ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1915–1947

УДК 517.958

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕНДЖАМЕНА–БОНА–МАХОНИ–БЮРГЕРСА[1)]

М. О. Корпусов[1,*], Д. К. Яблочкин[1]

([1] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ физ. ф-т;
117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия)

*e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.06.2019 г.
Переработанный вариант 05.06.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

Строится фундаментальное решение линейной части нелинейного уравнения, родственного широко известному уравнению Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, на основе которого и второй формулы Грина мы получим сначала третью формулу Грина в ограниченной области, а затем предельным переходом в некотором классе функций получим третью формулу Грина во всем пространстве. Будут изучены свойства потенциалов, входящих в формулу Грина во всем пространстве. После этого будет рассмотрена задача Коши для нелинейного уравнения типа ББМБ и доказано, что классическое решение задачи Коши эквивалентно некоторому нелинейному интегральному уравнению, полученному из третьей формулы Грина. Методом сжимающих отображений будет доказана однозначная локальная во времени разрешимость этого интегрального уравнения. Затем, используя свойства потенциалов, будет доказана локальная во времени разрешимость задачи Коши в классическом смысле. Наконец, в конце работы методом нелинейной емкости будет получена глобальная во времени априорная оценка для классических решений задачи Коши. Библ. 24.

Ключевые слова: теория потенциала, формулы Грина, априорные оценки.

DOI: 10.1134/S0044466919110073

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается модельное уравнение типа Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, описывающего нелинейные квазистационарные процессы в полупроводниках:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u - u - u^2) + \Delta_x u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где функция $u = u(x,t)$ — потенциал электрического поля. Отметим, что нелинейность в уравнении (1.1) является некоэрцитивной и основная сложность в аналитическом исследовании соответствующих задач для этого уравнения связана с тем, что старший порядок производной по времени, соответствующей линейной части, совпадает с порядком производной по времени от нелинейности. Поэтому нелинейность не является “малой” нелинейной поправкой к линейной теории.

В этой работе рассматривается вопрос о локальной разрешимости в классическом смысле задачи Коши для уравнения (1.1). Для этого будем пользоваться интегральным представлением для фундаментального решения соответствующего линейного оператора в уравнении (1.1), с помощью которого будет построен аналог третьей формулы Грина и получено явное представление решения в виде суммы потенциалов. Также в работе будет получена глобальная во времени априорная оценка для классических решений задачи Коши.

Уравнение (1.1) относятся к классу нелинейных уравнений типа С.Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребиной, А.А. Замышляевой [1]–[3] были рассмотрены

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100”.

в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С.Л. Соболева была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [4]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [5], [6], а также в работах их учеников (см., например, работу Ю.Д. Плетнера [7]).

Уравнение (1.1) мы назвали *родственным* уравнению типа ББМБ, поскольку многомерное уравнение Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u - u) + \Delta_x u = \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

т.е. отличие уравнений (1.1) и (1.2) в нелинейностях

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u^2}{\partial x_1}.$$

Это серьезное отличие, поскольку нелинейность $\partial u^2/\partial x_1$ является “малой” нелинейной поправкой к линейной части уравнения (1.2), а вот нелинейность $\partial u^2/\partial t$ “малой” поправкой к линейной части уравнения (1.1) не является.

Отметим, что одномерные и многомерные уравнения ББМБ исследовались в работах [8]–[17], в которых исследовались вопросы физической постановки, локальной и глобальной во времени разрешимости, и асимптотики при больших временах. Отметим также работы [18]–[20], в которых исследовался вопрос о возникновении blow-up для решений начально-краевых задач для одномерного и многомерного уравнения ББМБ.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В работе используются следующие пространства $\mathbb{B}$-значных функций:

$$\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}) \quad \text{и} \quad \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B}),$$

где $\mathbb{B}$ – это банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$. Функция $f(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, если для каждого $t \in [0,T]$ функция $f(t) \in \mathbb{B}$ и, кроме того,

$$\|f(t_2) - f(t_1)\|_{\mathbb{B}} \to +0$$

при $|t_2 - t_1| \to +0$ для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$. В частности, отсюда следует, что $\|f(t)\|_{\mathbb{B}} \in \mathbb{C}[0,T]$ и, следовательно,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{\mathbb{B}} < +\infty.$$

Функция $f(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$, если $f(t) \in C([0,T];B)$ и существует сильная производная

$$\frac{df(t)}{dt} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}),$$

где сильная производная понимается в следующем смысле:

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}[f(t+\Delta t) - f(t)] - \frac{df(t)}{dt}\right\|_{\mathbb{B}} \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0$$

для всех $t, t+\Delta t \in [0,T]$. В качестве банахова пространства $\mathbb{B}$ у нас будут выступать стандартно определяемые банаховы пространства $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ относительно соответствующих норм

$$\|f\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |f(x)|,$$

$$\|f\|_{\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)} := \|f\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} + \sum_{j=1}^{3} \left\|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)},$$

$$\|f\|_{\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)} := \|f\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} + \sum_{j=1}^{3}\left\|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} + \sum_{j,k=1,1}^{3,3}\left\|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)}.$$

Нетрудно убедиться, что сильная производная по времени от функции $f(x,t)$ в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ совпадает с частной производной $\partial f(x,t)/\partial t$. В частности, это означает, что сильная производная по времени в смысле банаховых пространств $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ и $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ тоже совпадает с частной производной $\partial f(x,t)/\partial t$. А из определения сильной производной по времени $t \in [0,T]$ в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ получаем, что

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x_j \partial t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad j = 1,2,3.$$

С учетом этого результата и определения сильной производной по времени $t \in [0,T]$ в смысле $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ получаем равенства

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} = \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad i,j = 1,2,3.$$

Кроме того, мы будем в работе использовать пространства типа Гёльдера $\mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ при $\beta \in (0,1]$. Функция $f(x) \in \mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3)$, если справедливо следующее свойство:

$$[f]_{\beta} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\beta}} < +\infty.$$

Кроме того, будем говорить, что функция $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ при $\beta \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, если справедливо следующее свойство:

$$\sup_{t \in [0,T]} [\rho]_{\beta}(t) := \sup_{t \in [0,T]} \sup_{x \neq y} \frac{|\rho(x,t) - \rho(y,t)|}{|x-y|^{\beta}} < +\infty.$$

Мы также пользуемся обозначением $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$ для широко известного банахова пространства Гёльдера относительно нормы

$$|f(x)|_{2+\alpha} = |f(x)|_2 + \sum_{i,j=1,1}^{3,3}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{\alpha}, \quad |f(x)|_2 := \|f(x)\|_{\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)}.$$

3. ВТОРАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Введем следующие операторы:

$$\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau) := \frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta_y u(y,\tau) - u(y,\tau)) + \Delta_y u(y,\tau),$$

$$\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[v](y,\tau) := -\frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta_y v(y,\tau) - v(y,\tau)) + \Delta_y v(y,\tau).$$

Пусть $u(y,\tau), v(y,\tau) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,t];\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Справедливы следующие формулы:

$$v\frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta u - u) = \frac{\partial}{\partial \tau}[v(\Delta u - u)] - \frac{\partial}{\partial \tau}\operatorname{div}(v\nabla u) + \operatorname{div}\left(v\frac{\partial}{\partial \tau}\nabla u\right) + \operatorname{div}\left(u\frac{\partial}{\partial \tau}\nabla v\right) + u\left[-\frac{\partial}{\partial \tau}\Delta v + \frac{\partial v}{\partial \tau}\right], \quad (3.1)$$

$$v\Delta u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \operatorname{div}(u\nabla v) + u\Delta v. \quad (3.2)$$

Итак, из (3.1) и (3.2) вытекает следующая формула:

$$v\mathfrak{M}_{y,\tau}[u] = \frac{\partial}{\partial \tau}[v(\Delta u - u)] - \frac{\partial}{\partial \tau}\operatorname{div}(v\nabla u) + \operatorname{div}\left(v\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\nabla u + \nabla u\right]\right) - \operatorname{div}\left(u\left[-\frac{\partial}{\partial \tau}\nabla v + \nabla v\right]\right) + u\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[v]. \quad (3.3)$$

Проинтегрируем обе части равенства (3.3) по $(y,\tau)\in\Omega\times[0,t]$ при $t\in(0,T]$ и получим следующую формулу

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[v(y,\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)-u(y,\tau)\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[v](y,\tau)]dyd\tau=$$
$$=\int\limits_\Omega v(y,t)[\Delta_y u(y,t)-u(y,t)]dy-\int\limits_\Omega v(y,0)[\Delta_y u(y,0)-u(y,0)]dy- \tag{3.4}$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left[v(y,t)\frac{\partial u(y,t)}{\partial n_y}-v(y,0)\frac{\partial u(y,0)}{\partial n_y}\right]dS_y+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}[v(y,\tau)B_{y,\tau}[u](y,\tau)-u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y,\tau)]dS_y d\tau,$$

где

$$\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau):=\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}+\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y},\quad \mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y,\tau):=-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial n_y}+\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial n_y}$$

и n_y — внешняя нормаль в точке $y\in\partial\Omega$ по отношению к ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим уравнение в смысле (см. [21]) пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\otimes\mathcal{D}'_+$:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta_x\mathscr{E}(x,t)-\mathscr{E}(x,t)\big)+\Delta_x\mathscr{E}(x,t)=\delta(x)\delta(t). \tag{4.1}$$

Применим к обеим частям уравнения (4.1) преобразование Лапласа и получим после элементарных преобразований равенство

$$\Delta_x\overline{\mathscr{E}}(x,p)-\frac{p}{p+1}\overline{\mathscr{E}}(x,p)=\frac{1}{p+1}\delta(x).$$

Частное решение этого уравнения имеет вид (см., например, [21])

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p)=-\frac{1}{p+1}\frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{p+1}}|x|}}{4\pi|x|}. \tag{4.2}$$

Под функцией

$$F(z)=\sqrt{z},\quad z\in\mathbb{C}^1,$$

понимается главная ветвь. Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+\alpha^2}d\mu=\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|x|}.$$

С учетом этого равенства из (4.2) вытекают следующие равенства:

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p)=-\frac{1}{4\pi^2|x|}\frac{1}{p+1}\sqrt{\frac{p}{p+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+\frac{p}{p+1}}d\mu=-\frac{1}{4\pi^2|x|}\sqrt{\frac{p}{p+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+1}\frac{1}{p+\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}d\mu=$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2|x|}\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+1}d\mu+\frac{1}{4\pi^2|x|}\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{p+\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}d\mu=$$
$$=-\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}+\frac{1}{4\pi^2|x|}\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}}{p+\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}d\mu.$$

Воспользуемся теперь обратным преобразованием Лапласа. С учетом формул 21.4 и 22.91 из [22] получим выражение для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ уравнения (4.1)

