

УДК 519.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 2019 г. А. Е. Умнов^{1,*}, Е. А. Умнов¹

(¹ 141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия)

*e-mail: mail@umnov.ru

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
Переработанный вариант 02.04.2019 г.
Принята к публикации 10.06.2019 г.

В статье рассматривается схема решения задач линейного программирования, основанная на использовании вспомогательных функций, реализующих обратную связь в системе условий для искомых переменных и множителей Лагранжа. Приводится обоснование предлагаемого подхода. Библ. 7. Фиг. 1. Табл. 3.

Ключевые слова: задача линейного программирования, метод штрафных функций, функции обратной связи, модифицированная функция Лагранжа, регуляризация.

DOI: 10.1134/S0044466919100144

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается вариант метода асимптотических оценок для решения стандартной задачи линейного программирования вида максимизировать по $x \in E^n$ с координатным представлением $\|x\| = \|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\|^T$

$$\text{целевую функцию } F(x) \tag{1.1}$$

$$\text{при условиях: } \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \tag{1.2}$$

где каждая из функций $F(x)$, $f_i(x) \forall i = [1, m]$ линейна по всем своим аргументам.

2. СХЕМА МЕТОДА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Вначале рассмотрим использование предлагаемого подхода для решения пары взаимно двойственных задач линейного программирования, записанных в симметричной форме.

Пусть векторы $x \in E^n$ и $\Lambda \in E^m$, имеющие координатные столбцы вида $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$ и $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^T$, являются искомыми, соответственно, для равносильной задачи (1.1), (1.2) паре задач следующего вида.

1. *Прямой* задачи линейного программирования, т.е.

$$\text{максимизировать по } \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \text{ функцию } F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j$$

$$\text{при условиях } \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad \text{где } f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \tag{2.1}$$

Любое решение задачи (2.1) обозначим как x^* , а $F(x^*)$ через F^* .

2. *Двойственной* задачи линейного программирования, т.е.

$$\text{минимизировать по } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \text{ функцию } G(\Lambda) = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i$$

$$\text{при условиях } \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad \text{где } g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = [1, n]. \quad (2.2)$$

Ее решение будем обозначать через Λ^* и пусть $G^* = G(\Lambda^*)$.

Последующее изложение может быть упрощено, если вначале привести краткое описание схемы решения пары задач (2.1) и (2.2) следующим вариантом метода гладких штрафных функций [1].

Предположим, что в этом методе используются вспомогательные функции вида

$$\begin{aligned} A_p(\tau, x) &= F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) - \sum_{j=1}^n P(\tau, (-\xi_j)), \\ A_D(\tau, \Lambda) &= G(\Lambda) + \sum_{j=1}^n P(\tau, -g_j(\Lambda)) + \sum_{i=1}^m P(\tau, (-\lambda_i)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где функция $P(\tau, s)$ определяет “штраф” за нарушение ограничения $s \leq 0$ и удовлетворяет следующим условиям.

$$1. \forall s \text{ и } \forall \tau > 0: P(\tau, s) \geq 0 \text{ и } \lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

2. Функция $P(\tau, s)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам

$$\text{до второго порядка включительно.} \quad (2.4)$$

$$3. \text{Для всех } \tau > 0 \text{ и } \forall s \text{ выполнены неравенства } \frac{\partial P}{\partial s} > 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0.$$

Пусть

$$\text{grad}_x A_p(\tau, \tilde{x}(\tau)) = 0 \quad \text{и} \quad \text{grad}_\Lambda A_D(\tau, \tilde{\Lambda}(\tau)) = 0. \quad (2.5)$$

Тогда величины $F(\tilde{x}(\tau))$ и $G(\tilde{\Lambda}(\tau))$, где точки $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{\Lambda}(\tau)$ являются стационарными для вспомогательных функций (2.3) $\forall \tau > 0$, и, в силу основного свойства метода штрафных функций, их можно использовать в качестве аппроксимаций значений $F(x^*)$ и $G(\Lambda^*)$. Кроме того, к условиям стационарности функций (2.5): применима теорема о неявных функциях (например, теорема 2 § 41 из [2]), в силу чего вектор-функции $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{\Lambda}(\tau)$ могут рассматриваться как неявно определяемые уравнениями (2.5).

Наконец, в регулярном случае (т.е. в случае однозначной разрешимости пары задач (2.1), (2.2)) $\tilde{x}(\tau)$ может служить аппроксимацией x^* и соответственно $\tilde{\Lambda}(\tau)$ – аппроксимацией для Λ^* . И, как показано, например в [3], при этом оказываются справедливыми равенства

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad \xi_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\tilde{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n].$$

Приступим теперь к описанию предлагаемого подхода, используя соображения, изложенные в [4].

Как известно, по свойству взаимодвойственных задач (2.1), (2.2) компоненты вектора x^* являются множителями Лагранжа для задачи (2.2), а компоненты вектора Λ^* суть множители Лагранжа в задаче (2.1). Однако при каждом фиксированном $\tau > 0$, вообще говоря, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \neq \tilde{\lambda}_i(\tau) \quad \forall i = [1, m] \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\tilde{\Lambda}(\tau))) \neq \tilde{\xi}_j(\tau) \quad \forall j = [1, n].$$

Эти соотношения оказываются верными равенствами лишь в пределе при $\tau \rightarrow +0$.

