ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1872–1882

УДК 519.634

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

© 2019 г. Ю. В. Бибик[1,*], С. П. Попов[1,**]
([1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия)
*e-mail: yvbibik@ccas.ru
**e-mail: sppopov@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.06.2019 г.
Переработанный вариант 20.06.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

Исследована возможность получения солитонных решений неинтегрируемого обобщения связанной системы Вольтерра. Обобщение представляет собой систему из двух уравнений, каждое из которых содержит члены, учитывающие пространственную зависимость. На первом этапе исследуется континуальный предел обобщения. На втором этапе выполняется поиск солитонных решений для континуального предела. На третьем, завершающем этапе, выполняется поиск солитонных решений исследуемого неинтегрируемого обобщения. Библ. 48.

Ключевые слова: связанная система Вольтерра, солитон, уравнение Захарова–Кузнецова, уравнение KdV, уравнение Шрёдингера, уравнение Риккати.

DOI: 10.1134/S0044466919110036

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется возможность получения и особенности аналитических солитонных решений неинтегрируемого обобщения связанной системы Вольтерра. Классическая система Вольтерра впервые была предложена в работах Вольтерра в математической теории борьбы за существование [1]–[3]. В физике она применяется при описании тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме [4] и является “фундаментальным уравнением в теории решеточного солитона” [5]. В континуальном пределе система Вольтерра переходит в уравнение Кортевега де Вриза (KdV) [6], поэтому иногда называется “дискретным уравнением KdV”. Доказана интегрируемость системы Вольтерра [7], [8]. Результаты исследований солитонных решений системы Вольтерра широко представлены в математической литературе [9]–[14].

До описания исходной модели и предлагаемого метода ее изучения представляется необходимым отметить вкратце наиболее значимые исследования, позволившие понять природу и механизм возникновения солитонов и сформировавшие математический аппарат для дальнейших исследований. История солитонной математики начинается с открытия Расселом в 1834 г. уединенной волны (solitary wave), сохраняющей форму и скорость. Открытие оспаривалось авторитетными учеными в области гидродинамики Эйри и Стоксом. Ясность в проблему была внесена в 1834 г. Дидериком Кортевегом и Густавом де Вризом [15]. Они предложили точное уравнение, названное в дальнейшем их именами, волновые решения которого полностью описали уединенную волну Рассела. Благодаря уникальной универсальности, уравнение Кортевега–де Вриза (KdV) и его модификации в течение многих лет и в настоящее время успешно используются при исследовании солитонов самой различной природы.

Основная часть важных исследований началась в 1960-х годах с появлением компьютеров. Аналитические и численные исследования, выполненные именно в этот период, привели к углубленному пониманию природы солитонов. Важную роль сыграло выполненное в 1965 г. Забуски и Крускалом решение нелинейного уравнения KdV [16]. Численные расчеты позволили им выявить новые особенности импульсных решений уравнения. Выяснилось, что импульсы проявляют себя подобно частицам, не разрушаются при прохождении друг через друга, а начальные возбуждения распадаются на серию таких импульсов. Полученные решения Забусски и Крускал назвали солитонами. Это исследование является ярким примером того, как использование численных методов привело к фундаментальному открытию в солитонной математике. Важнейшим открытием солитонной математики оказался предложенный в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой метод обратной задачи рассеяния [17]. Впервые он был применен к уравнению KdV и позволил его проинтегрировать. В 1971 г. Захаровым и Шабатом этот метод был обобщен на нелинейное уравнение Шрёдингера [18]. В 1972 г. Вадати удалось проинтегрировать модифицированное уравнение KdV [19]. В 1974 г. Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегур нашли решение уравнения синус-Гордона [20]. В последующие годы аппарат метода обратной задачи рассеяния подвергся дальнейшему развитию. Метод получил развитие в работе П. Лакса [21], раскрывшего его алгебраическую основу. В работах Гарднера, Захарова и Фаддеева предложена теория уравнения Кортевега-де Вриза как гамильтоновой системы [22].

Затем М. Абловиц, Д. Кауп, А. Ньюэлл и Х. Сигур предложили схему, позволяющую по заданной задаче рассеяния построить иерархию нелинейных эволюционных уравнений, решаемых методом обратной задачи [23]. В дальнейшем при помощи метода обратной задачи рассеяния было построено решение для разностного аналога уравнения Кортевега–де Вриза – цепочки Тоды.

Важный вклад в развитие солитонной математики вносят численные методы. Их применение обусловлено тем, что, несмотря на прогресс теоретических методов исследования, в ряде случаев получить результаты аналитическими методами затруднительно. Предметами численного исследования являются моделирование и анализ распространения, взаимодействия и устойчивости солитонов.

