусть $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$. Тогда с учетом (2) имеем $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$.

Введем в рассмотрение функционал

$$I(z,u) = \frac{1}{2}\int_0^T (\varphi(z,u,t), \varphi(z,u,t))dt + \max\left\{0, \int_0^T (u(t), u(t))dt - C\right\} + \sum_{i=1}^n \psi_i(z), \tag{5}$$

где

$$\varphi(z,u,t) = z - \left(A_1(t)|x| + A_2(t)x + B(t)u + c(t)\right),$$

$$\psi_i(z) = |\overline{\psi}_i(z)|, \quad \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1,n},$$

а x_{0i} есть i-я компонента вектора x_0, x_{Ti} есть i-я компонента вектора $\mathbf{x}_\mathbf{T}$, $i = \overline{1,n}$.

Нетрудно видеть, что функционал (5) неотрицателен для всех $z \in P_n[0,T]$ и для всех $u \in P_m[0,T]$ и обращается в ноль в точке $[z^*, u^*] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$ тогда и только тогда, когда $x^*(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$ — программное движение, соответствующее искомому программному управлению $u^*(t)$.

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА

Введем множество

$$\Omega = \left\{ z \in P_n[0,T] \mid \mathbf{x}_0 + \int_0^T z(t)dt = \mathbf{x}_\mathbf{T} \right\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0 = \left\{ i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) = 0 \right\},$$

$$I_- = \left\{ i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) < 0 \right\},$$

$$I_+ = \left\{ i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) > 0 \right\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \left\{ u \in P_m[0,T] \mid \int_0^T (u(t), u(t))dt - C = 0 \right\},$$

$$U_- = \left\{ u \in P_m[0,T] \mid \int_0^T (u(t), u(t))dt - C < 0 \right\},$$

$$U_+ = \left\{ u \in P_m[0,T] \mid \int_0^T (u(t), u(t))dt - C > 0 \right\}.$$

Для произвольной скалярной функции $v \in P[0,T]$ введем множества

$$T_0(v) = \left\{ t \in [0,T] \mid v(t) = 0 \right\},$$

$$T_-(v) = \left\{ t \in [0,T] \mid v(t) < 0 \right\},$$

$$T_+(v) = \left\{ t \in [0,T] \mid v(t) > 0 \right\}.$$

Пусть “'” означает транспонирование, а $\mathbf{e_i}$, $i = \overline{1,n}$, — канонический базис в $\mathbf{R^n}$. Пусть также mes$M$ — мера Жордана множества $M \subset \mathbf{R}$. Пусть co{D} — выпуклая оболочка множества D [18].

Введем обозначения

$$f(t) = A_1(t)|x| + A_2(t)x + B(t)u + c(t),$$

$$g(t) = B(t)u + c(t).$$

Напомним определение субдифференциала.

Определение 1. Пусть $\Sigma \subset E$ является некоторым непустым подмножеством вещественного нормированного пространства E. Функция $\xi : \Sigma \to \mathbf{R}$ называется субдифференцируемой на множестве Σ, если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существует такое выпуклое компактное множество, субдифференциал $\partial\xi(\varsigma) \subset E^*$, что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in E$ (т.е. $\mathrm{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ представимо формулой

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma \in \partial\xi(\varsigma)} (\sigma(\Delta\varsigma)) + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

$$\text{где} \quad o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \to 0, \quad \text{если} \quad \alpha \to 0.$$

Отображение $\varsigma \to \partial\xi(\varsigma)$ называется субдифференциальным отображением.

Используя ту же технику, что и в [19], [20], нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Зафиксируем точку* $[z,u]$ *и предположим, что выполняется* $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)\right) = 0$. *Функционал* $I(z,u)$ *субдифференцируем п.в. на* $[0,T]$ (*а именно, на множестве* $[0,T]\backslash\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)$ *и его субдифференциал в точке* $[z,u]$ *для* $t \in [0,T]\backslash\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)$ *выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) = \left\{\left[\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\mathbf{e}_\mathbf{i} + \sum_{i\in I_0}\omega_i\mathbf{e}_\mathbf{i} + \sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j, -B'(t)(z(t)-f(t)) + 2\nu u(t)\right]\right]\right.$$

$$\omega_i \in [-1,1], \quad i \in I_0, \quad \mu_j = 0, \quad j \in I_0, \quad \mu_j = 1, \quad j \in I_+, \quad \mu_j = -1, \quad j \in I_-,$$

$$\left.\nu \in [0,1], \quad u \in U_0, \quad \nu = 1, \quad u \in U_+, \quad \nu = 0, \quad u \in U_-\right\},$$