Здесь можно предположить, что найдется $\tau_0 > 0$, для которого будут существовать вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, являющиеся $\forall \tau \in (0, \tau_0]$ решениями системы уравнений вида

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{2.6}$$

для которых (в случае совместности задач (2.1), (2.2)) верны соотношения: $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) = F^*$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} G(\bar{\Lambda}(\tau)) = G^*$, а в регулярном случае (т.е. при единственности x^* и Λ^*), кроме того, и равенства:

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad \xi_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n].$$

Тогда вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, наряду с $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{\Lambda}(\tau)$, можно было бы использовать в качестве оценочных аппроксимаций решений задач (2.1) и (2.2).

Заметим, что система (2.6) также может быть записана в виде

$$\begin{aligned} f_i(\tau, \bar{x}(\tau)) &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m], \\ -g_j(\tau, \bar{\Lambda}(\tau)) &= Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n] \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i &= -Q(\tau, \bar{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где функция $Q(\tau, s) = \text{inv} \left(\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) \right)$ есть обратная к функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$.

Возможную истинность сделанного предположения подтверждает следующий

Пример 1. Для пары задач с параметром ν :

прямая задача: максимизировать в E^2 функцию $F(x) = 2\xi_1 + 3\xi_2$,

при условиях $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ и $\xi_1 + 2\xi_2 \leq \nu, 2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$;

двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию $G(\Lambda) = \nu\lambda_1 + 6\lambda_2$,

при условиях $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2, 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$.

Пусть значение $\nu = 6$, тогда решения имеют вид $\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F^* = 10$ и $\lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}, G^* = 10$.

Если использовать $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$ и соответствующую ей $Q(\tau, s) = \text{inv} \left(\exp\left(\frac{s}{\tau}\right) \right) = \tau \ln s$, то система (2.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 &= \tau \ln \bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 &= \tau \ln \bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 1.

В последующих разделах статьи рассматриваются условия применимости методов, основанных на решении систем подобных (2.7). Здесь же отметим, что из структуры этой системы следует, что $Q(\tau, s)$ по сути является функцией, реализующей обратную связь в наборе ограничений для прямых и двойственных переменных в задачах (2.1) и (2.2). Поэтому далее (для краткости) будет употребляться термин *обратная связь* при ссылках как на сами функции типа $Q(\tau, s)$, так и на методы решения задачи (1.1), (1.2), использующих эти функции.

Таблица 1. Решения системы (2.8) для примера 1 с параметром $\nu = 6$

τ	$\bar{\xi}_1(\tau)$	$\bar{\xi}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$G(\bar{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	1.91387303	2.05644660	9.99708585	1.30690566	0.31409072	9.72597830
10^{-2}	1.99167722	2.00559101	10.0001275	1.33099033	0.33105995	9.97230168
10^{-3}	1.99917130	2.00055811	10.0000169	1.33310196	0.33310265	9.99722768
10^{-4}	1.99991717	2.00005580	10.0000017	1.33331023	0.33331023	9.99972274
10^{-5}	1.99999172	2.00000558	10.0000002	1.33333102	0.33333102	9.99997227
10^{-6}	1.99999917	2.00000056	10.0000000	1.33333310	0.33333102	9.99999723

3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определим функцию $P(\tau, s)$ так, чтобы для нее выполнялись все условия пп. 1–3 из (2.4). Тогда непрерывно дифференцируемая функция $\frac{\partial P}{\partial s}$ монотонно возрастает по $s \forall s$ и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $Q(\tau, s)$, которая, в свою очередь, монотонно возрастает по $s \forall s > 0$. Кроме того, для нее имеем $\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty \forall \tau > 0$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(\tau, s) = +\infty \forall \tau > 0$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = 0 \forall s > 0$.

Через $R(\tau, s)$ обозначим неотрицательную, имеющую единственный ноль функцию, для которой справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s). \tag{3.1}$$

Заметим, что в сделанных предположениях функция $R(\tau, s)$ существует и единственна.

Введем в рассмотрение вспомогательную (называемую далее для краткости U -функцией) функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j)) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i. \tag{3.2}$$

Заметим, что в этом случае решения системы (2.7) (если они существуют) – векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ – суть стационарные точки U -функции по совокупности переменных $\{x; \Lambda\}$.

Теорема 3.1. *Функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по x и строго выпукла вниз по Λ в любой конечной точке с положительными координатами в пространстве $E^n \otimes E^m \forall \tau > 0$.*

Доказательство. Из соотношений (3.2) и (2.7) находим, что компоненты матрицы Гессе для $U(\tau, x, \Lambda)$ (как функции от x при фиксированных τ и Λ) имеют вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \delta_{jk} \quad \forall j, k = [1, n]$$

(где δ_{jk} – символ Кронекера). Тогда ее главные миноры вида

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^k \left(-\frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \right) \quad \forall k = [1, n].$$

Числа $\frac{\partial Q}{\partial \xi_j}$ положительные, так как в силу соотношения между производными взаимно обратных функций и условия п. 3 из (2.4)

$$\frac{\partial Q}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)^{-1} > 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, в рассматриваемой подматрице Гессе все главные миноры нечетного порядка отрицательны, четного – положительны, и, согласно критерию Сильвестра, матрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам x отрицательно определена. Поэтому функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам x строго выпукла вверх.