Работы последнего десятилетия отличаются углубленным исследованием оптических, лазерных, магнитных, квантовых, многомерных, плазменных солитонов, солитонного газа, а также дискретных уравнений и иерархий интегрируемых уравнений [24]–[35]. Кроме того, как показывают результаты последних исследований [36] уравнения KdV, mKdV, Калоджеро-Дигаспериса, синус-Гордона, Буссинеска, Шрёдингера, Тоды, Вольтерра могут быть получены друг из друга с помощью цепочек дискретных симметрий. Главным составным элементом, связанным с этими цепочками симметрий, является преобразование Дарбу. В работах [37]–[41] разработаны численные методы, алгоритмы и программы с использованием новых компьютерных технологий для решения задач теоретической солитонной математики.

Одним из основных направлений исследований солитонной математики является исследование интегрируемых уравнений. Этому направлению посвящено множество статей. Такие интегрируемые уравнения как, например, уравнения цепочки Тоды и Вольтерра представляют собой классические дифференциально-разностные уравнения математической физики. Они обладают свойством универсальности, имеют большой спектр приложений. Их интегрируемость связана с возможностью использования метода обратной задачи, с существованием солитонных решений, с наличием бесконечных наборов законов сохранения.

Вместе с тем развитие огромного числа приложений в различных областях естествознания, и в частности, в математической физике, привело к появлению неинтегрируемых уравнений. Их решение представляет собой сложную и актуальную задачу. Каждое такое уравнение, или группа однотипных уравнений, требует разработки специфических решений. Для их исследования приходится искать точки соприкосновения с интегрируемыми уравнениями или применять численные методы. Таких работ не так много. Отметим вкратце тематику их исследований. В работе [42] предложена концепция обобщенной условной симметрии, которая позволяет построить алгоритм построения точных 2-солитонных и 2-ударных решений неинтегрируемых уравнений. В работе [43] исследуется неинтегрируемый аналог уравнения Кортевега–де Вриза. Описано двухсолитонное решение этого уравнения. Приведена процедура построения асимптотики этого решения. В работе [44] для неинтегрируемого аналога нелинейного уравнения Шрёдингера исследовано столкновение двух солитонов, один из которых имеет малую амплитуду. В работе [45] исследуется устойчивость двухсолитонного столкновения для неинтегрируемых уравнений gKdV. В работе [46] с использованием вариационного подхода исследовано неинтегрируемое уравнение Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами. Получены солитонные решения первого и второго порядка.

В настоящей работе также исследуется неинтегрируемая система уравнений. Она построена на основе состоящей из двух уравнений связанной системы Вольтерра, которая представляет собой интегрируемую дискретную версию связанного уравнения KdV. Она исследовалась в работах [47], [48]. В данной работе рассматривается обобщение связанной системы Вольтерра, полученное путем добавления к каждому из двух уравнений членов, учитывающих зависимость от пространственной переменной y. Введение в оба уравнения членов, учитывающих пространственную зависимость, приводит к потере интегрируемости системы и значительно усложняет поиск ее солитонного решения. Поскольку исследуемая система неинтегрируемая, то возникает вопрос – возможно ли в данном случае получить аналитическое солитонное решение системы. Приступим к исследованию данного вопроса.

Исследуемое неинтегрируемое обобщение системы Вольтерра имеет вид

$$\partial_t a_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}) + D_1\partial_y^2 a_{i+1} - D_1\partial_y^2 a_{i-1}, \tag{1.1}$$

$$\partial_t b_i = Ab_i(a_{i+1} - a_{i-1}) + Aa_i(b_{i+1} - b_{i-1}) + AD_2\partial_y^2 b_{i+1} - AD_2\partial_y^2 b_{i-1}. \tag{1.2}$$

Исследование будет проводиться в три этапа. На первом этапе (в разд. 2) будет исследован континуальный предел указанного обобщения. Поскольку учет дополнительной пространственной переменной делает исходную систему (1.1), (1.2) неинтегрируемой, то переход к континуальному пределу позволит преобразовать первое уравнение исследуемой системы в уравнение Захарова–Кузнецова и второе уравнение в уравнение, похожее на уравнение Захарова–Кузнецова. Вместе эти уравнения представляют собой связанное уравнение Захарова–Кузнецова. Поэтому исследуемая система представляет собой дискретизацию связанного уравнения Захарова–Кузнецова также, как связанная система Вольтерра представляет собой дискретизацию связанного уравнения KdV.

На втором этапе (в разд. 3) будет выполнен поиск солитонных решений для континуального предела (2.9), (2.10) исходной системы (1.1), (1.2). Для солитонного решения первого уравнения (2.9) будет использована автомодельная переменная. Это позволит преобразовать первое из уравнений этой системы к хорошо известному солитонному решению уравнения KdV.

Основная трудность будет заключаться в поиске солитонного решения второго уравнения системы (2.10), похожего на уравнение Захарова–Кузнецова. Ниже будет показано, что оно сводится к уравнению Шрёдингера. Поскольку потенциалом полученного уравнения Шрёдингера является солитонное решение первого уравнения (2.9), то для получения солитонного решения второго уравнения (2.10) необходимо подобрать нужное солитонное решение первого уравнения. В процессе такого подбора выяснилось, что для получения нужной асимптотики солитонных решений второго уравнения недостаточно обычных солитонных решений первого уравнения. Поэтому для получения солитонного решения второго уравнения используются решения, включающие пьедестальные солитоны первого уравнения. Они отличаются от обычных солитонов асимптотикой на бесконечности. В результате на втором этапе будут получены солитонные решения в виде плоских волн для континуального предела (2.9), (2.10) исходной системы (1.1), (1.2), представляющего собой связанное уравнение Захарова–Кузнецова.

