

УДК 519.86

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА¹⁾

© 2019 г. В. М. Исаков^{1,*}, С. И. Кабанихин^{2,**}, А. А. Шананин^{3,***},
М. А. Шишленин^{2,****}, С. Жанг^{4,*****}

¹⁾ KS 67260-0033 Wichita, Department of Mathematics and Statistics, Wichita State University, USA;

²⁾ Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Россия;

³⁾ Долгопрудный, Московский физико-технический институт, Россия;

⁴⁾ Beijing, Tianjin University of Finance and Economics, China)

*e-mail: victor.isakov@wichita.edu

**e-mail: kabanikhin@sscc.ru

***e-mail: alexshan@yandex.ru

****e-mail: mshishlenin@ngs.ru

*****e-mail: shuhua55@126.com

Поступила в редакцию 21.04.2019 г.
Переработанный вариант 10.06.2019 г.
Принята к публикации 10.06.2019 г.

Разработан алгоритм восстановления функции волатильности в модифицированной модели Блэка-Шоулза. Приведены результаты численных расчетов. Показано, что добавление информации о ценах однотипных опционов с различными датами выпуска позволяет улучшить точность и увеличить интервал восстановления функции волатильности. Библ. 21. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнение Блэка-Шоулза, коэффициентная обратная задача, оптимизация, локальная волатильность.

DOI: 10.1134/S0044466919100090

1. ВВЕДЕНИЕ

Финансовая математика — относительно молодая дисциплина, бурно развивавшаяся в последние десятилетия [4]. Это развитие было обусловлено формированием мощных финансовых рынков с разнообразными инструментами перераспределения рисков между участниками рынка. Изменения, произошедшие на нефтяном рынке в связи с созданием картеля нефтедобывающих стран ОПЕК, потребовали от развитых стран — экспортеров нефти адаптации к новым условиям в мировой экономике. В результате изменились масштабы и сложность фондовых рынков, на которых обращается на порядок больше денежных средств, чем в реальном секторе экономики, и характерные времена существенных изменений на которых на несколько порядков меньше, чем в реальном секторе экономики. В базовом варианте финансовая математика исходит из упрощающего предположения о том, что события, происходящие в реальном секторе экономики, учитываются участниками рынка, но являются общеизвестными. А значит, фондовый рынок можно изучать отдельно от реального сектора экономики. Кроме того, в базовом варианте предполагается одинаковая информированность участников рынка. В таких допущениях предметом деятельности участников рынка является управление рисками, связанными с неопределенностью динамики финансовых инструментов. Для управления рисками используются вторичные финансовые инструменты. Теория ценообразования на рынке вторичных финансовых инструментов была заложена в работах [1]–[3]. Современное изложение теории арбитража, на которой основано моделирование ценообразования на рынке вторичных финансовых инструментов, содержится в монографиях [10], [14].

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-01-00694, 17-07-00507, 17-51-150001, 17-51-540004, 16-29-15120, 16-01-00437) и NSF (проект DMS 15-08902).

В финансовой математике активно исследуются обратные задачи в моделях локальной волатильности (см. [5], [6], [8], [9], [13], [17]–[19]). В данной работе сформулирована и решена задача определения функции волатильности, которая входит в стохастическое дифференциальное уравнение, моделирующее изменение индекса фондового рынка. Для этого используются данные о динамике индекса фондового рынка и о котировках европейского опциона на продажу, привязанного к этому индексу. Важными индикаторами состояния фондового рынка являются агрегированные индексы, такие как S&P 500 или SSE Composite. Традиционно динамика индекса фондового рынка моделируется как геометрическое броуновское движение и описывается с помощью стохастического дифференциального уравнения. Вид этого стохастического дифференциального уравнения зависит от состояния реального сектора экономики. Поскольку характерные времена изменений в реальном секторе экономики много больше характерных времен изменений конъюнктуры на фондовом рынке, можно считать эти уравнения квазистационарными.

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Будем моделировать динамику индекса $s(\tau)$ фондового рынка с помощью стохастического дифференциального уравнения

$$ds = s(r d\tau + \sigma(s) dW).$$

Здесь τ – время, W – винеровский процесс, r – доходность на фондовом рынке, $\sigma(s)$ – функция волатильности фондового рынка.