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\theta(t)e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right)I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1}\tau\right)d\mu d\tau, \qquad (4.3)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Подынтегральную функцию в (4.3) можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость за исключение точек $z = \pm i$:

$$f(z) = \frac{e^{iz|x|}z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right).$$

Рассмотрим следующий контур на комплексной плоскости по переменной z:

$$\Gamma = L_1 \cup C_R^+ \cup C_\varepsilon^-(i),$$

где

$$L_1 = \{z \in \mathbb{C}^1 : z \in [-R, R]\}, \quad C_R^+ = \{z \in \mathbb{C}^1 : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$C_\varepsilon^-(i) = \{z \in \mathbb{C}^1 : |z - i| = \varepsilon\},$$

причем $0 < \varepsilon < 1 < R$. Тогда функция $f(z)$ будет являться аналитической в области, ограниченной контуром Γ с учетом направления обхода. Поэтому по теореме Коши получаем

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Поскольку по лемме Жордана имеем

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} f(z)dz = 0$$

для любых фиксированных x и $\tau \geq 0$, то справедливо следующее равенство:

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\theta(t)e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right)I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int_{C_\varepsilon^+(i)}\frac{e^{iz|x|}z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right)dzd\tau. \qquad (4.4)$$

Из интегрального представления (4.4) вытекает, что

$$\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{m,n}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\times[0,T])$$

для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < T < \infty$. С помощью замены переменной $z = i + \varepsilon e^{i\varphi}$ получим

$$\int_{C_\varepsilon^+(i)}\frac{e^{iz|x|}z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right)dz = e^{-|x|}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(i\varepsilon|x|e^{i\varphi})(i+\varepsilon e^{i\varphi})^2}{\{(i+\varepsilon e^{i\varphi})^2+1\}^2}\exp\left\{\frac{\tau}{(i+\varepsilon e^{i\varphi})^2+1} - \tau\right\}i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi. \qquad (4.5)$$

С одной стороны, из (4.4) и (4.5) получаем следующие оценки для фундаментального решения при $0 < |x| \leq \mu_0$ при достаточно малом фиксированном $\mu_0 \in (0,1)$:

$$\left|\frac{\partial^k\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k}\right| \leq \frac{A_1(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|}, \qquad (4.6)$$

$$\left|\frac{\partial^{k+1}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_i}\right| \leq \frac{A_2(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|^2}, \qquad (4.7)$$

$$\left|\frac{\partial^{k+2}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_j\partial x_i}\right| \leq \frac{A_3(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|^3}, \qquad (4.8)$$

при $k = 0,1,2,\ i,j = 1,2,3$ равномерно по $t \in [0,T],\ \varepsilon \in (0,1)$. С другой стороны, при $|x| \geq R_0$ при достаточно большом фиксированном $R_0 > 1$ из интегрального представления (4.4) и (4.5) получим следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^k \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k}\right| \leq B_1(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \tag{4.9}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+1} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k \partial x_i}\right| \leq B_2(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \tag{4.10}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+2} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k \partial x_j \partial x_i}\right| \leq B_3(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \tag{4.11}$$

при $k = 0,1,2,\ i,j = 1,2,3$ равномерно по $t \in [0,T],\ \varepsilon \in (0,1)$. Отметим также, что из формулы (4.3) вытекает равенство

$$\mathscr{E}_G(x) := \mathscr{E}(x,0) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{4.12}$$

5. ТРЕТЬЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Приступим теперь к выводу третьей формулы Грина. Пусть точка $x \in \Omega$ фиксирована, $t > 0$. Рассмотрим функцию $u(y,\tau) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,t];\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$ и функцию $v(y,\tau) = \mathscr{E}(x-y,t-\tau)$, которая представляет собой построенное ранее фундаментальное решение.

Применим вторую формулу Грина (3.4) в области $\Omega \backslash O(x,\delta) \times [0,t]$, где $O(x,\delta)$ — шар с центром в точке x достаточно малого радиуса $\delta \in (0,\mu_0)$ (см. оценки (4.6)–(4.8)) такого, что $O(x,\delta) \subset \Omega$. Тогда получим равенство

$$\begin{gathered}\int_0^t \int_{\Omega\backslash O(x,\delta)} (v(y,\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[v](y,\tau))dyd\tau = \int_{\Omega\backslash O(x,\delta)} v(y,\tau)(\Delta_y u(y,\tau) - u(y,\tau))dy\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \\ - \int_{\partial\Omega} v(y,\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}dS_y\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \underbrace{\int_{\partial O(x,\delta)} v(y,\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}dS_y\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}}_{I_1} + \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} [v(y,\tau)B_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)B^t_{y,\tau}[v](y,\tau)]dS_y d\tau + \\ + \underbrace{\int_0^t \int_{\partial O(x,\delta)} [v(y,\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y,\tau)]dS_y d\tau}_{I_2},\end{gathered} \tag{5.1}$$

где нормаль n_y к точке $y \in \partial O(x,\delta)$ является внутренней по отношению к шару $O(x,\delta)$. Обратим внимание на то, что функция $\mathscr{E}_G(x)$, определенная формулой (4.12), является фундаментальным решением оператора Кирхгофа:

$$G_x[u] := \Delta_x u(x) - u(x).$$

Этот факт нам потребуется ниже. Рассмотрим сначала интеграл I_1:

$$\begin{gathered}\int_{\partial O(x,\delta)} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}dS_y\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\int_{\partial O(x,\delta)} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\frac{\partial u(y,t)}{\partial n_y}dS_y + \\ + \int_{\partial O(x,\delta)} \mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u(y,0)}{\partial n_y}dS_y := I_{11} + I_{12}.\end{gathered}$$

Оценим интеграл I_{11}:

$$\left|I_{11}\right| \leq \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \left|\frac{\partial u(y,t)}{\partial n_y}\right| \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y = \left|\frac{\partial u(y^*,t)}{\partial n_y}\right| \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \frac{e^{-\delta}}{4\pi\delta} dS_y = \left|\frac{\partial u(y^*,t)}{\partial n_y}\right| \frac{e^{-\delta}}{4\pi\delta} 4\pi\delta^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \quad (5.2)$$

где $y^* \in \partial O(x,\delta)$ (была использована теорема о среднем). Используя оценку (4.6) для фундаментального решения, оценим интеграл I_{12}:

$$\begin{gathered}\left|I_{12}\right| \leq \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \left|\mathscr{E}(x-y,t)\right| \left|\frac{\partial u(y,0)}{\partial n_y}\right| dS_y \leq A_1(t,\varepsilon,\mu_0) \left|\frac{\partial u(y^*,0)}{\partial n_y}\right| \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)\delta}}{\delta} dS_y = \\ = A_1(t,\varepsilon,\mu_0) \left|\frac{\partial u(y^*,0)}{\partial n_y}\right| \frac{e^{-(1-\varepsilon)\delta}}{\delta} 4\pi\delta^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,\end{gathered} \quad (5.3)$$

где так же $y^* \in \partial O(x,\delta)$. Таким образом, из (35) и (36) получаем, что $I_1 \to 0$ при $\delta \to 0$. Рассмотрим теперь интеграл I_2:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\delta)} [v(y,\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y,\tau)] dS_y d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \mathscr{E}(x-y,t-au)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) dS_y d\tau - \\ - \int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\delta)} u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau) dS_y d\tau := I_{21} - I_{22}.\end{gathered}$$

Оценим интеграл I_{21}, воспользовавшись оценкой (4.6) для фундаментального решения:

$$\begin{gathered}\left|I_{21}\right| \leq \int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \left|\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\right| \left|\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau)\right| dS_y d\tau \leq A_1(t,\varepsilon,\mu_0) \left|\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y^*,\tau^*)\right| \int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)\delta}}{\delta} dS_y d\tau \leq \\ \leq \left|\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y^*,\tau^*)\right| t A_1(t,\varepsilon,\mu_0) \frac{e^{-(1-\varepsilon)\delta}}{\delta} 4\pi\delta^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,\end{gathered} \quad (5.4)$$

где $y^* \in \partial O(x,\delta)$, $\tau^* \in [0,t]$. Рассмотрим интеграл I_{22}:

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y,\tau) dS_y d\tau = \int\limits_0^t u(y^*,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[v](y^*,\tau) 4\pi\varepsilon^2 d\tau. \quad (5.5)$$

В (5.5) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{22} = \int\limits_0^t u(x,\tau) g(t-\tau) d\tau = I_0, \quad (5.6)$$

где

$$g(t-\tau) := \left[-\frac{\partial}{\partial\tau} + I\right] f(t-\tau) = \left[\frac{\partial}{\partial(t-\tau)} + I\right] f(t-\tau), \quad (5.7)$$

$$f(t) := -e^{t/2} I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \int\limits_0^t e^{-(t-s)/2} I_0\left(\frac{t-s}{2}\right) \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2} \exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1} s\right) d\mu ds, \quad f(0) = -1. \quad (5.8)$$

Действительно, справедливы следующие равенства для функции $v(y,\tau) = \mathscr{E}(x-y,t-\tau)$ при $t \geq 0$ и $x \neq y$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial n_y} = -e^{-t/2} I_0\left(\frac{t}{2}\right) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)/2} I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right) \times \\ \times \int\limits_{C^+_\varepsilon(i)} \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right) dz,\end{gathered} \quad (5.9)$$

где n_y — внешняя нормаль в точке $y \in \partial O(x,\delta)$ по отношению к шару $O(x,\delta)$. Вычислим следующие производные по нормали n_y :

$$f_1(x-y) := \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad f_2(x-y,z) := \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right). \tag{5.10}$$

Справедливы равенства

$$f_1(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}e^{-|x-y|} + e^{-|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|^2},$$

$$f_2(x-y,z) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}e^{iz|x-y|} + \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} =$$
$$= -iz\frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} := f_{21}(x-y,z) + f_{22}(x-y,z).$$

С другой стороны, равенство (5.9) можно при $x \neq y$ переписать в виде

$$\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial n_y} = -e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right)f_1(x-y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)/2}I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int\limits_{C_\varepsilon^+(i)} f_2(x-y,z)\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right)dzd\tau =$$
$$= -e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right)f_1(x-y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)/2}I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int\limits_{C_\varepsilon^+(i)} f_{21}(x-y,z)\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right)dzd\tau + \tag{5.11}$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2|x-y|^2}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)/2}I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x-y|}\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1}\tau\right)d\mu d\tau.$$

Из равенств (5.10), (5.11) вытекает следующее предельное свойство при $y^* \in \partial O(x,\delta)$:

$$\frac{\partial v(y^*,\tau)}{\partial n_y}4\pi\delta^2 \to -e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)/2}I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1}\tau\right)d\mu d\tau = \tag{5.12}$$
$$= f(t-\tau) \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Аналогичным образом можно доказать следующее предельное свойство:

$$\frac{\partial^2 v(y^*,\tau)}{\partial n_y \partial\tau}4\pi\delta^2 \to \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial\tau} \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{5.13}$$

Таким образом, из (5.12), (5.13) получаем предельное равенство (5.6).