где

$$P_{ij}(t) = z_j(t) - f_j(t) - \int_t^T (a_{ji}^1(\tau) + a_{ji}^2(\tau))(z_j(\tau) - f_j(\tau))d\tau, \quad t \in T_+(x_j),$$

$$P_{ij}(t) = z_j(t) - f_j(t) + \int_t^T (a_{ji}^1(\tau) - a_{ji}^2(\tau))(z_j(\tau) - f_j(\tau))d\tau, \quad t \in T_-(x_j),$$

здесь $i,\ j = \overline{1,n}$.

Следствие 1. Зафиксируем точку $[z,u]$ и предположим, что $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)\right) = 0$. Если $z \in \Omega$, $u \in U$, то функционал $I(z,u)$ субдифференцируем п.в. на $[0,T]$ и его субдифференциал в точке $[z,u]$ для $t \in [0,T]\backslash\int_{i=1}^{n} T_0(x_i)$ выражается по формуле

$$\partial I(z,u) = \left\{\left[\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\mathbf{e}_\mathbf{i} + \sum_{i=1}^{n}\omega_i\mathbf{e}_\mathbf{i}, -B'(t)(z(t)-f(t)) + 2\nu u(t)\right]\right]\right.$$

$$\left.\omega_i \in [-1,1], \quad i = \overline{1,n}, \quad \nu \in [0,1], \quad u \in U_0, \quad \nu = 0, \quad u \in U_-\right\}. \tag{6}$$

Известно, что необходимым условием минимума функционала (5) в точке $[z^*,u^*]$ в терминах субдифференциала является условие [21]

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*,u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]\times P_m[0,T]$ (в данном случае можно считать, что субдифференциал принадлежит пространству $P_n[0,T]\times P_m[0,T]$, что видно из формулы (6)).

Отсюда заключаем, что справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i^*)\right) = 0$. *Для того, чтобы управление* $u^* \in U$ *переводило систему* (1) *из начального положения* (2) *в конечное состояние* (3) *за время* T, *необходимо, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*,u^*), \tag{7}$$

где выражение для субдифференциала $\partial I(z,u)$ *выписано в* (6).

Если оказалось $I(z^*,u^*) = 0$, *то условие* (7) *является и достаточным* (*это условие является, очевидно, и необходимым*).

Замечание 1. Из Теоремы 1 и Следствия 1 заключаем, что точка $[z^*,u^*]$ (предполагается, что $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i^*)\right) = 0$) будет стационарной точкой функционала $I(z,u)$ п. в. на интервале $[0,T]$ (а именно для $t \in [0,T] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i^*)$). Поэтому в разд. 4 и 5 ниже мы будем использовать термин “стационарная точка”, называя этим термином такую точку, которая является стационарной п.в. на интервале $[0,T]$.

5. МЕТОД СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА

Зафиксируем точку $[z,u]$ и предположим, что $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)\right) = 0$. Найдем минимальный по норме субградиент $h = h(t,z,u) \in \partial I(z,u)$ функционала I в точке $[z,u]$, т.е. решим задачу

$$\min_{h \in \partial I(z,u)} \|h\|^2 = \min_{\omega_i, i \in I_0, \nu} \left\{ \int_0^T \left(s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i \mathbf{e_i} \right)^2 dt + \int_0^T (s_2(t) + 2\nu u(t))^2 dt \right\}, \tag{8}$$

где

$$s_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t) \mathbf{e_i} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{e_j},$$

$$s_2(t) = -B'(t)(z(t) - f(t)),$$

а величины ω_i, $i \in I_0$, μ_j, $j = \overline{1,n}$, ν и функции $P_{ij}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, определены в лемме 1.