Так же, как и первичные финансовые инструменты (акции), на фондовом рынке торгуются вторичные финансовые инструменты (опционы, фьючерсы и т.д.). Опцион европейского типа задается платежной функцией $f(s)$ и сроком исполнения T . При покупке такого опциона в момент времени выпуска опциона τ покупатель имеет право на получение в момент времени $\tau + T$ платежа в размере $f(s(\tau + T))$. Обозначим через $u(s, t)$ цену опциона европейского типа в зависимости от цены первичного финансового инструмента (в нашем случае индекса фондового рынка s) и времени t , оставшегося до погашения опциона (платежа по нему). Мы рассматриваем модифицированную модель Блэка-Шоулза, в которой функция стоимости $u(s, t)$ опциона на продажу акции с функцией платежа $f(s) = \max\{K - s, 0\}$, где $K > 0$, определяется как решение прямой задачи

$$u_t = sr u_s + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(s) u_{ss} - ru, \quad s \in [0, \infty), \quad t \in (0, T);$$

$$u(s, 0) = f(s), \quad u(0, t) = K.$$

Обратная задача заключается в определении коэффициента $\sigma(s)$ из условия

$$u(\varphi(t), T - t) = g(t)$$

при $t \in (0, T)$. Здесь t – время от момента выпуска опциона, $s = \varphi(t)$ – значение индекса фондового рынка, $g(t)$ – цена опциона в этот момент.

Заметим, что краевое условие $u(0, t) = K$ объясняется тем, что если $s(t) = 0$, то в силу стохастического дифференциального уравнения для цены $s(\tau) = 0$ при $\tau \geq t$.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Так как $\lim_{L \rightarrow \infty} u(L, t) = 0$, будем считать, что для достаточно большого L выполняется краевое условие $u(L, t) = 0$. Мы рассмотрим прямую задачу для модифицированного уравнения Блэка-Шоулза в ограниченной области $\Omega = \{(s, t) : s \in (0, L), t \in (0, T)\}$

$$u_t = sr u_s + \frac{1}{2} s^2 \sigma(s)^2 u_{ss} - ru, \quad (s, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(s, 0) = f(s), \quad s \in (0, L), \quad (2)$$

$$u|_{s=0} = K, \quad u|_{s=L} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Предположим, что на некоторой заданной кривой $s = \varphi(t)$ известна функция $g(t) = u(\varphi(t), T - t)$.

Обратная задача состоит в определении коэффициента уравнения $\sigma(s)$ по дополнительной информации $g(t)$ о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u(\varphi(t), T - t) = g(t), \quad t \in (0, T). \tag{4}$$

Решение обратной задачи (1)–(4) будем искать, минимизируя целевой функционал [11]

$$J(\sigma) = \int_0^T (u(\varphi(t), T - t) - g(t))^2 dt \rightarrow \min_{\sigma}$$

модификацией метода градиентного спуска

$$\sigma^{(n+1)}(s) = \sigma^{(n)}(s) + \alpha_n \frac{s^2}{2} \int_0^T u_{ss}^{(n)}(s, t) \psi^{(n)}(s, t) dt.$$

Здесь $\alpha_n > 0$ – параметр спуска, $u^{(n)}(s, t)$ является решением прямой задачи (1)–(3) на n -й итерации, $\psi^{(n)}(s, t)$ является решением сопряженной задачи [7], [16], [20], [21] в области Ω :

$$\psi_t = (sr\psi)_s - \frac{1}{2}(s^2\sigma^2(s)\psi)_{ss} + r\psi + 2\delta(s - \varphi(t))[u(s, T - t) - g(t)], \tag{5}$$

$$\psi(s, T) = 0, \quad s \in (0, L), \tag{6}$$

$$\psi|_{s=0} = \psi|_{s=L} = 0, \quad t \in (0, T). \tag{7}$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

Рассмотрим более общую задачу: по данным наблюдений за динамикой индекса фондового рынка $s(\tau) = \varphi(\tau)$, где $\tau \in [0, \bar{T}]$, $\bar{T} > T$ и ценами $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$, ..., $g_n(\tau)$ на европейские опционы с одинаковой платежной функцией и одинаковым сроком исполнения, выпущенные в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, где $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_n + T \leq \bar{T}$, а функции $g_j(\tau)$ определены на промежутке времени $[\tau_j, \tau_j + T]$, $j = 1, \dots, n$, найти функцию $\sigma(s)$, которая минимизирует функционал

$$\sum_{j=1}^n \int_{\tau_j}^{\tau_j+T} (u(\varphi(\tau), \tau_j + T - \tau) - g_j(\tau))^2 d\tau, \tag{8}$$