Рассуждая аналогично, для подматрицы Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ получаем, что значения ее главных миноров равны $\prod_{i=1}^k \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \forall k = [1, m]$. В силу (3.3) эти значения положительны. Тогда, согласно критерию Сильвестра, подматрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ положительно определена, а сама функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ является строго выпуклой вниз при любых фиксированных τ и x .

Докажем теперь совместность системы (2.7).

Теорема 3.2. Система уравнений (2.7) имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном $\tau > 0$ для любой пары задач (2.1), (2.2).

Доказательство. 1. Для каждого вектора Λ с конечными положительными компонентами существует единственный конечный вектор $\hat{x}(\Lambda)$ с положительными компонентами такой, что верно равенство $\text{grad}_x U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = 0$, имеющее в силу (3.2) вид

$$Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) - \sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i = 0 \quad \forall j = [1, n], \tag{3.4}$$

поскольку функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по x , а условия (3.4) равносильны равенствам

$$\hat{\xi}_j(\Lambda) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\Lambda)) \quad \forall j = [1, n], \quad \forall \Lambda > 0,$$

в которых правые части существуют, положительны и определены однозначно. Это, в свою очередь, означает, что $\hat{x}(\Lambda) = \text{argmax}_x U(\tau, x, \Lambda)$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что для каждого конечного вектора x с положительными компонентами будет существовать конечный вектор $\hat{\Lambda}(x)$ с положительными компонентами такой, что

$$Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) + \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 \quad \forall i = [1, m] \tag{3.5}$$

и что $\hat{\Lambda}(x) = \text{argmin}_\Lambda U(\tau, x, \Lambda)$ в силу строгой выпуклости $U(\tau, x, \Lambda)$ вниз по Λ .

2. Теперь найдем минимум $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ . Из формулы (3.2) мы получаем

$$U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j \hat{\xi}_j(\Lambda) - R(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda))) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\xi}_j(\Lambda) \lambda_i.$$

В силу строгой выпуклости вниз этой функции, достаточное условие ее минимума будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \lambda_q}(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) &= \sum_{j=1}^n \left[\sigma_j \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} - \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} \right] + \\ &+ \beta_q + \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \lambda_q) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \hat{\xi}_j(\Lambda) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{qj} \lambda_i \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} = 0 \quad \forall q = [1, m] \end{aligned}$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} \left[\sigma_j - Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \right] + \beta_q + Q(\tau, \lambda_q) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \hat{\xi}_j(\Lambda) = 0 \quad \forall q = [1, m], \tag{3.6}$$

поскольку $\forall j = [1, n]$ и $\forall q = [1, m]$

$$\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) = Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \lambda_q) = Q(\tau, \lambda_q).$$

Тогда, за счет использования (3.4), равенство (3.6) – достаточное условие минимума функции $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ – может быть упрощено до

$$\beta_q + Q(\tau, \hat{\lambda}_q) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) = 0 \quad \forall q = [1, m], \tag{3.7}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\hat{\Lambda} = \underset{\Lambda}{\operatorname{argmin}} U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$, для которого верно равенство $\min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \hat{\Lambda})$ и такого, что $\|\hat{\Lambda}\| = \|\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \dots \hat{\lambda}_m\|^T$, существует и единственен в силу строгой выпуклости вниз по Λ функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Найдем теперь значение минимума по Λ для функции $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$. Имеем

$$U(\tau, \hat{x}(\hat{\Lambda}), \hat{\Lambda}) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) - R(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}))) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \hat{\lambda}_i + R(\tau, \hat{\lambda}_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) \hat{\lambda}_i.$$

Перегруппировав слагаемые, имеем, что

$$U(\tau, \hat{x}(\hat{\Lambda}), \hat{\Lambda}) = \sum_{i=1}^m (\beta_i \hat{\lambda}_i + R(\tau, \hat{\lambda}_i)) + \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\lambda}_i \right) \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda})).$$

Наконец, в силу (3.4), получим

$$U(\tau, \hat{x}(\hat{\Lambda}), \hat{\Lambda}) \min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) \sum_{i=1}^m (\beta_i \hat{\lambda}_i + R(\tau, \hat{\lambda}_i)) + \sum_{j=1}^n (\hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) Q(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda})) - R(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}))). \tag{3.8}$$

3. Теперь рассуждениями, аналогичными п. 2, найдем $\max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda)$.