Задача (8) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [22]. Обозначим через ω_i^*, $i \in I_0$, ν^* ее решение. Тогда вектор-функция

$$G(t,z,u) := h^* = \left[s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i^* \mathbf{e_i}, s_2(t) + 2\nu^* u(t) \right]$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала I в точке $[z,u]$. Если $\|G(z,u)\| > 0$, то вектор-функция $-\dfrac{G(t,z,u)}{\|G(z,u)\|}$ является направлением субградиентного спуска функционала I в точке $[z,u]$.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска [23] для поиска стационарных точек функционала $I(z,u)$. Фиксируем произвольную точку $[z^1,u^1] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z^k,u^k] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Как и ранее, предполагаем, что $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i^k)\right) = 0$ при всех k, где $x^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t z^k(\tau)d\tau$, а $x_i^k(t)$ есть i-я компонента вектор-функции $x^k(t)$. Если выполнено условие минимума (7), то точка $[z^k,u^k]$ является стационарной точкой функционала $I(z,u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z^{k+1},u^{k+1}] = [z^k,u^k] - \alpha_k G^k,$$

где вектор-функция $G^k := G(t,z^k,u^k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала I в точке $[z_k,u_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\alpha \ge 0} I([z^k,u^k] - \alpha G_k) = I([z^k,u^k] - \alpha_k G^k).$$

Тогда имеем $I(z^{k+1},u^{k+1}) \le I(z^k,u^k)$. Если последовательность $\{[z^k,u^k]\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала $I(z,u)$ по построению. Если же последовательность $\{[z^k,u^k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала $I(z,u)$, поскольку субдифференциальное отображение $\partial I(z,u)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [21] (см. замечание 2 в конце статьи).

Таблица 1

k	$I(z_k, u_k)$	$\|G(z_k, u_k)\|$
1	10.45	5.06168
2	6.70688	3.05079
6	2.12119	1.53663
10	0.27609	0.81284
11	0.05727	0.1428
12	0.00383	0.01235

Отметим, что если в результате работы метода получена некоторая стационарная точка $[\overline{z}, \overline{u}] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$, однако, $I(\overline{z}, \overline{u}) \neq 0$, то следует взять другое начальное приближение и повторить итерационный процесс, поскольку точка $[\overline{z}, \overline{u}]$ в данном случае не является глобальным минимумом функционала $I(z, u)$ (см. теорему 1).

6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}_1 = -|x_1| + x_2 + u + t,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - |x_2| - t^2,$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1,$$

$$x_1(T) = -1, \quad x_2(T) = -2.$$

При этом на управление накладывается ограничение $\|u\| \leq C$.

Положим $T = 2$, $C = 3$. В табл. 1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u(t) = 0.5$, $z(t) = [0.5, 0.5]$, а тогда будет $x(t) = [2 + 0.5t, 1 + 0.5t]$. Из табл. 1 видно, что на 12-й итерации погрешность не превышает величины 4×10^{-3}.

Рассмотрим еще один пример. Пусть задана система

$$\dot{x}_1 = -x_2 + |x_3| + u_1,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + \sin(t),$$
$$\dot{x}_3 = 2|x_1| - x_3 + u_2 - t,$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 2,$$

$$x_1(T) = -1, \quad x_2(T) = 1, \quad x_3(T) = 1.$$

При этом на управление накладывается ограничение $\|u\| \leq C$.

Положим $T = 2$, $C = 7$. В табл. 2 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u(t) = [0.5, 0.5]$, $z(t) = [0.5, 0.5, 0.5]$, а тогда будет $x(t) = [1 + 0.5t, 2 + 0.5t, 2 + 0.5t]$. Из табл. 2 видно, что на 23-й итерации погрешность не превышает величины 4×10^{-3}.

Таблица 2

k	$I(z_k, u_k)$	$\|G(z_k, u_k)\|$
1	61.36711	31.78318
2	14.14267	7.73953
8	2.74841	2.72275
14	1.11712	1.63781
17	0.1653	1.06956
20	0.023	0.1523
23	0.00362	0.01188

7. СЛУЧАЙ НАРУШЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЯ $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)\right) = 0$

Заметим, что этот раздел не претендует на полное решение задачи в случае, рассматриваемом в этом разделе, а лишь описывает некоторые возможные подходы к решению указанной задачи.