определить диапазон для значений s , на котором функции определены однозначно, т.е. совпадают для любой пары функций, минимизирующих функционал (8).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

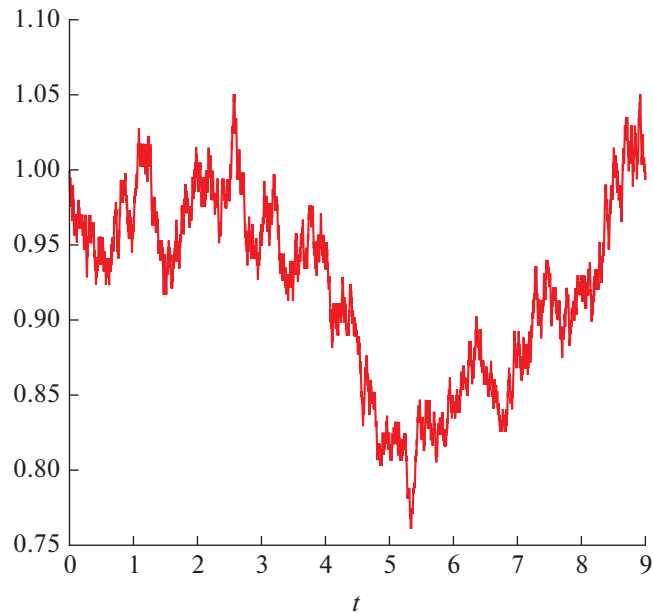
В численных расчетах мы полагаем время погашения опциона $T = 3$ мес, $\sigma(s) = 0.1\sqrt{s}$, $r = 0.05$, $K = 0.9$, $L = 9$, $N_s = 900$, $N_t = 1200$, $h_s = L/N_s = 0.01$, $h_t = T/N_t = 0.0025$, время перевыпуска новых опционов 10 дней. Начальное приближение $\sigma^{(0)}(t) = 0.1\sqrt{s}/\sqrt{3}$. В обратной задаче требуется найти функцию $\sigma(s)$. Число итераций в методе наискорейшего спуска 5000. Для решения прямой задачи (1)–(3) применена неявная схема Эйлера.

Кривая $s = \varphi(t)$, на которой измеряются данные, вычисляется по следующему алгоритму. Введем вероятность

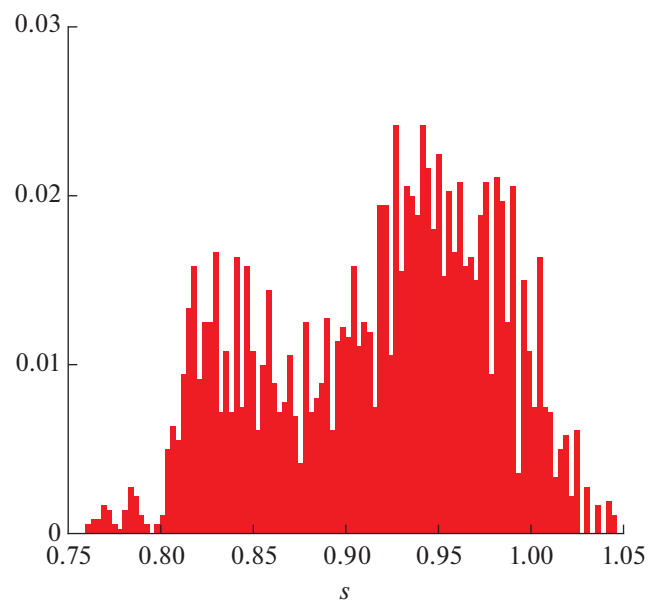
$$p(s_k) = \frac{e^{\sigma(s_k)\sqrt{h_t}} - 1 - rh_t}{e^{\sigma(s_k)\sqrt{h_t}} - e^{-\sigma(s_k)\sqrt{h_t}}} \in (0, 1)$$

и величины

$$d(s_k) = e^{-\sigma(s_k)\sqrt{h_t}}, \quad u(s_k) = e^{\sigma(s_k)\sqrt{h_t}}.$$



Фиг. 1. Кривая, на которой измеряются данные $s = \varphi(t)$.