Поскольку функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вниз по совокупности компонент вектора Λ , то достаточное условие ее минимума по Λ будет

$$-Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \quad \forall i = [1, m]. \tag{3.9}$$

Значение минимума функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по Λ при фиксированных τ и x равно

$$U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x)) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j)) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \hat{\lambda}_i(x) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(x))) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \xi_j \hat{\lambda}_i(x).$$

В силу строгой выпуклости вверх этой функции по x , достаточное условие ее максимума по x (после перегруппировки слагаемых) есть

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{\lambda}_i(x)}{\partial \xi_k} \left[\beta_i + Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right] + \sigma_k - Q(\tau, \xi_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \hat{\lambda}_i(x) = 0 \quad \forall k = [1, n]. \tag{3.10}$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках в (3.10), равны нулю в силу (3.9) и, следовательно, достаточное условие максимума $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по x принимает вид

$$\sigma_k - Q(\tau, \hat{\xi}_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \hat{\lambda}_i(\hat{\xi}_k) = 0 \quad \forall k = [1, n], \tag{3.11}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\hat{x} = \operatorname{argmax}_x U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$, для которого верно равенство $\max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, \hat{x}, \hat{\Lambda}(x))$, существует и единственен в силу строгой выпуклости вверх по x функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Для значения максимума функции $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по x (после перегруппировки слагаемых и учета (3.11) в итоге имеем

$$U(\tau, \hat{x}, \hat{\Lambda}(\hat{x})) \max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) \sum_{i=1}^m (\beta_i \hat{\lambda}_i(\hat{x}) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(\hat{x}))) + \sum_{j=1}^n (\hat{\xi}_j Q(\tau, \hat{\xi}_j) - R(\tau, \hat{\xi}_j)). \quad (3.12)$$

4. Теперь заметим, что из условий (3.7) и (3.9) следует равенство $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\hat{x})$, а из условий (3.4) и (3.11) следует соответственно $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\Lambda})$, поскольку условие (3.7) является достаточным условием максимума функции $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по x , а условие (3.11) – соответственно достаточным условием минимума функции $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ .

Поясним эти утверждения, получив, к примеру, формулу $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\Lambda})$. Для этого перепишем равенства (3.4) и (3.11), переобозначив в последнем индекс k на j .

$$\begin{aligned} -Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) &= -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \quad \forall j = [1, n], \\ -Q(\tau, \hat{\xi}_j) &= -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\lambda}_i(\hat{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первая группа равенств (3.13) выполняется при любых положительных $\lambda_i, \forall i = [1, m]$, в том числе и при $\hat{\lambda}_i(\hat{\xi}_j), \forall i = [1, m]$. Очевидно, что в этом случае правые части равенств оказываются одинаковыми. Но тогда будут равны и левые, т.е.

$$Q(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\Lambda})) = Q(\tau, \hat{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n].$$

Последнее же равенство означает, что, в силу монотонности по s функции $Q(\tau, s)$, будут верны равенства $\hat{\xi}_j(\hat{\Lambda}) = \hat{\xi}_j, \forall j = [1, n]$, т.е., $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\Lambda})$.

Из сопоставления формул (3.8) и (3.12) получаем, что

$$\min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) = \max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda).$$

Это означает, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет седловую точку, которая, в силу непрерывной дифференцируемости $U(\tau, x, \Lambda)$, является для нее стационарной. Условия же стационарности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_x U &= 0, \\ \operatorname{grad}_{\Lambda} U &= 0, \end{aligned}$$

равносильном в своей совокупности системе (2.7), что доказывает утверждение теоремы.

В дальнейшем (если не оговорено противное) мы будем предполагать, что функция $P(\tau, s)$ не только удовлетворяет условиям (2.4), но и что $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ является функцией одного аргумента $u = \frac{s}{\tau}$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right), \quad (3.14)$$

где $\Phi(u)$ – определенная $\forall u$ функция, обеспечивающая выполнение условий (2.4).

Условие (3.14) формально является дополнительным ограничением общности при выборе вида функции $P(\tau, s)$, не играющим существенного практического значения в силу инструменталь-

ной роли самой функции $P(\tau, s)$, однако, позволяющим не только упростить обоснование метода обратных связей, но и, как показано в [5], улучшить характеристики его сходимости при $\tau \rightarrow +0$.

Рассмотрим теперь свойства функции $R(\tau, s)$. Эта функция очевидно определена при любых положительных τ и s , в своей области определения неотрицательна и имеет единственный ноль, а также дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла вниз по s на $s > 0$. Кроме того, важное для дальнейшего свойство функции $R(\tau, s)$ описывает

Теорема 3.3. *Для любого фиксированного $s \in (0, +\infty)$ имеем $\lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, s) = 0$.*

Доказательство. В силу (3.14) функция обратной связи $Q(\tau, s)$ определяется соотношением $\Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) = s$ и имеет вид $Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)$, где $\Psi(u)$ есть функция, определенная на интервале $(0, +\infty)$, обратная к $\Phi(u)$.

Тогда при любом конечном положительном s из

$$R(\tau, s) = \int_a^s Q(\tau, u)du = \tau \int_a^s \Psi(u)du, \quad \text{где } Q(\tau, a) = 0,$$

следует справедливость утверждения теоремы.

Другое полезное свойство U -функции описывает

Теорема 3.4. *Если $L(x, \Lambda)$ – функция Лагранжа пары задач (2.1) и (2.2), то $\forall x$ и $\forall \Lambda$ из области определения $L(x, \Lambda)$*

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda). \tag{3.15}$$

Доказательство. Функция Лагранжа задач (2.1) и (2.2) имеет вид

$$L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) \quad \text{или} \quad L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j + \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i.$$

Поэтому U -функцию можно записать как

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \tag{3.16}$$

Применяя к формуле (3.16) утверждение теоремы 3.3, получаем утверждение доказываемой теоремы.