Ранее при исследовании функционала I в точке $[z, u]$ накладывалось ограничение $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_0(x_i)\right) = 0$. По-видимому, данное ограничение не является обременительным, если решение x^* исходной задачи не содержит компонент x_i^*, тождественно равных нулю на каком-либо принадлежащем $[0, T]$ интервале ненулевой меры, и если начальное приближение z^1 выбрано так, чтобы это ограничение выполнялось для точки x^1. Исследуем теперь общий случай, когда данное ограничение все же не накладывается.

Нам потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть скалярные функции v_1, v_2 принадлежат пространству $P[0, T]$. Тогда справедливы равенства*

$$\int_0^T v_1(t) \left| \int_0^t v_2(\tau) d\tau \right| dt = \max_{q_1 \in Q_1} \int_0^T (q_1(t), v_2(t)) dt, \qquad t \in T_0(v_1) \cup T_+(v_1),$$

$$\int_0^T v_1(t) \left| \int_0^t v_2(\tau) d\tau \right| dt = \min_{q_2 \in Q_2} \int_0^T (q_2(t), v_2(t)) dt, \qquad t \in T_-(v_1),$$

где

$$Q_1 = \left\{ q_1 \in P[0, T] \mid q_1(t) = \int_t^T w^1(\tau) v_1(\tau) d\tau \right\},$$

$$Q_2 = \left\{ q_2 \in P[0, T] \mid q_2(t) = -\int_t^T w^2(\tau) v_1(\tau) d\tau \right\},$$

и w^1, $w^2 \in W$, где W — это множество функций $w \in P[0, T] : [0, T] \to [-1, 1]$.

Доказательство. Пусть $t \in T_0(v_1) \cup T_+(v_1)$, тогда имеем

$$\int_0^T v_1(t) \left| \int_0^t v_2(\tau) d\tau \right| dt = \int_0^T \left| v_1(t) \int_0^t v_2(\tau) d\tau \right| dt = \max_{w^1 \in W} \int_0^T w^1(t) v_1(t) \int_0^t v_2(\tau) d\tau dt =$$

$$= \max_{w^1 \in W} \int_0^T \int_t^T w^1(\tau) v_1(\tau) d\tau v_2(t) dt = \max_{q_1 \in Q_1} \int_0^T (q_1(t), v_2(t)) dt.$$

Пусть $t \in T_-(v_1)$, тогда получим

$$\int_0^T v_1(t)\left|\int_0^t v_2(\tau)d\tau\right|dt = -\int_0^T\left|v_1(t)\int_0^t v_2(\tau)d\tau\right|dt = -\max_{w^2\in W}\int_9^T w^2(t)v_1(t)\int_0^t v_2(\tau)d\tau dt =$$

$$= -\max_{w^2\in W}\int_9^T\int_t^T w^2(\tau)v_1(\tau)d\tau v_2(t)dt = \min_{w^2\in W}\int_0^T\int_t^T -w^2(\tau)v_1(\tau)d\tau v_2(t)dt = \min_{q_2\in Q_2}\int_0^T (q_2(t), v_2(t))dt.$$

Напомним определение супердифференциала.

Определение 2. Пусть $\Sigma \subset E$ является некоторым непустым подмножеством вещественного нормированного пространства E. Функция $\xi : \Sigma \to \mathbf{R}$ называется супердифференцируемой на множестве Σ, если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существует выпуклый компакт (супердифференциал) $\overline{\partial}\xi(\varsigma) \subset E^*$, что для каждого допустимого приращения аргумента $\Delta\varsigma \in E$ (т.е. $\mathrm{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ представимо в виде

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \min_{\sigma\in\overline{\partial}\xi(\varsigma)}(\sigma(\Delta\varsigma)) + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

$$\text{где} \quad o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \to 0, \quad \text{если} \quad \alpha \to 0.$$

Отображение $\varsigma \to \overline{\partial}\xi(\varsigma)$ называется супердифференциальным отображением.

Определение квазидифференциала объединяет понятия субдифференциала и супердифференциала.