Рассмотрим отдельно интеграл

$$J(t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1}t\right)d\mu.$$

Вычислим этот интеграл при помощи преобразования Лапласа

$$\bar{J}(p) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\frac{1}{p+\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}d\mu = \frac{1}{p+1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)\left(\mu^2+\dfrac{p}{p+1}\right)}d\mu. \tag{5.14}$$

Последний интеграл вычислим при помощи вычетов:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)\left(\mu^2+\dfrac{p}{p+1}\right)}d\mu = 2i\,\mathrm{res}\,f(i) + 2i\,\mathrm{res}\,f\left(i\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right),$$

где

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{(z^2+1)\left(z^2+\frac{p}{p+1}\right)} = \frac{p+1}{2i},$$

$$\operatorname{res} f\left(i\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right) = \lim_{z\to i\sqrt{\frac{p}{p+1}}}\left(z - i\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right)\frac{z^2}{(z^2+1)\left(z^2+\frac{p}{p+1}\right)} =$$

$$= -\frac{p}{p+1}\frac{1}{1-\frac{p}{p+1}}\frac{1}{2i\sqrt{\frac{p}{p+1}}} = -\frac{1}{2i}\sqrt{p(p+1)}.$$

Итак, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)\left(\mu^2+\frac{p}{p+1}\right)}d\mu = p+1-\sqrt{p(p+1)}. \tag{5.15}$$

Следовательно, из (5.14) с учетом (5.15) получим равенство

$$\overline{J}(p) = 1-\sqrt{\frac{p}{p+1}}.$$

Следовательно,

$$\overline{f}(p) = -\frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} + \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\overline{J}(p) = -\frac{1}{p+1}.$$

Рассмотрим равенство (5.7), которое можно переписать в виде

$$g(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + I\right] f(t). \tag{5.16}$$

Применим преобразование Лапласа и получим равенство

$$\overline{g}(p) = \overline{f}(p) + p\overline{f}(p) - f(0) = -\frac{p+1}{p+1} + 1 = 0. \tag{5.17}$$

Итак, $g(t) = 0$ для всех $t \geq 0$. Следовательно, $I_0(t) = 0$, откуда в силу (5.4) получаем, что $I_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теперь заметим, что

$$\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq y.$$

Поэтому

$$\int_0^t \int_{\Omega\setminus O(x,\varepsilon)} u(y,\tau)\mathfrak{M}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau)dyd\tau = 0. \tag{5.18}$$

Тогда с учетом (5.2)–(5.4), (5.18) из (5.1) при $\varepsilon \to 0$ приходим к равенству

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_\Omega \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau = \int_\Omega \mathscr{E}(x-y,t-\tau)(\Delta_y u(y,\tau)-u(y,\tau))dy\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \\ -\int_{\partial\Omega}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}dS_y\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t\int_{\partial\Omega}[\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau)]dS_y d\tau.\end{gathered} \tag{5.19}$$

Заметим, что для функции $u(y,\tau) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,t];\mathbb{C}^{(2)}(\bar{\Omega}))$ и фундаментального решения оператора Кирхгофа $\mathscr{E}_G(x)$ справедлива классическая третья формула Грина:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}(\Delta_y u(y,t) - u(y,t))\,dy = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left(u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right) - \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u(y,t)}{\partial n_y}\right)dS_y + \chi(x)u(x,t), \quad (5.20)$$

для каждого $t > 0$, где функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \Omega, \\ 1/2, & \text{если} \quad x \in \partial\Omega, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Таким образом, из равенств (5.19), (5.20) вытекает следующая третья формула Грина:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_{\Omega}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau + \int_{\Omega}\mathscr{E}(x-y,t)(\Delta_y u(y,0) - u(y,0))\,dy - \\ &- \int_{\partial\Omega}\mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u(y,0)}{\partial n_y}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y - \quad (5.21) \\ &- \int_0^r\int_{\partial\Omega}[\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{B}'_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau)]dS_y d\tau. \end{aligned}$$

6. ЗАДАЧА КОШИ

Сформулируем условия на бесконечности относительно функции $u(x,t)$. Для этого введем определенный класс функций.

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(x,t) \in M^{\varepsilon}(T)$, если найдется такое $\varepsilon \in (0,1/2)$, что при $|x| > 1$ выполнены неравенства

$$|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)| \le a_1(T)\exp(\varepsilon|x|/2),$$

$$|u(x,t)| \le a_2(T)\exp(\varepsilon|x|/2),$$

$$\left|\frac{\partial^{k+1}u(x,t)}{\partial x_j \partial t^k}\right| \le a_3(T)\exp(\varepsilon|x|/2),$$

$$|\Delta_x u_0(x) - u_0(x)| \le a_4(T)\exp(\varepsilon|x|/2)$$

для всех $t \in [0,T]$, где $u_0(x) = u(x,0)$ и $a_j(T)$ — это некоторые подложительные постоянные, $j = 1,2,3,4$, $k = 0,1$.

Определение 2. Классическим решением задачи Коши называется *функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u - u) + \Delta_x u = \frac{\partial u^2}{\partial t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad (6.1)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (6.2)$$

Теорема 1. *Всякое классическое решение задачи Коши $u(x,t)$ в классе $M^{\varepsilon}(T)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:*

$$u(x,t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial\tau}dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)(\Delta_y u_0(y) - u_0(y))\,dy \quad (6.3)$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$.

Доказательство. Воспользуемся третьей формулой Грина (5.21) в области $O(x, R)$ при настолько большом $R > 0$, чтобы было выполнено условие $x \in O(0, R)$. Тогда получим формулу

$$\begin{gathered} u(x,t) = \int_0^t \int_{O(x,R)} \mathscr{E}(x-y, t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau + \int_{O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)(\Delta_y u_0(y) - u_0(y))dy - \\ - \int_{\partial O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}dS_y - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial O(x,R)} u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y - \\ - \int_0^t \int_{\partial O(x,R)} [\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](y,\tau)]dS_y d\tau. \end{gathered} \tag{6.4}$$

При $y \in \partial O(x, R)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|y| \le |x-y| + |x| \le 2R,$$

поскольку по предположению $x \in O(0, R)$. Тогда в силу определения класса $M^{\varepsilon}(T)$ и оценок фундаментального решения (4.9) для поверхностных интегралов в равенстве (6.4) справедливы следующие предельные свойства при $R \ge R_0 > 1$ и $\varepsilon \in (0,1/2)$:

$$\begin{gathered} \left|\int_{\partial O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}dS_y\right| \le B_1(T,\varepsilon,R_0)a_3(T)\frac{e^{-(1-\varepsilon)R}}{R}e^{\varepsilon R}4\pi R^2 \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \\ \left|\frac{1}{4\pi}\int_{\partial O(x,R)} u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y\right| \le a_2(T)e^{\varepsilon R}\frac{e^{-R}}{R}R^2 = a_2(T)Re^{-(1-\varepsilon)R} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \\ \left|\int_0^t \int_{\partial O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{B}_{y,\tau}[u](y,\tau)dS_y d\tau\right| \le B_1(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)R}}{R}c_1(T)e^{\varepsilon R}4\pi R^2 \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \\ \left|\int_0^t \int_{\partial O(x,R)} u(y,\tau)\mathfrak{B}^t_{y,\tau}[\mathscr{E}](y,\tau)dS_y d\tau\right| \le 3B_2(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)R}}{R}a_2(T)e^{\varepsilon R}4\pi R^2 \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \end{gathered} \tag{6.5}$$

где $\varepsilon \in (0,1/2)$. Наконец, справедливы следующие оценки:

$$\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau\right| \le TB_1(T,\varepsilon,R_0)a_1(T)\int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|}e^{\varepsilon|y|/2}dy, \tag{6.6}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)(\Delta_y u_0(y) - u_0(y))dy\right| \le B_1(T,\varepsilon,R_0)a_4(T)\int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|}e^{\varepsilon|y|/2}dy. \tag{6.7}$$

Покажем, что правые части оценок (6.6) и (6.7) стремятся к нулю при $R \to +\infty$. Рассмотрим интеграл:

$$I(R) = \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|}e^{\varepsilon|y|/2}dy, \tag{6.8}$$

где $x \in \mathbb{R}^3$. Сделаем замену $w = y - x$, тогда интеграл (6.8) примет вид

$$I(R) = \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|w|}}{|w|}e^{\varepsilon|w+x|/2}dw.$$

Поскольку $x \in O(0, R)$, т.е. $|x| < R$, имеем

$$|x| < R \le |w|,$$

поэтому в силу неравенства треугольника имеем

$$|w + x| \le |w| + |x| \le 2|w|.$$

Тогда справедливы неравенства

$$0 \le I(R) \le \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|w|}}{|w|} e^{\varepsilon|w|} dw = 4\pi\int\limits_R^{+\infty} \rho e^{-(1-2\varepsilon)\rho} d\rho \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \quad \varepsilon \in (0,1/2).$$

Таким образом, с учетом определения 2 и предельных формул (6.5)–(6.7) в пределе при $R \to +\infty$ из равенства (6.4) получаем равенство (6.3).

Теорема доказана.

7. СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО И ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Займемся теперь изучением свойств потенциалов, связанных с задачей Коши. А именно рассмотрим потенциалы $V(x,t)$ и $W(x,t)$, которые имеют следующий вид:

$$V(x,t) := V[\mu](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy,$$

$$W(x,t) := W[\rho](x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *и* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$. *Тогда* $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *и справедливы следующие формулы:*

$$V(x,0) = V_0(x) = V_0[\mu](x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\mu(y)dy, \tag{7.1}$$

$$\Delta_x V_0(x) - V_0(x) = \mu(x), \tag{7.2}$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\left(\Delta_y u_0(y) - u_0(y)\right) dy = u_0(x). \tag{7.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$ – это произвольная точка. Тогда найдется $r > 0$ такой, что $O(x_0,r) \subset \mathbb{R}^3$ и $t_0 \in [0,T]$. Представим потенциал $V(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t), \tag{7.4}$$

$$V_1(x,t) = \int\limits_{O(x_0,r)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy,$$

$$V_2(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,r)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy.$$

Рассмотрим сначала выражение для $V_1(x_0,t_0)$. Для этой величины с учетом оценки (4.6) фундаментального решения справедлива следующая цепочка выражений при $0 < r \le \mu_0$ и достаточно малом $\mu_0 \in (0,1)$:

$$\begin{gathered} |V_1(x_0,t_0)| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \int\limits_{O(x_0,r)} |\mathscr{E}(x_0-y,t_0)|dy \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) \int\limits_{O(x_0,r)} \frac{1}{|x_0-y|}dy \le \\ \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi\int\limits_0^r \rho d\rho = \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) 2\pi r^2 < \frac{\varepsilon}{3} \end{gathered} \tag{7.5}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Предположим, что $x \in O(x_0, r/2)$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x-y| \le |x-x_0| + |x_0-y| \le \frac{3}{2}r$$

для всех $y \in O(x_0, r)$. Поэтому для всех $x \in O(x_0, r/2)$ имеет место вложение $O(x_0, r) \subset O(x, 3r/2)$ и справедлива следующая оценка:

$$\begin{gathered}|V_1(x,t)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \int\limits_{O(x_0,r)} |\mathscr{E}(x-y,t)|dy \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \int\limits_{O(x,3r/2)} |\mathscr{E}(x-y,t)|dy \leq \\ \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^2 < \frac{\varepsilon}{3}\end{gathered} \tag{7.6}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Пусть $y \in \mathbb{R}^3\backslash O(x_0, r)$ и $x \in O(x_0, r/2)$, тогда справедливы следующие оценки снизу:

$$|y - x_0| \geq r > 0,$$

$$|y - x| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0.$$

Следовательно, у подынтегральной функции в выражениях $V_2(x_0, t_0)$ и $V_2(x, t)$ нет особенности, тогда из явного вида этой подынтегральной функции вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно малое $\delta(r, \varepsilon) > 0$, что получим:

$$|V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.7}$$

для всех (x, t) таких, что $|x - x_0| < \delta$ и $\{|t - t_0| < \delta\} \cap [0, T]$. Итак, из выражений (7.4)–(7.7) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $r > 0$ и такое малое $\delta(r, \varepsilon) > 0$, что имеет место цепочка неравенств:

$$|V(x,t) - V(x_0,t_0)| \leq |V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| + |V_1(x,t)| + |V_1(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для всех (x, t) таких, что $|x - x_0| < \delta$ и $\{|t - t_0| < \delta\} \cap [0, T]$. Отсюда и получаем непрерывность потенциала $V(x, t)$. Именно, доказано, что $V(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$. Докажем, что на самом деле потенциал $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Действительно, потенциал $V(x, t)$ можно разбить на три слагаемых следующим образом:

$$V(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) + K_3(x,t),$$

$$K_1(x,t) = \int\limits_{O(x,\mu_0)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy,$$

$$K_2(x,t) = \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy,$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash O(x,R_0)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy,$$

где числа $R_0 > 1$ и $\mu_0 \in (0, 1/2)$ используются в оценках (4.6)–(4.11) фундаментального решения $\mathscr{E}(x, t)$. Оценим функции $K_j(x, t)$ при $j = 1, 2, 3$. Для функций $K_1(x, t)$ и $K_3(x, t)$ справедливы следующие оценки:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |K_1(x,t)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{O(x,\mu_0)} \frac{1}{|y-x|}dy = \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 < +\infty,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|K_1(x,t_2) - K_1(x,t_1)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\int\limits_{O(x,\mu_0)} [\mathscr{E}(x-y,t_2) - \mathscr{E}(x-y,t_1)]\mu(y)dy\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\int\limits_{O(x,\mu_0)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial s}\mu(y)dsdy\right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)||t_2 - t_1| \sup_{x\in\mathbb{R}^3, s\in[0,T]} \int\limits_{O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial s}\right|dy \leq$$

$$\leq A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)||t_2-t_1|,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]}|K_3(x,t)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\,B_1(T,\varepsilon,R_0)\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)}\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|}dy = \tag{7.8}$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\,B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}\rho e^{-(1-\varepsilon)\rho}d\rho < +\infty, \quad \varepsilon\in(0,1/2),$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|K_3(x,t_2)-K_3(x,t_1)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)}[\mathscr{E}(x-y,t_2)-\mathscr{E}(x-y,t_1)]\mu(y)dy\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial s}\mu(y)dsdy\right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\,B_1(T,\varepsilon,R_0)|t_2-t_1|\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)}\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|}dy =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\,B_1(T,\varepsilon,R_0)|t_2-t_1|4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}\rho e^{-(1-\varepsilon)\rho}d\rho = B_{11}(T,\varepsilon,R_0)|t_2-t_1|, \quad \varepsilon\in(0,1/2).$$

Наконец, нетрудно доказать оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]}|K_2(x,t)| < +\infty,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|K_2(x,t_2)-K_2(x,t_1)| \leq B_{12}(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)|t_2-t_1|. \tag{7.9}$$

Из оценок (7.8), (7.9) и доказанного свойства $V(x,t)\in C(\mathbb{R}^3\times[0,T])$ приходим к выводу о том, что

$$V(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];C_b(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 2. Поскольку из явного вида (4.3) фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ следует

$$\mathscr{E}(x,0) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|},$$

то отсюда сразу получаем формулу (7.1). Заметим, что потенциал $V_0(x)$ является классическим объемным потенциалом для оператора Кирхгофа. Поэтому для него справедлива классическая формула (7.2) (см., например, [21]).

Шаг 3. Воспользуемся классической третьей формулой Грина для оператора Кирхгофа в шаре $O(x,R)$ радиуса $R>0$:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}(\Delta_y u_0(y)-u_0(y))dy = \underbrace{\int\limits_{\partial O(x,R)}\left(u_0(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}\right)dS_y}_{I} + u_0(x). \tag{7.10}$$

Рассмотрим отдельно поверхностный интеграл I в (7.10):

$$|I| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|u_0(y)|\int\limits_{\partial O(x,R)}\left[\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}+\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\right]dS_y + \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}\right|\int\limits_{\partial O(x,R)}\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y =$$
$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|u_0(y)|\left[\frac{e^{-R}}{R}+\frac{e^{-R}}{R^2}R^2\right] + \sup_{y\in\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}\right|\frac{e^{-R}}{R}R^2 \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0. \tag{7.11}$$

Таким образом, из (7.10) с учетом (7.11) в пределе при $R\to+\infty$ получаем формулу (7.3).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$. *Тогда потенциал* $V(x,t)$ *принадлежит банаховому пространству* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(R^3))$ *и справедливо следующее равенство*:

$$\frac{\partial^{k+1}V(x,t)}{\partial t^k \partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{k+1}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t^k \partial x_j}\mu(y)dy, \quad j = 1,2,3, \quad k = 0,1.$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала, что $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(R^3))$. Отметим, что в лемме 1 было доказано, что $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. В силу того, что фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{m,n}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \times [0,T])$ и для производных по времени $t \in [0,T]$ справедливы оценки (4.6) и (4.9), то для каждого $x \in \mathbb{R}^3$ потенциал $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T]$ и справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\mu(y)dy.$$

Точно также как при доказательстве леммы 1 при помощи оценки (4.6) можно сначала доказать, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]),$$

а затем доказать, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1)). \tag{7.12}$$

В частности, из (7.12) вытекает, что

$$\left\| \frac{V(x,t+\Delta t) - V(x,t)}{\Delta t} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{\partial V(x,t^*)}{\partial t} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0, \tag{7.13}$$

поскольку $t^* \in [t, t+\Delta t]$. Это означает, что сильная производная функции $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ по переменной $t \in [0,T]$ совпадает с частной производной $\partial V(x,t)/\partial t$. Это соображение будет нами использовано и в более сложных случаях. Следовательно, $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1))$.

Шаг 2. Докажем, что $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$.

Преобразуем для $R > 0$ выражение для потенциала $V(x,t)$:

$$V(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy = \int_{\mathbb{R}^3 \backslash O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy + \int_{O(x,R)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy = V_1(x,t) + V_2(x,t).$$

В подынтегральном выражении функции $V_1(x,t)$ нет особенностей и $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$. Поэтому в силу свойств фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ для всякого $t \in [0,T]$ производные функции $V_1(x,t) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ по переменной x_j можно заносить под знак интеграла. Следовательно, для всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3 \backslash O(x,R)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy. \tag{7.14}$$

Для исследования гладкости функции $V_2(x,t)$ нужно полностью повторить доказательство леммы 4.1 работы [23] (см. стр. 59), поскольку оценки (4.6) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ при $|x| \to 0$ аналогичны оценкам для функции

$$\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi|x|},$$

которая и фигурирует в лемме 4.1 работы [23]. Поэтому для всех $t \in [0,T]$ по переменной x функция $V_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и справедливо равенство

$$\frac{\partial V_2(x,t)}{\partial x_j} = \int\limits_{O(x,R)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy. \tag{7.15}$$

Таким образом, из выражений (7.14) и (7.15) вытекает, что для всех $t \in [0,T]$ функция $V(x,t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^3)$ и справедливо поточечное равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy. \tag{7.16}$$

Точно также как при доказательстве леммы 1 с учетом оценок (4.7) и (4.10) можно доказать, что из поточечного равенства (7.16) следует

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{7.17}$$

Для дальнейшего нам нужно переписать равенство (7.16) в виде

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} = I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t),$$

где

$$I_1(x,t) := \int\limits_{O(x,\mu_0)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy,$$

$$I_2(x,t) := \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy, \tag{7.18}$$

$$I_3(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash O(x,R_0)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\mu(y)dy,$$

где числа $\mu_0 \in (0,1)$ и $R_0 > 1$ используются в оценках (4.6)–(4.11) фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$. Справедливы оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |I_2(x,t)| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \sup_{x\in O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0), t\in[0,T]} \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\right| dy \le$$
$$\le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_4(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) < +\infty,$$

где мы воспользовались следующим равенством:

$$\int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\right| dy = \{w = x-y\} = \int\limits_{O(0,R_0)\backslash O(0,\mu_0)} \left|\frac{\partial \mathscr{E}(w,t)}{\partial w_j}\right| dw$$

и этот интеграл от $x \in \mathbb{R}^3$ не зависит. Далее имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |I_2(x,t_2) - I_2(x,t_1)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \left[\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t_2)}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t_1)}{\partial x_j}\right]\mu(y)dy\right| =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left| \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,s)}{\partial x_j \partial s}\mu(y)dsdy\right| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)||t_2-t_1| \sup_{x\in\mathbb{R}^3, s\in[0,T]} \int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,s)}{\partial x_j \partial s}\right| dy =$$
$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)||t_2-t_1| \sup_{s\in[0,T]} \int\limits_{O(0,R_0)\backslash O(0,\mu_0)} \left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(w,s)}{\partial w_j \partial s}\right| dw = A_5(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)||t_2-t_1| \to +0$$