Дадим следующее

Определение. Совокупность точек пространства $E^n \otimes E^m$ вида $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\} \forall \tau > 0$ – назовем седловой траекторией U -функции пары задач (2.1) и (2.2).

Из теоремы 3.2 следует, что на каждой седловой траектории определены вектор-функции $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\Lambda}(\tau)$, а также скалярная функция $\bar{U}(\tau) = U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau))$. Рассмотрим их свойства.

Теорема 3.5. *Для собственных задач (2.1) и (2.2), т.е. задач, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ имеют ограниченные компоненты на множестве $\forall \tau > 0$.*

Доказательство. 1. Исходя из (2.6) и используя (2.1)–(2.2), условия стационарности вспомогательной U -функции (3.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, \sigma_j - \sum_{q=1}^m \alpha_{iq} \bar{\lambda}_q(\tau) \right) \right) \quad \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -\beta_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} \bar{\xi}_p(\tau) \right) \right) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{3.17}$$

т.е. система (2.7) распадается на две независимые подсистемы, неизвестными в первой из которых являются компоненты вектор-функции $\bar{\Lambda}(\tau)$, а во второй – компоненты $\bar{x}(\tau)$.

Исследуем подробно вторую из них, введя для удобства следующие скалярные функции:

$$W_j(\tau, \bar{x}(\tau)) = \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, V_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall j = [1, n] \quad \text{и} \quad V_i(\bar{x}(\tau)) - \beta_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} \bar{\xi}_p(\tau) \quad \forall i = [1, m].$$

В этом случае вторая группа уравнений в (3.17) принимает вид системы равенств

$$\bar{\xi}_j(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, \bar{x}(\tau))) \quad \forall j = [1, n], \tag{3.18}$$

а частная производная от функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, x))$ по ξ_k будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, x)) &= \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \frac{\partial W_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, V_i(\tau, x)) \right) = \\ &= -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k} \right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \alpha_{ik} \right). \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание, что в силу (2.4) вторая производная $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, s)$ определена и строго положительна $\forall s$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, x)) = -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \right) \leq 0,$$

причем в случае $\sum_{i=1}^m |\alpha_{ik}| > 0$ это неравенство будет строгим.

Таким образом, правая часть j -го уравнения в системе (3.18) есть монотонно убывающая функция k -й компоненты вектора $\bar{x}(\tau)$.

2. Рассмотрим теперь j -е уравнение в системе (3.18), в котором зафиксированы все неизвестные, кроме $\bar{\xi}_j$. Пусть оно имеет вид $\bar{\xi}_j = Z(\bar{\xi}_j)$. Заметим, что как область определения функции $Z(\bar{\xi}_j)$, так и область ее значений есть множество положительных чисел. При этом из п. 1 следует, что на всей области определения непрерывная функция $Z(\bar{\xi}_j)$ монотонно убывающая. Тогда для нее существует монотонно убывающая обратная функция $T(\bar{\xi}_j)$.

Пусть $\bar{\xi}_j^*$ – решение рассматриваемого уравнения, т.е. $\bar{\xi}_j^* = Z(\bar{\xi}_j^*)$. Очевидно, что и $T(\bar{\xi}_j^*) = \bar{\xi}_j^*$. Если $\bar{\xi}_j^*$ ограничено сверху, то $\exists +\infty > D_j > 0 : \bar{\xi}_j^* \leq D_j$, а значит, и $\bar{\xi}_j^* = T(\bar{\xi}_j^*) = Z(\bar{\xi}_j^*) \leq D_j$. Тогда в силу монотонного убывания функции $T(\bar{\xi}_j)$ получаем $T(Z(\bar{\xi}_j^*)) \geq T(D_j)$. Иначе говоря, $\exists d_j > 0 : d_j \leq \bar{\xi}_j^*$, где $d_j = T(D_j) \leq D_j$. Следовательно, $\bar{\xi}_j^*$ ограничена и снизу, причем строго положительной величиной.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что из ограниченности снизу компоненты $\bar{\xi}_j^*$ следует ее ограниченность и сверху.

3. Покажем теперь, что в собственном случае решения системы (3.17) ограничены $\forall \tau > 0$ и имеют неограниченные компоненты в случае несобственном.

Действительно, если решения задач (2.1), (2.2) существуют и конечны, то системы

$$\begin{aligned} \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \leq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad \text{и} \quad -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m] \quad \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n] \end{aligned} \tag{3.19}$$

совместны.

Рассмотрим вторую из них. В этом случае для каждого $j = [1, n]$ найдется вектор $x_{(j)}$ такой, что $W_j(\tau, x_{(j)}) = 0$. Заметим, что каждая левая часть в уравнениях (3.18), которая по теореме 3.2 имеет конечное значение при любом фиксированном $\tau > 0$, может оказаться равной, большей или

меньшей, чем $\Phi(0) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, 0)$. Тогда в силу оценок п. 2, она оказывается ограниченной как снизу, так и сверху одним из трех строго положительных чисел $T(\Phi(0))$, $\Phi(0)$ или $D(\Phi(0))$, каждое из которых по предположению (3.14) не зависит от τ . Следовательно, все левые части в (3.18) равномерно ограничены на множестве значений $\tau \in (0, +\infty)$.