Определение 3. Пусть $\Sigma \subset E$ является некоторым непустым подмножеством вещественного нормированного пространства E. Функция $\xi : \Sigma \to \mathbf{R}$ называется квазидифференцируемой на множестве Σ, если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существуют такие выпуклые компактные множества, субдифференциал $\underline{\partial}\xi(\varsigma) \subset E^*$ и супердифференциал $\overline{\partial}\xi(\varsigma) \subset E^*$, что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in E$ (т.е. $\mathrm{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ представимо по формуле

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma_1\in\underline{\partial}\xi(\varsigma)}(\sigma_1(\Delta\varsigma)) + \min_{\sigma_2\in\overline{\partial}\xi(\varsigma)}(\sigma_2(\Delta\varsigma)) + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

$$\text{где} \quad o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \to 0, \quad \text{если} \quad \alpha \to 0.$$

Пара $D\xi(\varsigma) = \left[\underline{\partial}\xi(\varsigma), \overline{\partial}\xi(\varsigma)\right]$ называется квазидифференциалом функции ξ в точке ς. Отображение $\varsigma \to \left[\underline{\partial}\xi(\varsigma), \overline{\partial}\xi(\varsigma)\right]$ называется квазидифференциальным отображением.

Используя лемму 1 и лемму 2, нетрудно получить следующий результат.

Лемма 3. *Функционал $I(z,u)$ квазидифференцируем* [24]*, и его квазидифференциал в точке* $[z,u]$ *выражается по формуле*

$$DI(z,u) = [\underline{\partial}I(z,u), \tilde{\partial}I(z,u)] =$$

$$= \left[\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \underline{P}_{ij}(t)\mathbf{e_i} + \sum_{i\in I_0}\omega_i\mathbf{e_i} + \sum_{j=1}^n \mu_j\mathbf{e_j}, -B'(t)(z(t) - f(t)) + 2\nu u(t)\right], \left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \overline{P}_{ij}(t)e_i, 0_m\right]\right],$$

где

$$\underline{P}_{ij}(t) = z_j(t) - f_j(t) - \int_t^T (a_{ji}^1(\tau) + a_{ji}^2(\tau))(z_j(\tau) - f_j(\tau))d\tau, \quad t \in T_+(x_j),$$

$$\underline{P}_{ij}(t) = z_j(t) - g_j(t) - \int_t^T a_{ji}^2(\tau)(z_j(\tau) - g_j(\tau))d\tau + \underline{p}_{ij}(t),$$

$$t \in T_0(x_j) \cap T_-(a_{ji}^1(z_j - g_j)),$$

$$\underline{P}_{ij}(t) = z_j(t) - f_j(t) + \int_t^T (a_{ji}^1(\tau) - a_{ji}^2(\tau))(z_j(\tau) - f_j(\tau))d\tau, \quad t \in T_-(x_j),$$

$$\overline{P}_{ij}(t) = z_j(t) - g_j(t) - \int_t^T a_{ji}^2(\tau)(z_j(\tau) - g_j(\tau))d\tau + \overline{p}_{ij}(t),$$

$$t \in T_0(x_j) \cap T_0(a_{ji}^1(z_j - g_j)) \cup T_+(a_{ji}^1(z_j - g_j)),$$

$$\underline{p}_{ij}(t) = \int_t^T w_{ij}^1(\tau)a_{ji}^1(\tau)(z_j(\tau) - g_j(\tau))d\tau,$$

$$\overline{p}_{ij}(t) = -\int_t^T w_{ij}^2(\tau)a_{ji}^1(\tau)(z_j(\tau) - g_j(\tau))d\tau,$$

здесь $i,\ j = \overline{1,n},\ w_{ij}^1,\ w_{ij}^2 \in W$*, а величины* $\omega_i,\ i \in I_0,\ \mu_j,\ j = \overline{1,n},\ \nu$ *определены как в лемме* 1.

Следствие 2. Если $z \in \Omega,\ u \in U$, тогда функционал $I(z,u)$ квазидифференцируем, и его квазидифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле

$$DI(z,u) = [\underline{\partial} I(z,u), \overline{\partial} I(z,u)] = \\ = \left[\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{P}_{ij}(t)e_i + \sum_{i=1}^n \omega_i e_i,\ -B'(t)\big(z(t) - f(t)\big) + 2\nu u(t)\right], \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{P}_{ij}(t)e_i, 0_m\right]\right], \tag{9}$$

где величины $\omega_i,\ i = \overline{1,n},\ \nu$ и функции $\underline{P}_{ij}(t),\ \overline{P}_{ij}(t)$ определены как в следствии 1.