На третьем этапе (в разд. 4), на основании солитонных решений для континуального предела, будут получены солитонные решения для исходной системы. Перейдем к реализации первого этапа исследования.

2. ПЕРЕХОД К КОНТИНУАЛЬНОМУ ПРЕДЕЛУ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ (1.1), (1.2)

В данном разделе будет получен континуальный предел системы дискретных эволюционных уравнений (1.1), (1.2), обобщающих связанную систему Вольтерра.

Для удобства переобозначим эти уравнения в данном разделе как (2.1), (2.2)

$$\partial_t a_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}) + D_1\partial_y^2 a_{i+1} - D_1\partial_y^2 a_{i-1}, \tag{2.1}$$

$$\partial_t b_i = Ab_i(a_{i+1} - a_{i-1}) + Aa_i(b_{i+1} - b_{i-1}) + AD_2\partial_y^2 b_{i+1} - AD_2\partial_y^2 b_{i-1}. \tag{2.2}$$

К первому уравнению связанной системы Вольтерра добавлены члены, учитывающие зависимость переменной a_i от пространственной переменной y. Во второе уравнение системы добавлены члены, учитывающие зависимость переменой b_i от дополнительной пространственной переменной y. Учет дополнительной пространственной переменной y делает систему не интегрируемой. Дискретная зависимость от одной из независимых переменных i, и непрерывная зависимость от другой y, делает невозможным использование автомодельных переменных для преобразования исходных уравнений в интегрируемые уравнения. Поэтому для преодоления этой трудности будет произведен переход к континуальному пределу системы уравнений (2.1), (2.2).

Для получения континуального предела обобщения связанной системы Вольтерра (2.1), (2.2) введем следующее разложение, использующее малый параметр ε

$$a_i = 1 - \varepsilon^2 u(t, i\varepsilon, y), \tag{2.3}$$

$$b_i = v(t, i\varepsilon, y). \tag{2.4}$$

Введение разложения в таком виде позволяет получить нелинейные и дисперсионные члены как выражения одного порядка. Подставив разложение (2.3), (2.4) в дискретные уравнения (2.1), (2.2), получим следующие формулы, использующие разложение зависимых переменных в ряды Тейлора

$$\begin{gathered}-\varepsilon^2\partial_t u(t, i\varepsilon, y) = (1 - \varepsilon^2 u(t, i\varepsilon, y))(-\varepsilon^2 u(t, i\varepsilon + \varepsilon, y) + \\ + (-\varepsilon^2 u(t, i\varepsilon - \varepsilon, y)) + D_1\partial_y^2(-\varepsilon^2 u(t, i\varepsilon + \varepsilon, y) + \varepsilon^2 u(t, i\varepsilon - \varepsilon, y)),\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\partial_t v(t, i\varepsilon, y) = Av(t, i\varepsilon, y)(-\varepsilon^2 u(t, i\varepsilon + \varepsilon, y) + \varepsilon^2 u(t, i\varepsilon - \varepsilon, y)) + \\ + A(1 - \varepsilon^2 u(t, i\varepsilon, y))(v(t, i\varepsilon + \varepsilon, y) - v(t, i\varepsilon - \varepsilon, y)) + D_2\partial_y^2((v(t, i\varepsilon + \varepsilon, y) - v(t, i\varepsilon - \varepsilon, y)).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Сгруппировав члены в выражения определенных порядков по ε, получим с учетом порядков ε и ε^3 следующие уравнения:

$$\partial_t u = -2\varepsilon\partial_x u - \frac{1}{3}\varepsilon^3\partial_x^3 u + 2\varepsilon^3 u\partial_x u - 2\varepsilon^3 D_1\partial_y^2 u, \tag{2.7}$$

$$\partial_t v = -2\varepsilon\partial_x v - \frac{1}{3}\varepsilon^3\partial_x^3 v - 2\varepsilon^3 A\partial_x(uv) + 2\varepsilon^3 AD_2\partial_x\partial_y^2 v. \tag{2.8}$$

Далее избавимся от первого члена порядка ε в уравнении (2.7) с помощью преобразования Галилея $x \to x + 2\varepsilon t$. Для приведения членов по второй производной y к порядку ε^3 выполним замену $y \to \frac{\varepsilon y}{\sqrt{6D_1}}$. Для избавления от множителя ε^3 используем растяжение переменной времени $t \to \frac{-3t}{2\varepsilon^3}$. Кроме того, для удобства заменим масштаб и знак зависимой переменной $u \to -2u$.