Для первой из систем (3.19) рассуждения аналогичны.

В несобственном же случае по крайней мере одна из систем (3.19) несовместна. Допустим, что это – вторая из них. Тогда хотя бы при одном значении индекса i будет $f_i(x) > 0$ при всех x с неотрицательными компонентами. В том числе и для $\bar{x}(\tau)$ – решение системы (3.18), которое существует по теореме 3.2.

Но тогда в силу

$$\bar{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) = \Phi\left(\frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau}\right)$$

будет выполняться предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \Phi\left(\frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau}\right) = +\infty,$$

что и приводит к заключению о наличии неограниченных компонент решений системы (3.17) для несобственной пары задач (2.1)–(2.2).

В случае несовместности первой из систем (3.19) рассуждения аналогичны.

Теорема 3.6. *Для собственных задач (2.1) и (2.2) вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$ непрерывно дифференцируемы $\forall \tau > 0$.*

Доказательство. 1. Введем следующие обозначения:

$$\kappa_j = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \quad \forall j = [1, n] \quad \text{и} \quad \mu_i = \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \quad \forall i = [1, m].$$

Матрица Якоби системы (2.7), совпадающая с матрицей Гессе вспомогательной функции (3.2), в этом случае имеет вид

$$\|H\| = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{11} & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{m1} \\ 0 & -\kappa_2 & \dots & 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_n & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \dots & -\alpha_{mn} \\ \hline -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mn} & 0 & 0 & \dots & \mu_m \end{array} \right\|$$

или, в блочной записи, $\|H\| = \left\| \begin{array}{cc} -\|X\| & -\|A\|^T \\ -\|A\| & \|Y\| \end{array} \right\|$.

Здесь элементами матрицы $\|A\|$ являются числа $\alpha_{ij} \forall i = [1, m], j = [1, n]$, а диагональные матрицы $\|X\|$ и $\|Y\|$ имеют элементы, определяемые формулами $\delta_{ij}\kappa_j \forall i, j = [1, n]$ и $\delta_{ij}\mu_i \forall i, j = [1, m]$ соответственно.

Оценим знак величины $\det \|H\|$. По свойству шуровского дополнения (см., например, гл. 4, § 6, п. 5 в [6]) и в силу правил действия с матрицами, в рассматриваемом случае справедливо равенство

$$\det \|H\| = \det \|X\| \cdot \det(\|Y\| + \|A\| \|X\|^{-1} \|A\|^T).$$

Числа $\kappa_j \forall j = [1, n]$ и $\mu_i \forall i = [1, m]$ положительные, поскольку функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастающая. Поэтому очевидно, что $\det \|X\|^{-1} > 0$.

Оценим теперь второй сомножитель: $\det(\|Y\| + \|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^T)$. Заметим, что матрицу $\|Y\|$ можно рассматривать как матрицу некоторой положительно определенной квадратичной формы в пространстве E^m , в то время как матрица $\|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^T$ (при любом значении ранга матрицы $\|A\|$) по следствию теоремы Бине–Коши (см. гл. 4, § 5, п. 6 в [6]) задает либо положительно определенную, либо положительно полуопределенную квадратичную форму в том же пространстве.

Ясно, что в этом случае матрица $(\|Y\| + \|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^T)$ также задает в E^m положительно-определенную квадратичную форму и имеет (в силу критерия Сильвестра) положительный детерминант. Поэтому окончательно мы получаем, что $\det \|H\| > 0$.

2. Невырожденность матрицы Якоби для системы уравнений (2.7) в сочетании со сделанными предположениями о гладкости функции $Q(\tau, s)$ допускает применение утверждений теоремы о неявных функциях [2] к этой системе. Отсюда следует непрерывность вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$.

При этом компоненты вектор-функций $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ и $\frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau}$ определяются $\forall \tau > 0$ системой линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\|X\| & -\|A\|^T \\ -\|A\| & \|Y\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\| \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right\| \\ \left\| \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \right\| \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\| \\ \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial \Lambda \partial \tau} \right\| \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

где

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right\|_j &= \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n], & \left\| \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \right\|_i &= \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} \quad \forall i = [1, m], & \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\|_j &= -\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n] \\ & & \text{и} & & \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial \Lambda \partial \tau} \right\|_i &= \frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m]. \end{aligned}$$

Причем последние функции ограничены и непрерывны в силу теоремы 3.5. Поэтому из (3.20) вытекает непрерывная дифференцируемость вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ на множестве $\tau > 0$.

Следствие 3.1. *На седловой траектории для собственной пары задач (2.1) и (2.2) существуют конечные пределы $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)$, $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau))$.*

Доказательство. Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau) \forall \tau > 0$ в собственном случае следует их равномерная непрерывность на этом множестве. Поэтому пределы, указанные в формулировке следствия, существуют и конечны.

Свойства этих пределов описывают следующие теоремы.