при $|t_2 - t_1| \to +0$ для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$. Рассмотрим теперь $I_1(x,t)$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |I_1(x,t)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} \int\limits_{O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right| dy = \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{O(0,\mu_0)} \left|\frac{\partial\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_j}\right| dw \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) \int\limits_{O(0,\mu_0)} \frac{1}{|w|} dw = \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_1(T,\varepsilon,\mu_0) 2\pi\mu_0^2,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |I_1(x,t_2) - I_1(x,t_1)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int\limits_{O(x,\mu_0)} \left[\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t_2)}{\partial x_j} - \frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t_1)}{\partial x_j}\right] \mu(y) dy \right| =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int\limits_{O(x,\mu_0)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial s\partial x_j} \mu(y) ds dy \right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \sup_{x\in\mathbb{R}^3, s\in[0,T]} \int\limits_{O(x,\mu_0)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial s\partial x_j}\right| dy\, |t_2 - t_1| \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_2(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi\mu_0\, |t_2 - t_1|.$$

Наконец, рассмотрим $I_3(x,t)$. Справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |I_3(x,t)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, B_1(T,\varepsilon,R_0) \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|x-y|}}{|x-y|} dy =$$
$$= B_1(T,\varepsilon,R_0) \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, 4\pi \int\limits_{R_0}^{+\infty} \rho e^{-(1-\varepsilon)\rho} d\rho < +\infty, \quad \varepsilon \in (0, 1/2),$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |I_3(x,t_2) - I_3(x,t_1)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} \left[\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t_2)}{\partial x_j} - \frac{\mathscr{E}E(x-y,t_1)}{\partial x_j}\right] \mu(y) dy \right| = \tag{7.19}$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,s)}{\partial x_j\partial s} \mu(y) ds dy \right| \leq B_2(T,\varepsilon,R_0) \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_0)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|w|}}{|w|} dw\, |t_2 - t_1| =$$
$$= B_4(T,\varepsilon,R_0) \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, |t_2 - t_1|.$$

Следовательно, из (7.17)–(7.19) вытекает, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)). \tag{7.20}$$

С учетом доказанного свойства, что $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1))$, мы приходим к выводу о том, что

$$V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)). \tag{7.21}$$

Шаг 3. Для дальнейшего нам нужно получить результат о поточечном равенстве

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j} \quad \text{для каждого} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T].$$

Действительно, справедлива следующая цепочка выражений:

$$\left|\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_j}\right| |\mu(y)|\, dy + \int\limits_{O(x,\delta)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t}\right| |\mu(y)|\, dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,\delta)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_j}\right| |\mu(y)|\, dy = \int\limits_{O(x,\delta)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t}\right| |\mu(y)|\, dy + \int\limits_{O(x,\delta)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_j}\right| |\mu(y)|\, dy \leq$$
$$\leq 2\sup_{y\in R^3}|\mu(y)|\, A_2(T,\varepsilon,\mu_0) \int\limits_{O(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^2} dy = 2\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, A_2(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi\delta \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0,$$

где мы воспользовались тем, что при $x \neq y$ и $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t \partial x_j},$$

а также воспользовались оценкой (4.7).

Шаг 4. Докажем теперь, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)).$$

Действительно, в силу (7.12) имеем

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$$

и, кроме того, справедливо равенство

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} \mu(y) dy.$$

Далее точно также, как при доказательстве свойства (7.20), используя оценки (4.6)–(4.11), можно доказать, что для каждого $t \in [0,T]$ функция

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3),$$

причем

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial t} \mu(y) dy$$

и точно также, как при доказательстве шага 2, можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j \partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)). \tag{7.22}$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка выражений:

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial V(x,t+\Delta t)}{\partial x_j} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t \partial x_j} \right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{\partial^2 V(x,t^*)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t \partial x_j} \right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0, \tag{7.23}$$

поскольку $t^* \in [t, t+\Delta t]$. Таким образом, сильная производная по времени $t \in [0,T]$ функции $V(x,t)$ в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ в силу (7.13) и (7.23) совпадает с частной производной $\partial V(x,t)/\partial t$.

Итак, в силу результата шага 1 имеем

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Отсюда и из (7.22) вытекает, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)).$$

В сочетании с (7.21) мы приходим к выводу о том, что $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(R^3))$.

Лемма доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *при* $\beta \in (0,1]$. *Тогда потенциал* $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ *и для любого* $R > 0$ *справедливо следующее равенство*:

$$\frac{\partial^{k+2}V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t^k} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R)} \frac{\partial^{k+2}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t^k}\mu(y)dy + \int\limits_{O(x,R)} \frac{\partial^{k+2}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t^k}(\mu(y)-\mu(x))dy + \\ + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,R)} \frac{\partial^{k+1}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial t^k}\cos(n_y,e_j)dS_y, \tag{7.24}$$

где $i, j = 1,2,3$, $k = 0,1$.

Доказательство.

Шаг 1. Действуем аналогично доказательству леммы 2. А именно, преобразуем выражение для потенциала $V(x,t)$ для $0 < \mu_1 \le \mu_0$:

$$V(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy = \\ = V_1(x,t) + V_2(x,t).$$

В подынтегральном выражении функции $V_1(x,t)$ нет особенностей и $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$. Поэтому в силу свойств фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ функция $V_1(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ для каждого $t \in [0,T]$ и производные по переменной x можно заносить под знак интеграла:

$$\frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x_j \partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}\mu(y)dy. \tag{7.25}$$

Заметим, что $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3)$. Поэтому для исследования гладкости функции $V_2(x,t)$ нужно так же, используя идентичный вид оценки (4.8) при $|x| \to 0$ нашего фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ и функции $\Gamma(x)$, введенной при доказательстве леммы (2), полностью повторить доказательство леммы 4.2 работы [23]. Таким образом, для каждого $t \in [0,T]$ функция $V_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ и справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x_j \partial x_i} = \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}(\mu(y)-\mu(x))dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i}\cos(n_y,e_j)dS_y, \tag{7.26}$$

где $\cos(n_y,e_j)$ – косинус угла между вектором внешней нормали к $\partial O(x,R_0)$ в точке y и ортом e_j декартовой системы координат.

Шаг 2. Итак, из выражений (7.25), (7.26) приходим к выводу о том, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j \partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}\mu(y)dy + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}(\mu(y)-\mu(x))dy + \\ +\mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i}\cos(n_y,e_j)dS_y = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}\mu(y)dy + \int\limits_{O(x,R_1)\setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}\mu(y)dy + \\ + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j \partial x_i}(\mu(y)-\mu(x))dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i}\cos(n_y,e_j)dS_y := \\ := L_1(x,t) + L_2(x,t) + L_3(x,t) + L_4(x,t), \quad R_1 \ge R_0 > 1, \quad \mu_1 \in (0,\mu_0]. \tag{7.27}$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное. Рассмотрим сначала функцию $L_1(x,t)$, для которой справедливо следующее выражение в результате замены переменной интегрирования $w = y - x$:

$$L_1(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,R_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i \partial w_j}\mu(x+w)dw.$$

Тогда справедливы неравенства

$$|L_1(x,t)| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, B_3(T,\varepsilon,R_0) \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_1)} \frac{e^{-(1-\varepsilon)|w|}}{|w|}dw = \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\mu(y)|\, B_3(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_1}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}d\rho < \frac{\delta}{4} \tag{7.28}$$

при достаточно большом $R_1 \ge R_0 > 1$, $\varepsilon \in (0,1/2)$. Рассмотрим функцию $L_2(x,t)$. Сделаем замену переменной $w = y - x$ и получим выражение

$$L_2(x,t) = \int\limits_{O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)} \frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x+w)dw.$$

Подынтегральная функция

$$g(x,w,t) = \frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x+w)$$

является равномерно по $w \in \overline{O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)}$ непрерывной функцией по $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]$. Поэтому для выбранного ранее $\delta > 0$ найдется такое $\gamma = \gamma(\delta) > 0$, что будут выполнены неравенства при $x, x_0 \in \mathbb{R}^3$ и $t, t_0 \in [0,T]$:

$$\begin{gathered}
|L_2(x,t) - L_2(x_0,t_0)| \le \int\limits_{O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x+w) - \frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t_0)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x_0+w)\right|dw \le \\
\le \sup_{w\in O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x+w) - \frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t_0)}{\partial w_i\partial w_j}\mu(x_0+w)\right| |O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)| < \frac{\delta}{4} \\
\text{при} \quad |x-x_0| < \gamma, \quad \{|t-t_0|<\gamma\}\cap[0,T].
\end{gathered} \tag{7.29}$$

Совершенно точно также можно доказать, что при достаточно малом $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ будет выполнено неравенство

$$|L_4(x,t) - L_4(x_0,t_0)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\gamma, \quad \{|t-t_0|<\gamma\}\cap[0,T].$$

Для функции $L_3(x,t)$ справедливы следующие оценки:

$$|L_3(x,t)| \le c_\beta A_3(T,\varepsilon,\mu_0)\int\limits_{O(x,\mu_1)}\frac{1}{|x-y|^{3-\beta}}dy = c_\beta A_3(T,\varepsilon,\mu_0)4\pi\int\limits_0^{\mu_1}\frac{1}{\rho^{1-\beta}}d\rho = c_\beta A_3(T,\varepsilon,\mu_0)4\pi\frac{\mu_1^\beta}{\beta} < \frac{\delta}{4} \tag{7.30}$$

при достаточно малом $\mu_1 \in (0,\mu_0]$, где

$$c_\beta := \sup_{x\ne y}\frac{|\mu(y)-\mu(x)|}{|y-x|^\beta} < +\infty, \quad \beta\in(0,1].$$

Таким образом, из неравенств (7.27), (7.28), (7.29)–(7.30) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое малое $\gamma = \gamma(\delta) > 0$, что

$$\begin{gathered}
\left|\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x_0,t_0)}{\partial x_i\partial x_j}\right| < \delta \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\gamma, \\
\{|t-t_0|<\gamma\}\cap[0,T] \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\times[0,T]).
\end{gathered} \tag{7.31}$$

Кроме того, точно также, как и для функции $I_3(x,t)$, определенной равенством (7.18), используя оценку (4.11) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$, можно доказать, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]}|L_1(x,t)| < +\infty, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^3}|L_1(x,t_2) - L_1(x,t_1)| \le a_1|t_2-t_1|. \tag{7.32}$$

Для функции $L_2(x,t)$ также, как и для функции $I_2(x,t)$, определенной равенством (7.18), используя оценку (4.11) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$, можно доказать, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |L_2(x,t)| < +\infty, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |L_2(x,t_2) - L_2(x,t_1)| \le a_2 |t_2 - t_1|.$$

Аналогичным образом доказывается, что и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |L_4(x,t)| < +\infty, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |L_4(x,t_2) - L_4(x,t_1)| \le a_4 |t_2 - t_1|.$$