В итоге получим следующую систему эволюционных уравнений, которые представляют собой континуальный предел исходной системы (2.1), (2.2):

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \frac{1}{2}\partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x\partial_y^2 u = 0, \tag{2.9}$$

$$\partial_t v + 3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}\partial_x v + 6\partial_x(uv) + \frac{1}{2}A\partial_x^3 v + \frac{1}{2}A\frac{D_2}{D_1}\partial_x\partial_y^2 v = 0. \tag{2.10}$$

В результате выполненного перехода к континуальному пределу (2.9), (2.10) первое уравнение этой системы представляет собой уравнение Захарова–Кузнецова. Второе уравнение системы имеет структуру, похожую на структуру уравнения Захарова–Кузнецова. Вместе эти уравнения представляют собой связанное уравнение Захарова–Кузнецова. Отличие между уравнениями состоит в том, что вместо нелинейного члена $\partial_x u^2$, содержащегося в первом уравнении, во втором уравнении содержится производная от билинейного члена $\partial_x(uv)$. Поэтому солитонные решения первого и второго уравнений системы в третьем разделе будут исследованы разными способами. Перейдем к получению солитонных решений континуального предела исходной системы.

3. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ПРЕДЕЛА ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ

В данном разделе будут исследованы солитонные решения континуального предела обобщения связанной системы Вольтерра (2.9), (2.10). Поиск солитонных решений континуального предела будет производиться в виде плоских волн. Причина этого состоит в том, что входящее в систему уравнение Захарова–Кузнецова на плоских волнах редуцируется в уравнение KdV, солитонное решение которого известно. Поэтому после перехода к плоским волнам основная трудность будет заключаться в поиске солитонного решения второго уравнения системы. Ниже будет показано, что оно вначале сводится к уравнению Шрёдингера. При этом солитонные решения первого уравнения системы играют для него роль потенциальной энергии.

Приступим к поиску солитонного решения в виде плоских волн. Вначале будем исследовать автомодельное решение системы (2.9), (2.10). Для этого введем в рассмотрение автомодельную переменную $w = x + y$. При этом функции u и v примут следующий вид:

$$u(t,x,y) = u(t,x+y), \tag{3.1}$$

$$v(t,x,y) = v(t,x+y). \tag{3.2}$$

$$\partial_t u + 6u\partial_w u + \partial_w^3 u = 0, \tag{3.3}$$

$$\partial_t v + 3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}\partial_w v + 6A\partial_w(uv) + \frac{A}{2}\left(1+\frac{D_2}{D_1}\right)\partial_w^3 v = 0. \tag{3.4}$$

Будем искать решение этой системы в виде бегущей волны, зависящей от переменной $z = w - Vt$:

$$u(t,w) = u(w - Vt) = u(z), \tag{3.5}$$

$$v(t,w) = v(w - Vt) = v(z). \tag{3.6}$$

При этом получится следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-V\partial_z u + 6u\partial_z u + \partial_z^3 u = 0, \tag{3.7}$$

$$\left[-V + 3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}\right]\partial_z v + 6A\partial_z(uv) + \frac{A}{2}\left(1+\frac{D_2}{D_1}\right)\partial_z^3 v = 0. \tag{3.8}$$

Первое из уравнений этой системы приводит к хорошо известным солитонным решениям уравнения KdV. Они будут представлены ниже формулой (3.27). Приступим к исследованию уравнения (3.8). Для удобства введем в рассмотрение следующие параметры:

$$\sigma = 3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}, \quad \rho = \frac{1}{12}\left(1+\frac{D_2}{D_1}\right), \quad E = \frac{V-\sigma}{6A\rho}.$$

(При введении параметра σ предполагается существование предела для выражения $\sigma = 3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}$.)
С использованием вышеуказанных параметров уравнение (3.8) примет вид

$$-E\partial_z v + \frac{1}{\rho}\partial_z(uv) + \partial_z^3 v = 0. \tag{3.9}$$

После однократного интегрирования по переменной z, оно преобразуется в уравнение Шрёдингера для функции v

$$\left(\frac{u}{\rho} - E\right)v + \partial_z^2 v = 0. \tag{3.10}$$

Роль потенциальной энергии в этом уравнении играет функция $\frac{u}{\rho}$. Функция u является решением уравнения (3.7). Это уравнение в качестве решения содержит как обычные, так и пьедестальные солитоны. Далее подберем функцию u таким образом, чтобы функция v, входящая в уравнение (3.10), имела нужную асимптотику. Для получения нужной асимптотики решений уравнения (3.10) будет недостаточно обычных солитонов. Поэтому в качестве решений уравнения (3.7) будем использовать решения, включающие пьедестальные солитоны, отличающиеся от обычных солитонов асимптотикой на бесконечности. Их асимптотику на бесконечности примем равной d.