Теорема 3.7. *На седловой траектории для собственной пары задач (2.1) и (2.2), имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_i(\tau) f_i(\bar{x}(\tau)) &= 0 \quad \forall i = [1, m], & \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_j(\tau) g_j(\bar{\Lambda}(\tau)) &= 0 \quad \forall j = [1, n], \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} (F(\bar{x}(\tau)) - G(\bar{\Lambda}(\tau))) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. 1. Заметим вначале, что для конечных $s > 0$ в силу (3.14) имеет место равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \Psi(s) = 0.$$

Умножая обе части равенств (2.7) на $\bar{\lambda}_i \forall i = [1, m]$ и $\bar{\xi}_j \forall j = [1, n]$ соответственно, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\tau) f_i(\bar{x}(\tau)) &= \lambda_i(\tau) Q(\tau, \lambda_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) g_j(\bar{\Lambda}(\tau)) &= \xi_j(\tau) Q(\tau, \xi_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n]. \end{aligned}$$

Тогда в силу сделанного выше замечания приходим к первым двум утверждениям леммы.

2. Из условий стационарности U -функции следуют равенства

$$\sigma_j = Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i(\tau) \quad \forall j = [1, n],$$

в силу которых

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \bar{\xi}_j(\tau) = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j(\tau) Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i(\tau) \bar{\xi}_j(\tau).$$

Аналогично находим, что

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \bar{\lambda}_i(\tau) = - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau) Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j(\tau) \bar{\lambda}_i(\tau).$$

Почленное вычитание двух последних равенств дает

$$F(\bar{\xi}_j(\tau)) - G(\bar{\lambda}_i(\tau)) = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j(\tau) Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau) Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall \tau > 0.$$

Тогда на седловой траектории в силу п. 1 будет верным и равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} (F(\bar{x}(\tau)) - G(\bar{\Lambda}(\tau))) = 0.$$

Теорема 3.8. На седловых траекториях для собственных задач (2.1) и (2.2) имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F(x^*) = G(\Lambda^*), \tag{3.21}$$

а в случае единственности решений (регулярности) пары задач (2.1) и (2.2) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \tag{3.22}$$

Доказательство. На седловой траектории в силу (3.16)

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall \tau > 0,$$

поэтому $\forall \tau > 0$ справедливы оценки

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) \leq L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \leq G^* + m \max_{i=[1, m]} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \tag{3.23}$$

и

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) \geq L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \geq F^* - n \max_{j=[1, n]} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)). \tag{3.24}$$

Для собственных задач в силу теоремы 3.5 значения всех компонент вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ ограничены на седловой траектории. Тогда из следствия 3.1 и теоремы 3.3 вытекает, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \max_{i=[1, m]} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \max_{j=[1, n]} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) = 0$$

и существуют пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = G^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = G^*. \tag{3.25}$$

В сделанных выше предположениях вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ непрерывны $\forall \tau > 0$. Тогда из непрерывности $L(x, \Lambda)$, неравенств (3.23), (3.24) и свойств суперпозиции непрерывных функций получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = L(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau), \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = G^*.$$

Таблица 2. Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $\nu = 3$

τ	$\bar{\xi}_1(\tau)$	$\bar{\xi}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$G(\bar{\Lambda}(\tau))$	$g_1(\bar{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	2.754765504	0.146829492	5.950019486	1.595322348	0.142544871	5.641236270	-0.119587910
10^{-2}	2.980995393	0.011993961	5.997972668	1.615620231	0.185576042	5.960316945	-0.013227685
10^{-3}	2.998148668	1.1754×10^{-3}	5.999823636	1.617360455	0.190653620	5.996003086	-1.3323×10^{-3}
10^{-4}	2.999815350	1.1731×10^{-4}	5.999823636	1.617531210	0.191167734	5.999600031	-1.3332×10^{-4}
10^{-5}	2.999981540	1.1728×10^{-5}	5.999998265	1.617548252	0.191167734	5.999960000	-1.3333×10^{-5}
10^{-6}	2.999998154	1.1728×10^{-6}	5.999999827	1.617549956	0.191224355	5.999996000	-1.3333×10^{-6}

Таблица 3. Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $\nu = -3$

τ	$\bar{\xi}_1(\tau)$	$\bar{\xi}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$G(\bar{\Lambda}(\tau))$	$\bar{F}(x) - \bar{G}(\Lambda)$
10^3	0.999000478	0.999990964	4.997973847	1.006016976	0.997002498	2.963964059	2.034009788
10^2	0.990028539	0.999064507	4.977250598	1.061672873	0.970247397	2.636465765	2.340784833
10	0.890763029	0.891130932	4.454918853	1.717012067	0.721168975	-0.824022353	5.278941206
1	0.104551523	0.048898425	0.355798321	6.557200845	0.086427254	-19.153039010	19.508837331
10^{-1}	8.6106×10^{-4}	4.2695×10^{-4}	3.0030×10^{-3}	60.050951736	8.3357×10^{-3}	-180.102840769	180.105843742
10^{-2}	8.3611×10^{-6}	4.1771×10^{-6}	4.9253×10^{-5}	600.005009704	8.3334×10^{-4}	-1800.010029000	1.8000×10^3
10^{-3}	8.3361×10^{-8}	4.1677×10^{-8}	2.9175×10^{-7}	6.0000×10^3	8.3333×10^{-5}	-18000.001000000	1.8000×10^4

А это означает, что пределы (3.21) существуют, и что для них

$$F(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)) = F^* \quad \text{и} \quad G(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)) = G^*.$$

Наконец, в регулярном случае функция Лагранжа задач (2.1) и (2.2) имеет единственную седловую точку $\{x^*, \Lambda^*\}$, поэтому тогда справедливы и равенства (3.22).