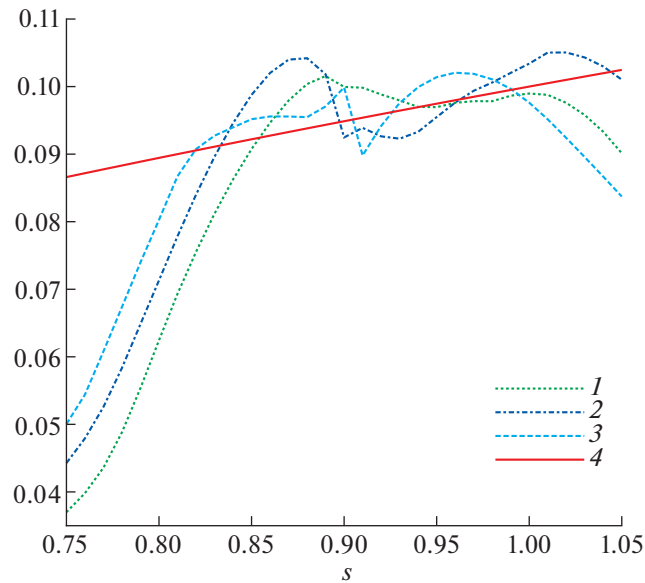
Фиг. 2. Гистограмма для кривой $s = \varphi(t)$.

Шаг 1. Полагаем $s_0 = 1$ и предположим, что s_k уже вычислены;

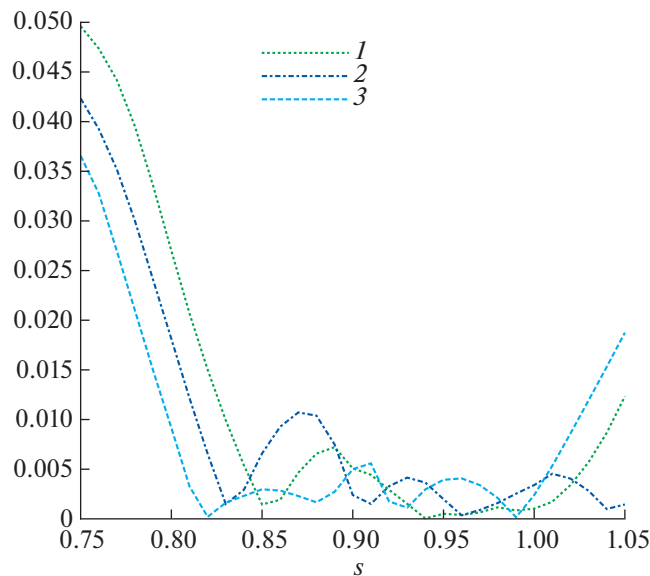
Шаг 2. Пусть ξ_k – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$s_{k+1} = \begin{cases} d(s_k)s_k, & \text{если } \xi_k < p(s_k), \\ u(s_k)s_k, & \text{если } \xi_k \geq 1 - p(s_k), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

На фиг. 1 приведен график изменения $s = \varphi(t)$ для типичных реализаций случайных величин ξ_k . Отметим, что $\varphi(t) \in [0.92, 1.0]$ при $t \in [0, 3]$; $\varphi(t) \in [0.89, 1.0]$ при $t \in [0, 4]$, $\varphi(t) \in [0.76, 1.0]$ при $t \in [0, 7]$.



Фиг. 3. Решение обратной задачи на отрезке $[0.75, 1.05]$. Кривая 1 – приближенное решение для 1 опциона, 2 – приближенное решение для 4 опционов, 3 – приближенное решение для 16 опционов, 4 – точное решение.



Фиг. 4. $|\sigma(s) - \sigma^{(5000)}(s)|$ на отрезке $[0.75, 1.05]$. Кривая 1 – приближенное решение для 1 опциона, 2 – приближенное решение для 4 опционов, 3 – приближенное решение для 16 опционов.