Они описываются следующими формулами:

$$u = d + w, \quad V_1 = V - 6d, \quad u = d + \frac{V_1}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V_1}}{2}z\right)}. \tag{3.11}$$

Уравнение Шрёдингера (3.10) для функции v с учетом таких решений примет вид

$$\left[\frac{d}{\rho} - E + \frac{V_1}{2\rho}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V_1}}{2}z\right)}\right]v + \partial_z^2 v = 0. \tag{3.12}$$

Будем решать уравнение Шрёдингера (3.10) его редукцией к уравнению Риккати с помощью следующей замены:

$$v = e^{\psi}.$$

Подстановка этой замены в уравнение (3.12) приводит к равенству

$$\left(\frac{d}{\rho} - E\right)\left[+\frac{V_1}{2\rho}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V_1}}{2}z\right)}\right]e^{\psi} + (\psi_z^2 + \psi_{zz})e^{\psi} = 0. \tag{3.13}$$

После исключения общего множителя e^{ψ} и введения зависимой переменной по формуле $\phi = \psi_z$, получим уравнение Риккати

$$\left[\left(E - \frac{d}{\rho}\right) - \frac{V_1}{2\rho}\frac{1}{\operatorname{ch}^2}\left(\frac{\sqrt{V_1}}{2}z\right)\right] = \phi^2 + \phi_z. \tag{3.14}$$

Как известно, уравнение Риккати в общем случае не имеет решения в квадратурах. Однако для рассматриваемого в данной статье случая оно имеет решение в виде гиперболического тангенса следующего вида:

$$\phi = \beta\operatorname{th}(\gamma z). \tag{3.15}$$

Осталось определить параметры β и γ. Прямой проверкой можно убедиться в том, что входящие в уравнение (3.14) функции ϕ^2 и ϕ_z с точностью до констант содержат функцию $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)}$, которая входит в левую часть уравнения (3.14). Продемонстрируем это в виде

$$\phi^2 = \beta^2\frac{\operatorname{sh}^2(\gamma z)}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)} = \beta^2\frac{(\operatorname{ch}^2(\gamma z) - 1)}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)} = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)}, \tag{3.16}$$

$$\phi_Z = \beta\gamma\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)}. \tag{3.17}$$

В итоге имеем равенство

$$\phi^2 + \phi_z = \beta^2 + \frac{(-\beta^2 + \beta\gamma)}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)}. \tag{3.18}$$

После подстановки его в уравнение (3.14) приведем уравнение Риккати к следующему виду:

$$\left(E - \frac{d}{\rho}\right) - \frac{V_1}{2\rho}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V_1}}{2}z\right)} = \beta^2 + \frac{-\beta^2 + \beta\gamma}{\operatorname{ch}^2(\gamma z)}. \tag{3.19}$$

Из этого уравнения следуют три уравнения, содержащие два искомых параметра β и γ:

$$\left(E - \frac{d}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{V - \sigma}{6A} - d\right) = \beta^2, \tag{3.20}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{V_1}}{2}, \tag{3.21}$$

$$\frac{V_1}{2\rho} = \beta^2 - \beta\frac{\sqrt{V_1}}{2}. \tag{3.22}$$

Поскольку получившихся уравнений три, а параметров всего два, то для их решения необходимо использовать еще один, третий параметр d, представляющий собой величину асимптотики пьедестального солитона. Это обстоятельство объясняет, почему в качестве решения уравнения (3.7) были использованы пьедестальные солитоны.

Решая уравнение (3.22), получаем выражение для величины β:

$$\beta = \sqrt{V_1}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right). \tag{3.23}$$

Через параметр V_1 полученное решение зависит от параметра d. Подставив уравнение (3.23) в уравнение (3.20), получим следующее уравнение для определения параметра d:

$$\frac{V-\sigma}{6A\rho} - \frac{d}{\rho} = (V-6d)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right)^2. \tag{3.24}$$

После несложных преобразований оно примет вид

$$\left[6\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\right]d = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right)^2 V - \frac{V-\sigma}{6A\rho}. \tag{3.25}$$

Из уравнения (3.25) находим величину d, представляющую собой асимптотику пьедестального солитона:

$$d = \frac{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right)^2 V - \frac{(V-\sigma)}{6A\rho}}{6\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\rho}}\right)^2 - \frac{1}{\rho}}. \tag{3.26}$$

С учетом выражения для величины d решение уравнения (3.7) в виде пьедестального солитона будет иметь вид

$$u = d + \frac{(V-6d)}{3}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V-6d}}{2}(w - Vt)\right)}. \tag{3.27}$$

Таким образом, найдено решение в виде пьедестального солитона для уравнений (3.3) и (3.7). Теперь получены все необходимые данные для решения уравнения (3.10). Оно выражается через функцию ϕ, определенную уравнением (3.15). Функция ϕ была введена в рассмотрение ранее для получения решения с помощью уравнения Риккати. По известной функции ϕ функция v, входящая в уравнение (3.10), находится с помощью следующих формул:

$$v = e^{\psi}, \quad \psi_z = \phi, \quad \phi = \beta\frac{\mathrm{sh}(\gamma z)}{\mathrm{ch}(\gamma z)}.$$

Интегрируя функцию ϕ по z, получаем следующее выражение для функции ψ:

$$\psi = C + \int_0^z \beta\,\mathrm{th}(\gamma z)dz = C + \frac{\beta}{\gamma}\ln(\mathrm{ch}(\gamma z)). \tag{3.28}$$