В завершение описания свойств U -функции для линейных задач заметим, что единственность седловой точки U -функции позволяет рассматривать ее представление в виде суммы функции Лагранжа и слагаемого

$$\sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j)$$

как метод регуляризации собственных (но нерегулярных) задач, а саму U -функцию как вариант модифицированной функции Лагранжа. Существенно, что неотрицательность оценок множителей Лагранжа гарантирована условиями (2.4).

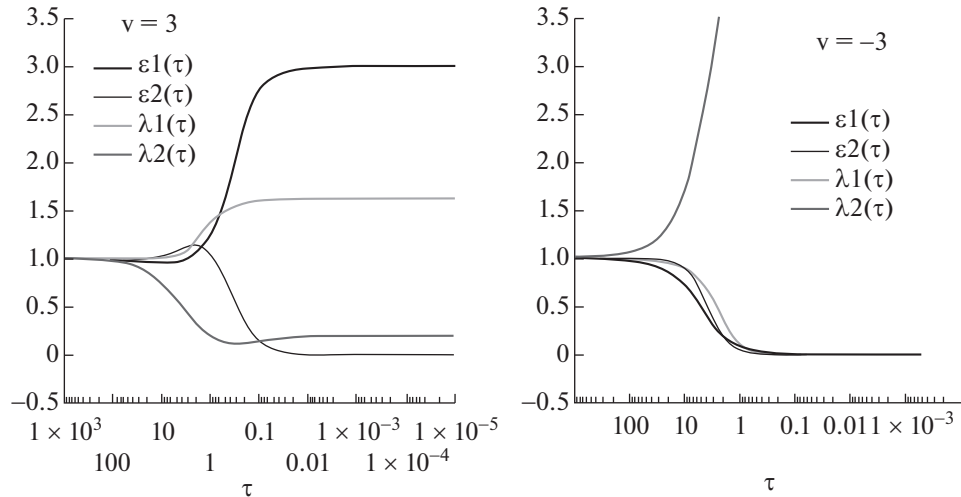
Наконец, отметим, что использование функций обратных связей возможно и для решения нелинейных задач. Обсуждение различных аспектов этого использования и примеры задач можно найти в [7].

Проиллюстрируем утверждения теорем 3.5–3.8 следующими вариантами примера 1.

Примером 1 со значением параметра $\nu = 3$, решение которого: $\xi_1^* = 3, \xi_2^* = 0, F^* = 6$ и $\lambda_1^* = 2 - 2t, \lambda_2^* = t \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], G^* = 6$. Решение прямой задачи единственное и *переопределенное* (т.е. в точке решения число активных ограничений больше числа переменных), а решение двойственной задачи *неединственное*.

И примером 1 со значением параметра $\nu = -3$, в котором прямая задача *несовместна*, а двойственная имеет *неограниченное* решение.

При решении задач (как альтернативу системе (2.8)) в качестве $P(\tau, s)$ выберем функцию, для которой $\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1}$ и соответственно $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right)$.



Фиг. 1. Графики функций $\bar{\xi}_1(\tau)$, $\bar{\xi}_2(\tau)$, $\bar{\lambda}_1(\tau)$, $\bar{\lambda}_2(\tau)$ для решений системы (3.26) с $\nu = 3$ и $\nu = -3$.

Заметим, что при таком выборе $P(\tau, s)$ является бесконечно дифференцируемой аппроксимацией стандартной квадратичной штрафной функции, поскольку $\frac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} \sim \frac{s + |s|}{\tau}$ для малых положительных τ . В этом случае система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
 -3 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\
 -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\
 -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\
 -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Решения системы (3.26) для различных значений параметра τ приведены в табл. 2 и 3, а их графические представления с логарифмической шкалой аргумента показаны на фиг. 1. При этом в таблицах использованы обозначения: $\bar{F}(\tau) = F(\bar{\xi}_1(\tau), \bar{\xi}_2(\tau))$, $\bar{G}(\tau) = G(\bar{\lambda}_1(\tau), \bar{\lambda}_2(\tau))$ и $\bar{g}_1(\tau) = g_1(\bar{\lambda}_1(\tau), \bar{\lambda}_2(\tau))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах). Т. II. М.: Высшая школа, 1981. 584 с.
3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. Электронный ресурс. М.: Физматлит, 2011. 384 с.
4. Умнов Е.А., Умнов А.Е. Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 1(9). С. 146–152.
5. Умнов А.Е. Многошаговая линейная экстраполяция в методе штрафных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 6. С. 1451–1463.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
7. Умнов Е.А., Умнов А.Е. Параметрические задачи в математическом программировании. М.: МФТИ, 2018. 297 С. // www.umnov.ru.