Выпишем известное условие минимума квазидифференцируемого функционала (5) в точке $[z^*,u^*]$ [24]

$$-\overline{\partial} I(z^*,u^*) \subset \underline{\partial} I(z^*,u^*).$$

Используя этот факт, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для того чтобы управление* $u^* \in U$ *переводило систему* (1) *из начального состояния* (2) *в конечное положение* (3) *за время* T*, необходимо, чтобы*

$$-\overline{\partial} I(z^*,u^*) \subset \underline{\partial} I(z^*,u^*), \tag{10}$$

где выражение для субдифференциала $\underline{\partial} I(z,u)$ *и супердифференциала* $\overline{\partial} I(z,u)$ *выписаны в формуле* (9).

Если оказалось $I(z^*,u^*) = 0$*, то условие* (10) *является также достаточным* (*это условие, очевидно, является и необходимым*).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\max_{\overline{h} \in \overline{\partial} I(z,u)} \min_{\underline{h} \in \underline{\partial} I(z,u)} \|\overline{h} + \underline{h}\|^2 = \max_{w_{ij}^2 \in W} \min_{\substack{w_{ij}^1 \in W, \\ \omega_i, i \in I_0, \nu}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{P}_{ij}(t)\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{e}_j + \sum_{i \in I_0} \omega_i \mathbf{e}_i + + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{P}_{ij}(t)\mathbf{e}_i\right)^2 dt + \\ + \int_0^T (-B'(t)(z(t) - f(t)) + 2\nu u(t))^2 dt. \tag{11}$$

Это более сложная (и пока не решенная) задача, чем задача (8), поскольку помимо величин ω_i, $i \in I_0,\ \nu$, требуется также определить вектор-функции $w_{ij}^1(t),\ w_{ij}^2(t),\ i,\ j = \overline{1,n}$.

Одним из подходов к решению этой задачи является поиск данных функций в виде полиномов заданной степени $r \in N \cup \{0\}$, т.е.

$$w_{ij}^k(t) = \overline{w}_{ij_r}^k t^r + \overline{w}_{ij_{r-1}}^k t^{r-1} + \ldots + \overline{w}_{ij_0}^k, \quad k = \overline{1,2}, \quad i,j = \overline{1,n},$$

где $\overline{w}_{ij_l} \in \mathbf{R}$, $l = \overline{0,r}$. Обозначим через ω_i^*, $i \in I_0$, ν^*, $w_{ij}^{*1}(t)$, $w_{ij}^{*2}(t)$, $i,\ j = \overline{1,n}$, решение задачи (11). Положим

$$\overline{G}(t,z,u) := \overline{h}^*(t,z,u) + \underline{h}^*(t,z,u) =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{P}_{ij}^*(t)\mathbf{e}_\mathbf{i} + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{e}_\mathbf{j} + \sum_{i\in I_0}\omega_i^*\mathbf{e}_\mathbf{i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{P}_{ij}^*(t)\mathbf{e}_\mathbf{i},\ -B'(t)\big(z(t) - f(t)\big) + 2\nu^* u(t) g\right],$$

где функции $\underline{P}_{ij}^*(t)$, $\overline{P}_{ij}^*(t)$ вычислены на функциях $w_{ij}^{*k}(t)$, $k = \overline{1,2}$, $i,\ j = \overline{1,n}$. Если $\|\overline{G}(z,u)\| > 0$, тогда вектор-функция $-\dfrac{\overline{G}(t,z,u)}{\|\overline{G}(z,u)\|}$ является направлением квазидифференциального спуска функционала I в точке $[z,u]$.

Используя полученное направление, можно построить метод квазидифференциального спуска [24], который аналогичен описанному методу субдифференциального спуска.