Зная величину ψ, находим решение в виде плоской уединенной волны для функции v по формуле

$$v = e^C e^{\ln(\mathrm{ch}(\gamma z))^{\frac{\beta}{\gamma}}} = e^C(\mathrm{ch}(\gamma z))^{\frac{\beta}{\gamma}}. \tag{3.29}$$

Входящие в формулу (3.29) величины γ и β, как следует из формул (3.21) и (3.23), имеют вид

$$\gamma = \frac{\sqrt{V-6d}}{2}, \tag{3.30}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{V-6d}}{2} - \sqrt{V-6d}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{\rho}}. \tag{3.31}$$

Для величины $\frac{\beta}{\gamma}$, представляющей собой показатель степени в формуле (3.29), имеем следующую формулу:

$$\frac{\beta}{\gamma} = 1 - \sqrt{1+\frac{8}{\rho}}. \tag{3.32}$$

Подставив значение этого показателя в формулу (3.29), получаем

$$v = e^C\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{V-6d}}{2}z\right)\right)^{1-\sqrt{1+\frac{8}{\rho}}}. \tag{3.33}$$

В результате найдена функция v, являющаяся решением уравнения Шрёдингера (3.10). В итоге формулы (3.27) и (3.33) дают точное решение системы (3.3), (3.4), а вместе с ней и точное решение континуального предела системы (2.9), (2.10) в виде плоских уединенных волн. Отметим особенности солитонных решений континуального предела системы (2.9), (2.10).

1. В пределе $\varepsilon \to 0$ зависимость формы солитона от скорости сохраняется только для пьедестала первого солитона (формула (3.27)). Форма второго солитона от скорости не зависит. Поясним причины, по которым это происходит. Основная причина заключается в том, что в пределе $\varepsilon \to 0$ величина $A \to 1$ (формула (2.2)). Это следует из того, что в формулу (3.4) входит параметр $3\frac{(A-1)}{\varepsilon^2}$, обозначаемый далее через σ. Чтобы в пределе $\varepsilon \to 0$ он оставался конечным, необходимо, чтобы величина A стремилась к единице как ε^2. Если величина A будет равна единице, формула (3.26) значительно упростится. При этом комбинация $V - 6d$ (формулы (3.27) и (3.33)) перестанет зависеть от скорости V и примет вид

$$V - 6d = \frac{-\sigma}{6\rho\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{\rho}}\right)^2 - 1}. \tag{3.34}$$

Зависимость от скорости выражена в формулах (3.27) и (3.33) только в виде этой комбинации. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ эта зависимость пропадает в обеих формулах за исключением высоты пьедестала d в формуле (3.27). Итак, у первого солитона (3.27) зависимость от скорости V проявляется только через высоту пьедестала d. Форма второго солитона (3.33) от скорости V не зависит. Это отличительная черта получившихся солитонных решений континуального предела исходной системы.

2. Солитонные решения (3.27) и (3.33) определены только для положительных значений комбинации $V - 6d$. Поэтому, как следует из формулы (3.34), солитонные решения (3.27) и (3.33) существуют только для случаев, когда $\sigma < 0$ при $\rho < \frac{529}{12}$ и $\sigma > 0$ при $\rho > \frac{529}{12}$.

С учетом отмеченных особенностей поиск солитонных решений в виде плоских волн для континуального предела обобщения связанной системы Вольтерра можно считать завершенным. Перейдем далее к построению солитонных решений исходной системы.

4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМОГО ОБОБЩЕНИЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

В разд. 3 получены солитонные решения в виде плоских волн для континуального предела (2.9), (2.10) исходной системы. Они даются формулами (3.27) и (3.33). В данном разделе на их основе будут получены солитонные решения для самой исходной системы (2.1), (2.2).

В разд. 2 приведена связь (2.3), (2.4) между зависимыми переменными a_i и b_i исходной дискретной системы (2.1), (2.2) и зависимыми переменными u и v ее континуального предела (2.9), (2.10). Эта связь позволяет по известным функциям u и v, которые являются решением континуального предела (2.9), (2.10), получить солитонные решения исходной системы. Используем далее разложение (2.3), (2.4) и формулы (3.27) и (3.33). Это позволит перейти от зависимых переменных u и v к зависимым переменным a_i и b_i, которые в свою очередь зависят от дискретного параметра i. Поскольку разложение (2.3), (2.4) зависит от малого параметра ε, то будет получено однопараметрическое семейство решений системы (2.1), (2.2). Оно представляет собой солитонные решения исходной системы следующего вида:

$$a_i = 1 - \varepsilon^2 \left(d + \frac{V-6d}{3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{V-6d}}{2}(i\varepsilon + y - Vt)\right)} \right), \tag{4.1}$$

$$b_i = e^C \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{V-6d}}{2}(i\varepsilon + y - Vt)\right)\right)^{1-\sqrt{1+\frac{8}{\rho}}}. \tag{4.2}$$

Отметим особенности солитонных решений исходной системы:

1. Как видно из формул (4.1), (4.2), каждая из зависимых переменных a_i и b_i представляет собой уединенную волну, бегущую в направлении пространственной переменной y. Форма волн для всех переменных a_i одинакова, они отличаются друг от друга фазой $i\varepsilon$. То же верно для переменных b_i.