Рассмотрим теперь функцию $L_3(x,t)$. Поскольку $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ при $\beta \in (0,1]$, то справедливы следующие оценки:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |L_3(x,t)| \le \sup_{w\in O(0,\mu_1), x\in\mathbb{R}^3} \frac{|\mu(x+w)-\mu(x)|}{|w|^{\beta}} \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{O(0,\mu_1)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t)}{\partial w_i \partial w_j}\right| |w|^{\beta}\, dw \le$$

$$\le c_{\beta} A_3(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi \int\limits_0^{\mu_1} \frac{1}{\rho^{1-\beta}} d\rho = c_{\beta} A_3(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi \frac{\mu_1^{\beta}}{\beta} < +\infty,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |L_3(x,t_2) - L_3(x,t_1)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{O(0,\mu_1)} \left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t_2)}{\partial w_i \partial w_j} - \frac{\partial^2\mathscr{E}(w,t_1)}{\partial w_i \partial w_j}\right| |\mu(x+w)-\mu(x)|\, dw = \tag{7.33}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{O(0,\mu_1)} \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^3\mathscr{E}(w,s)}{\partial s \partial w_i \partial w_j} ds\right| |\mu(x+w)-\mu(x)|\, dw \le c_{\beta} |t_2 - t_1| \sup_{s\in[0,T]} \int\limits_{O(0,\mu_1)} |w|^{\beta} \left|\frac{\partial^3\mathscr{E}(w,s)}{\partial s \partial w_i \partial w_j}\right| dw \le$$

$$\le c_{\beta} A_3(T,\varepsilon,\mu_0) 4\pi \frac{\mu_1^{\beta}}{\beta} |t_2 - t_1|.$$

Итак, из доказанного свойства (7.31) и из неравенств (7.32), (7.33) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)). \tag{7.34}$$

Шаг 3. Отметим, что в силу явного вида (4.3) фундаментального решения и с учетом оценок (4.6)–(4.11) можно, как и выше, доказать справедливость следующего поточечного равенства:

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} \mu(y) dy + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} [\mu(y) - \mu(x)] dy +$$

$$+ \mu(x) \int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.$$

В силу результата леммы 2 справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t \partial x_j} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} \mu(y) dy + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} [\mu(y) - \mu(x)] dy +$$

$$+ \mu(x) \int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.$$

Докажем следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T],$$

где

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_i\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_i\partial x_j}\mu(y)dy + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_i\partial x_j}[\mu(y)-\mu(x)]dy +$$
$$+ \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_i}\cos(n_y,e_j)dS_y.$$

Справедлива цепочка неравенств:

$$\left|\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial t\partial x_j}\right| \le \left|\int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_i\partial x_j}[\mu(y)-\mu(x)]dy\right| + \left|\int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_i\partial t\partial x_j}[\mu(y)-\mu(x)]dy\right| \le$$
$$\le 2c_\beta A_3(T,\varepsilon,\mu_0)\int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{1}{|y-x|^{3-\beta}}dy = 2c_\beta A_3(T,\varepsilon,\mu_0)\frac{\mu_1^\beta}{\beta} \to +0 \quad \text{при} \quad \mu_1 \to +0.$$

Шаг 4. Далее, рассуждая в точности также, как и на шаге 2, используя оценки (4.6)–(4.11) фундаментального решения, сначала можно доказать, что

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\times[0,T]),$$

а затем получить оценки вида

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]}\left|\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right| < +\infty,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial^3 V(x,t_2)}{\partial x_i\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^3 V(x,t_1)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right| \le d|t_2-t_1|,$$

из которых вытекает, что

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Кроме того, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\partial^2 V(x,t+\Delta t)}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right] - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} = \left\|\frac{\partial^3 V(x,t^*)}{\partial t\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} =$$
$$= \left\|\frac{\partial^3 V(x,t^*)}{\partial x_i\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{Z}^3)} \to +0$$

при $|\Delta t| \to +0$, $t^* \in [t, t+\Delta t]$. В совокупности с результатом леммы 2 сильная производная функции $V(x,t)$ по $t\in[0,T]$ в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ совпадает с частной производной $\partial V(x,t)/\partial t$.

Вместе со свойством (7.34) мы приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 2 и получить, что

$$V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)),$$

что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\beta}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *при* $\beta \in (0,1]$. *Тогда потенциал* $V(x,t)$ *удовлетворяет следующему поточечному равенству*:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T].$$

Доказательство. С учетом равенства (7.24) можно доказать справедливость следующей формулы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x-y,t)\mu(y)dy + \mu(x) \int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial n_y \partial t} + \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial n_y} \right] dS_y + \\ + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \left[\Delta_y \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} + \Delta_y \mathscr{E}(x-y,t) \right] [\mu(y) - \mu(x)] dy - \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} \mu(y) dy, \quad \mu_1 \in (0,\mu_0]. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Заметим, что

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x-y,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq y, \quad t \geq 0,$$

и поэтому из равенства (7.35) вытекает следующее:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = \mu(x) \int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial n_y \partial t} + \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial n_y} \right] dS_y + \\ + \int\limits_{O(x,\mu_1)} \left[\Delta_y \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} + \Delta_y \mathscr{E}(x-y,t) \right] [\mu(y) - \mu(x)] dy - \\ - \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} \mu(y) dy := H_1(x,t) + H_2(x,t) + H_3(x,t), \quad \mu_1 \in (0,\mu_0]. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Рассмотрим сначала функцию $H_1(x,t)$. С учетом предельных свойств (5.12) и (5.13) приходим к выводу о справедливости предельного свойства

$$H_1(x,t) \to \frac{\partial f(t)}{\partial t} + f(t) \quad \text{при} \quad \mu_1 \to +0, \tag{7.37}$$

где функция $f(t)$ определена равенством (5.8) и эта функция в силу (5.16), (5.17) удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} + f(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Итак, из (7.37) вытекает поточечное предельное свойство

$$H_1(x,t) \to 0 \quad \text{при} \quad \mu_1 \to +0. \tag{7.38}$$

Рассмотрим функцию $H_2(x,t)$. С учетом оценки (4.8) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ справедлива цепочка неравенств

$$|H_2(x,t)| \leq 2A_3(T,\varepsilon,\mu_0)c_\beta \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{1}{|x-y|^{3-\beta}} dy = 2A_3(T,\varepsilon,\mu_0)c_\beta 4\pi \frac{\mu_1^\beta}{\beta} \to +0 \quad \text{при} \quad \mu_1 \to +0.$$

Наконец, рассмотрим функцию $H_3(x,t)$. С учетом оценки (4.6) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|H_3(x,t)| \leq A_1(T,\varepsilon,\mu_0) \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{1}{|x-y|} dy = 2\pi A_1(T,\varepsilon,\mu_0)\mu_1^2 \to +0 \quad \text{при} \quad \mu_1 \to +0. \tag{7.39}$$

Итак, в пределе при $\mu_1 \to +0$ с учетом (7.38), (7.39) из (7.36) получим, что

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T].$$

Лемма доказана.

Перейдем к изучению свойств объемного теплового потенциала

$$W(x,t) = W[\rho](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau.$$

Объемный тепловой потенциал можно переписать в виде

$$W(x,t) = \int_0^t V(x,t,\tau)d\tau, \quad V(x,t,\tau) := \int_{R^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau)\rho(y,\tau)dy.$$

Справедлива

Лемма 5. *Для любой* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *и* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$ *при* $\beta \in (0,1]$ *объемный потенциал* $W(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство. Утверждение этой леммы является следствием лемм 1–3 и следующих равенств:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x_i} = \int_0^t \frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial x_i} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} d\tau$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in [0,T]$. Доказательства лемм 1–3 остаются справедливыми и в случае, когда плотность $\mu(y,\tau)$ зависит от параметра $\tau \in [0,t]$ при условиях, сформулированных в условии леммы.

Лемма доказана.

Результат леммы 5 может быть усилен:

Лемма 6. *Для любой* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *и* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$ *при* $\beta \in (0,1]$ *объемный потенциал* $W(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство. Справедливо следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = W_0(x,t) + W_1(x,t), \tag{7.40}$$

$$W_0(x,t) := -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy, \quad W_1(x,t) := \int_0^t \frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau \tag{7.41}$$

при $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in [0,T]$. Далее нужно воспользоваться равенствами

$$\frac{\partial W_1(x,t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 W_1(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^3 V(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} d\tau.$$

Теперь нужно фактически воспользоваться доказательствами, аналогичными доказательствам лемм 1–3 для доказательства принадлежности потенциала $W_1(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$. При этом большую сложность, как это не удивительно, вызывает доказательство того, что потенциал

$$W_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)).$$

Докажем это. Легко доказать, что

$$W_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)).$$

Поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ равномерно по $t \in [0,T]$, то как и ранее при доказательстве леммы 3, можно доказать, что $W_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ для каждого $t \in [0,T]$ и при этом справедливо следующее равенство (см. лемму 4.2 работы [23]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy - \rho(x,t)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y - \\ &- \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)[\rho(y,t)-\rho(x,t)]dy = -\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy - \\ &- \int\limits_{O(x,R_1)\setminus O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy - \rho(x,t)\int\limits_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y - \\ &- \int\limits_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)[\rho(y,t)-\rho(x,t)]dy := S_1(x,t)+S_2(x,t)+S_3(x,t)+S_4(x,t)\end{aligned} \tag{7.42}$$

для любых $\mu_1 \in (0,1)$ и $R_1 > 1$. Докажем, что

$$\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Сначала докажем, что

$$\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное и $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$ – произвольные две фиксированные точки. Рассмотрим сначала функцию $S_4(x,t)$. Для этой функции справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |S_4(x,t)| \le A_3(\mu_1) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} \int\limits_{O(0,\mu_1)} \frac{1}{|w|^{3-\beta}} \frac{|\rho(x+w,t)-\rho(x,t)|}{|w|^{\beta}} dw \le c_{\beta} A_3(\mu_1)\frac{\mu_1^{\beta}}{\beta} < \frac{\delta}{8} \tag{7.43}$$

при достаточно малом $\mu_1 > 0$. Фиксируем такое малое $\mu_1 \in (0,1)$ и произвольное $R_1 > 1$. Теперь рассмотрим функцию $S_3(x,t)$. Для этой функции справедливо равенство

$$S_3(x,t) = -\rho(x,t)[\mu_1+1]e^{-\mu_1} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{7.44}$$

Поэтому найдется такое малое $\gamma = \gamma(\delta,\mu_1) > 0$ такое, что

$$|S_3(x_2,t_2) - S_3(x_1,t_1)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad |x_2-x_1| + |t_2-t_1| < \gamma. \tag{7.45}$$

Для функции $S_2(x,t)$ справедливо следующее равенство:

$$S_2(x,t) = -\int\limits_{O(0,R_1)\setminus O(0,\mu_1)} \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j}\left(\frac{e^{-|w|}}{4\pi|w|}\right)\rho(x+w,t)dw \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{7.46}$$

Поэтому найдется такое малое $\gamma = \gamma(\delta,\mu_1,R_1) > 0$, что

$$|S_2(x_2,t_2) - S_2(x_1,t_1)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad |x_2-x_1| + |t_2-t_1| < \gamma. \tag{7.47}$$