Замечание 2. Для того, чтобы строить аналогичные рассмотренным методы, сходимость которых можно гарантировать, от субдифференциального и квазидифференциального следует перейти к гиподифференциальному и кодифференциальному отображениям соответственно, которые уже являются непрерывными в метрике Хаусдорфа [24].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье задача построения программного управления и соответствующего ему программного движения в системе, содержащей негладкую функцию фазовых координат, сводится к вариационной задаче минимизации некоторого функционала на всем пространстве. Для этого функционала выписан субдифференциал, найдены необходимые и достаточные условия минимума. На основании этих условий описывается метод субдифференциального спуска для решения задачи. Приведены примеры применения теоретических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ruiz Del Portal X.* Non-smooth monotonicity constraints in optimal control problems: Some economic applications // Optim. Control Appl. and Meth. 2011. V. 32. № 4. P. 396–413.
2. *Blanchard E.A., Loxton R., Rehbock V.* A computational algorithm for a class of non-smooth optimal control problems arising in aquaculture operations // Appl. Math. and Comput. 2013. V. 219. P. 8738–8746.
3. *Potini A., Tornambe A., Menini L., Abdallah C.T., Dorato P.* Finite-time control of linear mechanical systems subject to non-smooth impacts // 14-th Mediterranean Conf. on Control and Automat. (MED'06). № 1700707. Ancona, Italy, 2006.
4. *Han S.-I., Lee J.-M.* Backstepping sliding mode control with FWNN for strict output feedback non-smooth nonlinear dynamic system // Int. J. Control, Autom. and Syst. 2013. V. 11. № 2. P. 398–409.
5. *Ansari A.R., Murphey T.D.* Sequential Action Control: Closed-Form Optimal Control for Nonlinear and Nonsmooth Systems // IEEE Trans. on Robot. 2016. V. 32. № 5. P. 1196–1214.
6. *Jiffri S., Mottershead J.E.* Nonlinear control of an aeroelastic system with a non-smooth structural nonlinearity // Mech. and Machine Sci. 10th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (VETOMAC 2014). V. 23. P. 317–328. Manchester, UK, 2014.
7. *Haider Md., Biswas A., do Rosario de Pinho M.* A nonsmooth maximum principle for optimal control problems with state and mixed constraints – convex case // Discrete and Cont. Dynam. Syst. 2011. V. 2011. P. 174–183.
8. *Vinter R.B., Pappas G.* A maximum principle for nonsmooth optimalcontrol problems with state constraints // J. of Math. Analysis and Appl. 1982. V. 89. № 1. P. 212–232.
9. *Li A., Ye J.J.* Necessary optimality conditions for optimal control Problems with Nonsmooth Mixed State and Control Constraints // Set-Val. and Variat. Analysis. 2016. V. 24. № 3. P. 449–470.
10. *De Oliveira V.A., Silva G.N.* New optimality conditions for nonsmooth control problems // J. Glob. Optim. 2013. V. 57. № 4. P. 1465–1484.
11. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 2. С. 13–28.
12. *Shablinskaya I.R.* Necessary conditions for optimality in nonsmooth problems of control theory // Soviet J. Computer and Systems Sci. 1985. V. 23. № 5. P. 153–159.
13. *Noori Skandari M.H., Kamyad A.V., Effati S.* Smoothing approach for a class of nonsmooth optimal control problems // Appl. Math. Model. 2016. V. 40. № 2. P. 886–903.

14. *Wu C.Z., Teo K.L., Zhao Y.* Numerical method for a class of optimal control problems subject to nonsmooth functional constraints // J. Comput. and Appl. Math. 2008. V. 217. № 2. P. 311–325.
15. *Fominyh A.V., Karelin V.V., Polyakova L.N.* Application of the hypodifferential descent method to the problem of constructing an optimal control // Optim. Lett. 2018. V. 12. № 8. P. 1825–1839.
16. *Gorelik V.A., Tarakanov A.F.* Penalty method for nonsmooth minimax control problems with interdependent variables // Cybernetics. 2989. V. 25. № 4. P. 483–488.
17. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
18. *Rockafellar R.* Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970.
19. *Карелин В.В.* Точные штрафы в задаче наблюдения // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2008. № 4. С. 3–7.
20. *Тамасян Г.Ш.* Градиентные методы решения задачи Коши // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2009. № 4. С. 224–230.
21. *Васильев Л.В., Демьянов В.Ф.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
22. *Wolfe P.* The simplex method for quadratic programming // Econom. 1959. V. 27. P. 382–398.
23. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высш. школа, 2005.
24. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.