2. В пределе $\varepsilon \to 0$ форма солитонов не зависит от скорости V, за исключением высоты пьедестала $(1 - \varepsilon^2 d)$ у солитонов a_i (формула (4.1)). Эта особенность проявляется благодаря структуре второго уравнения системы (2.2).

Несмотря на то что исходная система и ее континуальный предел являются неинтегрируемыми, в настоящей работе удалось получить солитонные решения (4.1), (4.2) для исходной системы (2.1), (2.2) и солитонные решения (3.27), (3.33) для ее континуального предела (2.9), (2.10).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, при исследовании неинтегрируемых систем не существует общего рецепта построения решений. Способ построения решения для каждого случая подбирается индивидуально. В данной работе для получения солитонных решений неинтегрируемого обобщения связанной системы Вольтерра использованы континуальный предел и переход к автомодельным переменным. При исследовании континуального предела построение первого солитона не вызвало больших трудностей и свелось к исследованию уравнения KdV. Для построения второго солитона континуального предела использовано уравнение Шрёдингера, редуцированное к уравнению Риккати. Удачей является то, что для рассматриваемого в статье случая полученное уравнение Риккати проинтегрировано в квадратурах. Этот факт использован для построения второго солитона континуального предела. Солитонные решения исходной системы получены с использованием преобразований, выполненных во втором и третьем разделах статьи. В результате исследования получены аналитические солитонные решения для неинтегрируемого обобщения связанной системы Вольтерра и ее континуального предела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volterra V.* Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // Nature. 1926. V. 118. P. 558–560.
https://doi.org/10.1038/118558a0

2. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni dei numero d'individui in specie animali conviventi // Memorie della Regia Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. V. 2. P. 31–113. English translation in Chapman, R.N., Animal Ecology, New York: McGraw–Hill, 1931.

3. *Volterra V.* Lessons on the mathematical theory of struggle for life. (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie) // Paris: Gauthier-Villars, 1931. P. 214.
4. *Захаров В.Е., Мушер С.Л., Рубенчик А.М.* О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме // Письма в ж. эксперим. и теор. физ. 1974. Т. 19. № 5. С. 249–253.
5. *Wadati M.* Transformation theories for nonlinear discrete systems // Supplement of Progress of Theoretical Physics. 1976. № 59. P. 36–63.
6. *Захаров В.Е., Манаков С.В, Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. С. 319.
7. *Манаков С.В.* О полной интегрируемости и стохатизации в дискретных динамических системах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1974. Т. 67. № 2. С. 543–555.
8. *Kac M., van Moerbeke P.* On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Advances in Math. 1975. V. 16. P. 160–169.
9. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны, нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991. С. 320. ISBN 5-02-014620-X.
10. *Верещагин В.Л.* Спектральная теория однофазных решений цепочки Вольтерра // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 145–148.
11. *Тахтаджан Л.А., Фадеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. С. 528.
12. *Damianou P.A.* The Volterra model and its relation to the Toda lattice // Physics Letters A. 1991. V. 155. № 2–3. P. 126–132.
13. *Попов С.П.* Солитонные решения обобщенных дискретных уравнений Кортевега–де Вриза // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1698–1709.
14. *Iwasaki M., Nakamura Y.* On the convergence of a solution of the discrete Lotka-Volterra system // Inverse Problems. 2002. V. 18. № 6. P. 1569–1578.
https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/6/309
15. *Dr. Korteweg D.J., Dr. G. de Vries* XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 1895. Ser. 5. V. 39. № 240. P. 422–443.
https://doi.org/10.1080/14786449508620739
16. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review Letters. 1965. V. 15. P. 240–243.
17. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg–de Vries Equation // Physical Review Letters. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
18. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // Ж. эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
19. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 32. P. l681–1687.
20. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.* Method for solving the sin-Gordon equation // Physical Review Letters. 1973. V. 30. № 25. P. 1262–1264.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1262
21. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490.
22. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* Уравнение Кортевега–де Вриса – вполне интегрируемая гамильтонова система // Функциональный Анализ и его Приложения. 1971. Т. 5. № 4. С. 18–27.
23. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.* The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems // Studies in Applied Mathematics 1974. V. 53. № 4. P. 249–315.
24. *Lilitnfein N., Hofer C., Hogner M., Saule T., Trubetskov M., Pervak V., Fill E., Riek C., Leitenstorfer A., Limpert J., Krausz, Pupeza I.* Temporal solitons in free-space femtosecond enhancement cavities // Nature Photonics. 2019. V. 13. P. 214–218.
https://doi.org/10.1038/s41566-018-0341-y
25. *Degasperis A.* Integrable model in nonlinear optics and soliton solutions // J. Phys. A: Math. and Theoretical. 2010. V. 43. № 43. P. 434001.
https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/434001
26. *Gustave F., Radwell N., McIntyre C., Toomey J.P., Kane D.M., Barland S., Firth W.J., Oppo G.-L., Ackemann T.* Observation of Mode-Locked Spatial Laser Solitons // Phys. Review Letters. 2017. V. 118. № 4-27. 044102.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.044102
27. *Hang J., Hahn C., Nahuel Statuto N., Ferran Macià F., Kent A.* Generation and annihilation time of magnetic droplet solitons // Scientific Reports. 2018. V. 8. Article number: 6847.
https://doi.org/10.1038/s41598-018-25134-z
28. *Macià F., Backes D., Kent A.D.* Stable magnetic droplet solitons in spin-transfer nanocontacts // Nature Nanotechology. 2014. V. 9. P. 992–996.
https://doi.org/10.1038/nnano.2014.255