На фиг. 2 приведена гистограмма, показывающая, сколько точек данных кривой $s = \varphi(t)$ содержится в интервале $s \in [0.75, 1.05]$.

На фиг. 3 приведено решение обратной задачи определения $\sigma(s)$ для трех типов данных на отрезке $[0.75, 1.05]$, где есть данные по гистограмме: кривая 1 – один опцион, 2 – 4 опциона, 3 – 16 опционов, 4 – точное решение.

На фиг. 4 приведен модуль разности точного решения обратной задачи и приближенного $|\sigma(s) - \sigma^{(5000)}(s)|$ для трех типов данных на отрезке $[0.75, 1.05]$, где есть данные по гистограмме: кривая 1 – один опцион, 2 – 4 опциона, 3 – 16 опционов.

Заметим, что можно существенно уменьшить число итераций, если использовать априорную информацию о решении задачи, например, о гладкости решения [12], [15].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована и решена методом наискорейшего спуска обратная задача определения функции волатильности в модифицированной модели Блэка-Шоулза. Построено направление наискорейшего спуска через решение сопряженной задачи. Численные расчеты показали, что добавление информации о ценах однотипных опционов с различными датами выпуска позволяет улучшить точность и увеличить интервал восстановления функции волатильности.

Отметим, что имеющиеся теоретические результаты [6], [17], [18] указывают на сильную некорректность (логарифмическую устойчивость) исследуемой обратной задачи. Для определения параметров, которые могут быть найдены устойчиво, и условий на данные обратной задачи, нужные для этого, достаточно провести спектральный анализ (сингулярное разложение) линеаризованной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // *J. Political Economy*. 1973. V. 81. P. 637–651.
2. *Merton R.* Theory of rational option pricing // *Bell J. Economics and Management Science*. 1973. V. 4. P. 141–183.
3. *Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // *J. Financial Economy*. 1979. V. 7. P. 229–263.
4. *Шуряев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.
5. *Coleman T.F., Li Y., Verma A.* Reconstructing the unknown local volatility function // *J. Computational Finance*. 1999. V. 2. № 3. P. 77–102.
6. *Isakov V., Bouchoev I., Valdivia N.* Recovery of volatility coefficient by linearization // *Quantitative Finance*. 2002. V. 2. P. 257–263.
7. *Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shishlenin M.A.* Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2003. V. 11. № 1. P. 87–109.
8. *Egger H., Engl H.W.* Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates // *Inverse Problems*. 2005. V. 21. № 3. P. 1027–1045.
9. *Egger H., Hein T., Hofmann B.* On decoupling of volatility smile and term structure in inverse option pricing // *Inverse Problems*. 2006. V. 22. № 4. P. 1247–1259.
10. *Фельмер Г., Шуд А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.
11. *Kabanikhin S.I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2008. V. 16. № 4. P. 317–357.
12. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Quasi-solution in inverse coefficient problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2008. V. 16. № 7. P. 87–109.
13. *Lakhal A., Lakhal M.M., Louis A.K.* Calibrating local volatility in inverse option pricing using the Levenberg-Marquardt method // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2010. V. 18. № 5. P. 493–514.
14. *Бьорк Т.* Теория арбитража в непрерывном времени. МЦНМО, 2010.
15. *Кабанихин С.И., Шишленин М.А.* Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2012. Т. 18. № 1. С. 147–164.
16. *Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B.* Inverse problems for the ground penetrating radar // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2013. V. 21. № 6. P. 885–892.
17. *Isakov V.* Recovery of time dependent volatility coefficient by linearization // *Evolution Equations and Control Theory*. 2014. V. 3. P. 119–134.
18. *Isakov V., Deng Z.-C., Hon B.* Recovery of time dependent volatility in option pricing model // *Inverse Problems*. 2016. V. 32. № 11. P. 115010.
19. *Zhang R.Y., Xu F.F., Huang J.C.* Reconstructing local volatility using total variation // *Acta Mathematica Sinica – English Series*. 2017. V. 33. № 2. P. 263–277.
20. *Кабанихин С.И., Шишленин М.А.* Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2018. Т. 21. № 1. С. 55–63.
21. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Recovering a time-dependent diffusion coefficient from nonlocal data // *Numerical Analysis and Applications*. 2018. V. 11. № 1. P. 38–44.