Для функции $S_1(x,t)$ справедливо равенство

$$S_1(x,t) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_1)} \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j}\left(\frac{e^{-|w|}}{4\pi|w|}\right)\rho(x+w,t)dw \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{7.48}$$

Поэтому найдется такое малое $\gamma = \gamma(\delta, R_1) > 0$, что

$$|S_1(x_2,t_2) - S_1(x_1,t_1)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad |x_2 - x_1| + |t_2 - t_1| < \gamma. \tag{7.49}$$

Итак, из (7.42) с учетом неравенств (7.43), (7.45), (7.47) и (7.49) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое малое $\mu_1 > 0$ и такое малое $\gamma = \gamma(\delta, \mu_1) > 0$, что

$$\left|\frac{\partial^2 W_0(x_2,t_2)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 W_0(x_1,t_1)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le \sum_{k=1}^{3} |S_k(x_2,t_2) - S_k(x_1,t_1)| + |S_4(x_2,t_2)| + |S_4(x_1,t_1)| < 3\frac{\delta}{4} + 2\frac{\delta}{8} = \delta,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Из равенств (7.44), (7.46) и (7.48) сразу же получаем, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |S_k(x,t)| \le g_k \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\rho(x,t)| < +\infty \quad \text{при} \quad k = 1,2,3,$$

где $g_k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от $T > 0$. Пусть теперь $t_1, t_2 \in [0,T]$, тогда справедливы неравенства

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |S_k(x,t_2) - S_k(x,t_1)| \le g_k \|\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} \quad \text{при} \quad k = 1,2,3.$$

С учетом неравенства (7.43) приходим к выводу о том, что для любого $\delta > 0$ найдется такое малое $\mu_1 > 0$ и такое малое $\gamma = \gamma(\delta, \mu_1) > 0$, что справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial^2 W_0(x,t_2)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 W_0(x,t_1)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le 2 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |S_4(x,t)| + \sum_{k=1}^{3} g_k \|\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)\|_{\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)} < 2\frac{\delta}{8} + 3\frac{\delta}{4} = \delta,$$

поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Итак,

$$\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Лемма доказана.

Наконец, справедлива

Лемма 7. *Пусть* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *и* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$ *при* $\beta \in (0,1]$. *Тогда для потенциала* $W(x,t)$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[W](x,t) = \rho(x,t), \quad W(x,0) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ *и* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Воспользуемся равенствами (7.40), (7.41):

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = W_0(x,t) + W_1(x,t).$$

В силу свойства (7.2) леммы 1 имеет место поточечное равенство:

$$\Delta_x W_0(x,t) - W_0(x,t) = \rho(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0,T]. \tag{7.50}$$

С одной стороны, имеет место следующее равенство:

$$\Delta_x W_1(x,t) - W_1(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\mu_1)} \left[\Delta_x \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} - \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\right]\rho(y,\tau)dyd\tau +$$
$$+ \int_0^t \rho(x,\tau) \int_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial n_y \partial t} dS_y d\tau + \int_0^t \int_{O(x,\mu_1)} \Delta_x \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|}{\partial t}[\rho(y,\tau)-\rho(x,\tau)]dyd\tau - \tag{7.51}$$
$$- \int_0^t \int_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau \quad \text{при} \quad \mu_1 \in (0,\mu_0].$$

С другой стороны, имеем

$$\Delta_x W(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\mu_1)} \Delta_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau + \int_0^t \rho(x,\tau)\int_{\partial O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial n_y} dS_y d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{O(x,\mu_1)} \Delta_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)[\rho(y,\tau)-\rho(x,\tau)]dyd\tau \quad \text{при} \quad \mu_1 \in (0,\mu_0]. \tag{7.52}$$

Сложим равенства (7.51) и (7.52) и получим равенство

$$\Delta_x W_1(x,t) - W_1(x,t) + \Delta_x W(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\mu_1)} \mathfrak{M}_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau +$$
$$+ \int_0^t \rho(x,\tau) \int_{\partial O(x,\mu_1)} \left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial n_y \partial t} + \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial n_y}\right] dS_y d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{O(x,\mu_1)} \left[\Delta_x \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|}{\partial t} + \Delta_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\right][\rho(y,\tau)-\rho(x,\tau)]dyd\tau - \tag{7.53}$$
$$- \int_0^t \int_{O(x,\mu_1)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau \quad \text{при} \quad \mu_1 \in (0,\mu_0].$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве леммы 4 и получим, что правая часть равенства (7.53) стремится к нулю при $\mu_1 \to +0$. Следовательно,

$$\Delta_x W_1(x,t) - W_1(x,t) + \Delta_x W(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]. \tag{7.54}$$

Поскольку

$$\mathfrak{M}_{x,t}[W](x,t) = \Delta_x W_1(x,t) - W_1(x,t) + \Delta_x W_0(x,t) - W_0(x,t) + \Delta_x W(x,t) =$$
$$= \Delta_x W_0(x,t) - W_0(x,t) = \rho(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T],$$

где мы воспользовались равенствами (7.50) и (7.54).

Лемма доказана.

Наконец, можем сформулировать основной результат, который вытекает из лемм 1–7.

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ *и* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда функция*

$$U(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial \tau}dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)(\Delta_x u_0(y) - u_0(y))dy$$

принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$, *удовлетворяет уравнению*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U](x,t) = \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T],$$

и начальному условию

$$U(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Нужно только проверить, что функция

$$\rho(x,t) := \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\mathbb{R}^3) \quad \text{равномерно по} \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad \beta = 1.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\rho(x,t) - \rho(y,t)| \le 2\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right||u(x,t) - u(y,t)| + 2|u(y,t)|\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right| \le$$

$$\le 2\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial u(z_1,t)}{\partial x}\right||x-y| + 2|u(y,t)|\left|\frac{\partial^2 u(z_2,t)}{\partial x \partial t}\right||x-y| \le$$

$$\le 2 \sup_{x,y,z_1,z_2 \in \mathbb{R}^3, t \in [0,T]} \left[\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial u(z_1,t)}{\partial x}\right| + |u(y,t)|\left|\frac{\partial^2 u(z_2,t)}{\partial x \partial t}\right|\right]|x-y| = d\,|x-y|, \quad 0 < d < +\infty.$$

Итак,

$$\sup_{x \ne y, t \in [0,T]} \frac{|\rho(x,t) - \rho(y,t)|}{|x-y|} \le d < +\infty.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *В классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ *всякое классическое решение задачи Коши* (6.1), (6.2) *является решением интегрального уравнения* (6.3), *и наоборот, всякое решение интегрального уравнения* (6.3) *является классическим решением задачи Коши* (6.1), (6.2).

8. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Докажем сначала локальную во времени разрешимость интегрального уравнения (6.3) в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ относительно следующей нормы:

$$\|v_T\| = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]} \sum_{j=0}^{1} \left|\frac{\partial^j v(x,t)}{\partial t^j}\right|.$$

Лемма 8. *Для любого* $T > 0$ *найдется такое достаточно малое* $R_1 > 0$*, что при условиях*

$$u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3), \quad \|u_0\|_{\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)} \le R_1$$

решение уравнения (6.3) *в классе* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) \cap D_{R_2,T}$ *при достаточно малом* $R_2 > 0$ *существует и единственно, где*

$$D_{R_2,T} := \{v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) : \|v_T\| \le R_2\}.$$

Доказательство. Перепишем интегральное уравнение (6.3) в виде

$$u(x,t) = A(u)(x,t),$$

где

$$A(u)(x,t) = f(x,t) + W[\rho](x,t), \quad \rho(y,\tau) = \frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial \tau},$$

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y,t)(\Delta_y u_0(y) - u_0(y))dy,$$

$$W[\rho](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau.$$

В силу результатов леммы 2 функция $f(x,t)\in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Кроме того, из доказательства леммы 6 (см. также лемму 2) следует, что объемный потенциал $W[\rho](x,t)\in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ при $\rho(x,t)\in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Поэтому

$$A(u)(x,t) : \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)).$$

Пусть $T>0$ – произвольное фиксированное. Рассмотрим замкнутый шар

$$D_{R,T} := \{v(x,t)\in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) : \|v_T\| \le R\},$$

где достаточно малое $R>0$ будет выбрано ниже. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}
\|f(x,t)\|_T \le \sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\Delta u_0(y)-u_0(y)|\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)}|\mathscr{E}(x-y,t)|\,dy+\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]}\int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)}|\mathscr{E}(x-y,t)|dy+\right.\\
\left.+\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]}\int\limits_{O(x,\mu_0)}|\mathscr{E}(x-y,t)|\,dy\right]=\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\Delta u_0(y)-u_0(y)|\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)\int\limits_{O(0,R_0)}\frac{e^{-(1-\varepsilon)|w|}}{|w|}dw+\right.\\
\left.+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)\int\limits_{O(0,\mu_0)}\frac{1}{|w|}dw\right]=\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\Delta u_0(y)-u_0(y)|\times \qquad (8.1)\\
\times\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho\,d\rho+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\right]\le\\
\le 2R_1\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho\,d\rho+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\right]:=R_3,
\end{gathered}$$

где число $R_1>0$ определено в условии леммы. В силу определения числа $R_3>0$ оно явно линейно зависит от $R_1>0$. Пусть $R>0$ достаточно мало, тогда выберем $R_1>0$ настолько малым, чтобы были выполнены неравенства

$$\|f(x,t)\|_T \le R_3 \le \frac{R}{2}. \qquad (8.2)$$

Для функции $W(x,t) := W[\rho](x,t)$ справедлива следующая оценка, аналогичная оценке (8.1):

$$\begin{gathered}
\|W(x,t)\|_T \le T2\|u\|_T^2\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho\,d\rho+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\right]\le\\
\le 2TR\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho\,d\rho+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\right]R\le\frac{R}{2}
\end{gathered} \qquad (8.3)$$

при условии, что $R>0$ настолько мало, что

$$2TR\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int\limits_{R_0}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho\,d\rho+C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)+A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2\right]\le\frac{1}{2}.$$

Таким образом, из оценок (8.2) и (8.3) вытекает, что при достаточно малом $R_1>0$ и $R>0$

$$A:\quad D_{R,T}\to D_{R,T}.$$

Докажем, что оператор A является сжимающим на $D_{R,T}$. Пусть

$$u_1(x,t), u_2(x,t)\in D_{R,T}.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}
|\rho_1(y,\tau)-\rho_2(y,\tau)| = \left|\frac{\partial u_1^2}{\partial\tau}-\frac{\partial u_2^2}{\partial\tau}\right| = 2\left|u_1\frac{\partial u_1}{\partial\tau}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial\tau}\right| \le 2\left\{|u_1|\left|\frac{\partial u_1}{\partial\tau}-\frac{\partial u_2}{\partial\tau}\right|+\left|\frac{\partial u_2}{\partial\tau}\right||u_1-u_2|\right\}\le\\
\le 2\max\{\|u_1\|_T,\|u_2\|_T\}\|u_1-u_2\|_T.
\end{gathered}$$

Поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |A(u_1)(x,t) - A(u_2)(x,t)| \le \left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int_{R_0}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho d\rho + C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) + A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 \right]\times$$
$$\times \sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |\rho_1(x,t) - \rho_2 x,t| \le \left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int_{R_0}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho d\rho + C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) + A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 \right]\times \tag{8.4}$$
$$\times 2\max\{\|u_1\|_T, \|u_2\|_T\}\|u_1 - u_2\|_T \le d_1(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0)R\|u_1 - u_2\|_T.$$

Отметим, что для объемного потенциала $W(x,t)$ в силу (7.40) справедливо равенство

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = W_0(x,t) + W_1(x,t),$$

$$W_0(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy, \quad W_1(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau.$$

Справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |W_0(u_1)(x,t) - W_0(u_2)(x,t)| \le \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho} d\rho \sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)| \le \tag{8.5}$$
$$\le d_2 2\max\{\|u_1\|_T, \|u_2\|_T\}\|u_1 - u_2\|_T \le 2d_2 R\|u_1 - u_2\|_T,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |W_1(u_1)(x,t) - W_1(u_2)(x,t)| \le$$
$$\le T\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int_{R_0}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho d\rho + C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) + A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 \right]\times$$
$$\times 2\max\{\|u_1\|_T, \|u_2\|_T\}\|u_1 - u_2\|_T \le \tag{8.6}$$
$$\le T\left[B_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int_{R_0}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho d\rho + C(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) + A_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 \right]2R\|u_1 - u_2\|_T.$$

Из неравенств (8.5) и (8.6) вытекает оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} \left| \frac{\partial A(u_1)(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial A(u_2)(x,t)}{\partial t} \right| \le$$
$$\le \left[TB_1(T,\varepsilon,R_0)4\pi\int_{R_0}^{+\infty} e^{-(1-\varepsilon)\rho}\rho d\rho + TC(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) + TA_1(T,\varepsilon,\mu_0)2\pi\mu_0^2 + d_2 \right]\times \tag{8.7}$$
$$\times 2R\|u_1 - u_2\|_T = d_3(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0)R\|u_1 - u_2\|_T.$$

Наконец, из оценок (8.4) и (8.7) вытекает искомое неравенство

$$\|A(u_1) - A(u_2)\|_T \le R[d_1(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0) + d_3(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0)]\|u_1 - u_2\|_T \le \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_T$$

при условии, что $R > 0$ настолько мало, что

$$R[d_1(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0) + d_3(T,\varepsilon,T,\mu_0,R_0)] \le \frac{1}{2}$$

Тем самым, для любого $T > 0$ при достаточно малом $R_1 > 0$ найдется такое малое $R_2 > 0$, что существует единственное решение интегрального уравнения (6.3) в шаре $D_{R_2,T}$.

Лемма доказана.

Таким образом, справедлива следующая основная теорема данной работы:

Теорема 4. *Для любого $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$, для любого $T > 0$ и достаточно малого $R_1 > 0$ такого, что $\|u_0\|_{\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)} \le R_1$, найдется такое малое $R_2 > 0$, что существует единственное классическое решение задачи Коши* (6.1), (6.2) *в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)) \cap D_{R_2,T}$, где*

$$D_{R_2,T} := \{v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) : \|v\|_T \le R_2\}.$$

Доказательство. Это утверждение является следствием лемм 8, 3, 6, а также теорем 2 и 3.

Теорема доказана.

9. ГЛОБАЛЬНАЯ АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3))$ – классическое решение задачи Коши (6.1), (6.2). Перепишем исходное уравнение в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)+\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2. \tag{9.1}$$

Возьмем пробную функцию вида

$$\phi(x,t)=\varphi_R(x)\varphi(t),\quad \varphi(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right),$$

$$\varphi_R(x)=\varphi_0\left(\frac{|x|}{R}\right),\quad \varphi_0(s)=\begin{cases}1, & s\in[0,1],\\ 0, & s\geq 2,\end{cases}$$

где функция $\varphi_0(s)\in\mathbb{C}^2[0,+\infty)$ и монотонно невозрастающая. Рассмотрим следующую формулу интегрирования по частям для шара $O(0,l)$ с центром в точке $x=0$ радиуса $l>2R$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{O(0,l)}\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)dx&=\int\limits_{\partial O(0,l)}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)dx-\int\limits_{O(0,l)}\left(\nabla_x\left\{u(x,t)+\frac{1}{2}\right\},\nabla_x\varphi_R(x)\right)dx=\\&=\int\limits_{\partial O(0,l)}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)dx+\int\limits_{O(0,l)}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx-\int\limits_{\partial O(0,l)}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\varphi_R(x)}{\partial n_x}dS_x.\end{aligned} \tag{9.2}$$

Учтем, что при $x\in\partial O(0,l)$, справедливы следующие равенства:

$$\varphi_R(x)=0,\quad \frac{\partial\varphi_R(x)}{\partial n_x}=\varphi_0'\left(\frac{l}{R}\right)\frac{(x,n_x)}{R|x|}=0. \tag{9.3}$$

Тогда из (9.2) в силу (9.3) приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx. \tag{9.4}$$

Также справедлива еще одна формула интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi(t)dt&=\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi(t)\Bigg|_{t=0}^{t=T}-\int\limits_0^T\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi'(t)dt=\\&=-\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)dt.\end{aligned} \tag{9.5}$$

Из равенств (9.4) и (9.5) вытекают следующие равенства:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)\varphi(t)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)dxdt, \tag{9.6}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)\varphi(t)dxdt=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dx+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\varphi_R(x)\varphi(t)dxdt&=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)\varphi(t)dxdt=\\&=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dxdt.\end{aligned} \tag{9.7}$$

Теперь умножим обе части уравнения (9.1) на пробную функцию $\phi(x,t)$ и проинтегрируем по частям с учетом полученных равенств (9.6), (9.7). В рузультате получим

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)dxdt= \\
=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dx+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt.
\end{gathered}
\tag{9.8}
$$

Справедливы следующие оценки:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{T}\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dxdt\right|\le\frac{\lambda}{2T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt+\frac{1}{2T\lambda}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}dxdt= \\
=\frac{\lambda}{2T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt+\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}dx,
\end{gathered}
\tag{9.9}
$$

$$
\begin{gathered}
\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)dxdt\right|\le\frac{2\lambda}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt+ \\
+\frac{T}{8\lambda}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2dxdt=\frac{2\lambda}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt+\frac{T^2}{24\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}dx.
\end{gathered}
\tag{9.10}
$$

Из равенства (9.8) в силу неравенств (9.9), (9.10) получаем

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{T^2}{24\lambda}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}dx-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx+ \\
+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dx\ge\frac{2-5\lambda}{2T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dxdt.
\end{gathered}
\tag{9.11}
$$

Заметим, что существует такая функция $\varphi_0(s)$, что справедливы следующие равенства (см. [24]):

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\varphi_R(x)|^2}{\varphi_R(x)}dx=\frac{c_0}{R},\quad c_0=4\pi\int\limits_0^2\frac{s^2}{\varphi_0(s)}\left(\frac{2\varphi_0'(s)}{s}+\varphi_0''(s)\right)^2ds<+\infty. \tag{9.12}
$$

Предположим, что $u_0(x)+1/2\in L^2(\mathbb{R}^3)$, тогда получаем

$$
\begin{gathered}
\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)\Delta_x\varphi_R(x)dx\right|\le\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\Delta_x\varphi_R(x)|^2dx\right)^{1/2}=\frac{c_1}{R^{1/2}}, \\
c_1=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2dx\right)^{1/2}\left(4\pi\int\limits_0^2 s^2\left(\frac{2\varphi_0'(s)}{s}+\varphi_0''(s)\right)^2ds\right)^{1/2}<+\infty.
\end{gathered}
\tag{9.13}
$$

Также имеет место следующее предельное свойство при $R\to+\infty$:

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2\varphi_R(x)dx\to\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2dx. \tag{9.14}
$$

Положим теперь $R=N\in\mathbb{N}$. Используя теорему Беппо Леви из неравенства (9.11) с учетом оценок и предельных свойств (9.12)–(9.14), получим следующую априорную оценку:

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2dx\ge\frac{2-5\lambda}{2T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2dxdt, \tag{9.15}
$$

которая справедлива для любых $\lambda\in(0,2/5)$. Поэтому в пределе при $\lambda\to+0$ из неравенства (9.15) приходим к искомой глобальной во времени априорной оценке для классических решений задачи Коши:

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u_0(x)+\frac{1}{2}\right)^2dx\ge\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2dxdt.
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
2. *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.
3. *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2016. Т. 8. № 4. С. 5–16.
4. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). № 4 (8). С. 607–628.
5. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
6. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
7. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
8. *Albert J.P.* On the decay of solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 30. № 2. P. 527–537.
9. *Avrin J.D., Goldstein J.A.* Global existence for the Benjamin–Bona–Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Analysis. 1985. V. 9. № 8. P. 861–865.
10. *Bisognin E., Bisognin V., Charao C.R., Pazoto A.F.* Asymptotic expansion for a dissipative Benjamin–Bona–Mahony equation with periodic coefficients // Port. Math. 2003. V. 60. № 4. P. 437–504.
11. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A. 1972. V. 272. № 1. P. 47–78.
12. *Biler P.* Long-time behavior of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation in two space dimensions // Differ. Integral Equations. 1992. V. 19. № 4. P. 891–901.
13. *Camassa R., Holm D.D.* An integrable shallow water equation with peaked solitons // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. № 11. P. 1661–1664.
14. *Chen Yu.* Remark on the global existence for the generalized Benjamin–Bona–Mahony equations in arbitrary dimension // Appl. Analysis. 1988. V. 30. № 1. P. 1–15.
15. *Constantin A., Escher J.* Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations // Acta Math. 1998. V. 181. № 2. P. 229–243.
16. *Hayashi N., Kaikina E.I., Naumkin P.I., Shishmarev I.A.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. N.Y.: Springer, 2006.
17. *Hagen T., Turi J.* On a class of nonlinear BBM-like equations // Comput. Appl. Math. 1998. V. 17. № 2. P. 161–172.
18. *Корпусов М.О., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием // Теор. матем. и физ. 2013. Т. 175. № 2. С. 159–172.
19. *Korpusov M.O., Yushkov E.V.* Local solvability and blow-up for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers, Rosenau–Burgers and Korteweg-de Vries–Benjamin–Bona–Mahony equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. V. 69. № 69. P. 1–16.
20. *Korpusov M.O.* On the blow-up of solutions of the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and Rosenau–Burgers equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 4. P. 1737–1743.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
22. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. школа, 1965.
23. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
24. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.