29. *Shomroni I., Lahoud E., Levy S., Steinhauer J.* Evidence for an oscillating soliton/vortex ring by density engineering of a Bose–Einstein condensate // Nature Physics. 2009. V. 5. № 3. P. 193–197. https://doi.org/10.1038/nphys1177

30. *Fokas A.S.* Integrable nonlinear evolution partial differential equations in 4+2 and 3+1 dimensions // Physical Review Letters. 2006. V. 96. № 19. P. 190201. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.190201

31. *Malomed B.* Multidimensional solitons: Well-established results and novel findings // European Physical Journal Special Topics. 2016. V. 225. P. 2507–2532. https://doi.org/10.1140/epjst/e2016-60025-y

32. *Oliver C., Verheest F., Maharaj S.* Small-amplitude supersolitons near supercritical plasma compositions // J. Plasma Phys. 2017. V. 83. № 4. 905830403. https://doi.org/10.1017/S0022377817000526

33. *Диденкулова Е.Г., Кокорина А.В., Слюняев А.В.* Численное моделирование газа солитонов в рамках уравнений типа Кортевега–де Вриза // Вычисл. технологии. 2019. Т. 24. № 2. С. 52–66. https://doi.org/10.25743/ICT.2019.24.2.005

34. *Feng B.F., Maruno K., Ohta Y.* Integrable discretizations of the short pulse equation // J. Phys. A: Math. and Theor. 2010. V. 43. № 8. P. 085203. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/8/085203

35. *Dimakis A., Muller-Hoissen F.* Bidifferential calculus approach to AKNS hierarchies and their solutions // SIGMA. 2010. V. 6. 055. P. 27. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2010.055

36. *Юров А.В., Юрова А.А.* К вопросу о связях между интегрируемыми иерархиями // Вестн. Балтийского федерального университета им. Канта. Серия: Физ.-матем. и техн. науки. 2017. № 1. С. 48–53.

37. *Попов С.П.* О применении квазиспектрального метода Фурье к солитоносодержащим уравнениям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2176–2183.

38. *Попов С.П.* Численное исследование пиконов и k-солитонов уравнений Камассы–Холма и Холма–Хона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1317–1325.

39. *Попов С.П.* Влияние кубической нелинейности на солитонные решения уравнения Бенджамина–Бона–Махони // Ж. вычисл. матем. и матем. физ 2013. Т. 53. № 4. С. 624–633. https://doi.org/10.7868/S004446691304011X

40. *Попов С.П.* Численный анализ солитонных решений модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза–синус-Гордона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 435–445. https://doi.org/10.7868/S004446691503014X

41. *Попов С.П.* Компактонные решения уравнения Кортевега–де Вриза с ограниченной линейной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 158–168. https://doi.org/10.1134/S0044466919010149

42. *Fokas A.S., Liu Q.M.* Generalized conditional symmetries and exact solutions of non-integrable equations // Теор. и матем. физ. 1994. Т. 99. № 2. С. 263–277.

43. *Федотов А.А., Буслаева М.В.* О двухсолитонном решении неинтегрируемого уравнения типа КдФ // Изв. Санкт-Петербургского гос. электротехн. университета “ЛЭТИ”. 2011. № 8. С. 20–25. http://www.eltech.ru/ru/universitet/izdatelstvo/izvestiya

44. *Perelman G.* Two soliton collision for nonlinear Schrodinger equations in dimension 1 // Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis 2011. V. 28. № 3. P. 357–384. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2011.02.002

45. *Martel Y., Merle F.* Stability of two soliton collision for nonintegrable gKdV equations // Commun. in Math. Phys. 2009. V. 289. № 1. P. 39–79. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0685-0

46. *Su C., Wang Y, Qin N., Li J., Zhang G.* Nonautonomous soliton solutions for a nonintegrable Korteweg–de Vries equation with variadle coefficients by the variational approach // Appl. Math. Lett. 2019. V. 90. P. 104–109. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.10.010

47. *Lou S.Y., Tong B., Jia M., Li J.* A coupled Volterra system and its exact solutions, e-print arXiv:0711.0420v1. P. 22.

48. *Zhao H., Zhu Z.* Multi-soliton, multi-positon, multi-negaton, and multi-periodic solutions of the coupled Volterra lattice equation // arXiv:0911.3458v1. P. 17.