ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1836–1845

УДК 517.977

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ КООРДИНАТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА

© 2019 г. В. И. Максимов

(620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН; Уральский федеральный университет, Россия)

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 31.05.2019 г.
Переработанный вариант 31.05.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

Рассматривается задача реконструкции неизвестного возмущения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях неточного измерения части фазовых координат. Указывается устойчивый к помехам алгоритм ее решения, который основан на сочетании конструкций теорий динамического обращения и гарантированного управления. Алгоритм состоит из двух блоков: блока динамического восстановления неизмеряемых координат и блока восстановления самого возмущения. Библ. 14.

Ключевые слова: алгоритм реконструкции, часть координат.

DOI: 10.1134/S0044466919110097

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача реконструкции неизвестного возмущения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения подобного типа задач хорошо известны. В настоящей работе мы исследуем задачу, которая имеет две особенности. Во-первых, предполагается, что измеряются (с ошибкой) в дискретные, достаточно частые, моменты времени не все фазовые координаты заданной динамической системы, а только их часть. Во-вторых, относительно неизвестного возмущения, действующего на заданную систему, известно лишь, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е. может быть неограниченным. Указанные предположения ведут к невозможности точного восстановления. Учитывая данную особенность, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения рассматриваемой задачи, который основан на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Предлагаемый алгоритм содержит два блока: блок реконструкции в темпе “реального времени” ненаблюдаемых координат, а также блок реконструкции самого возмущения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= f_2(t, x(t), y(t), u(t)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f_2(t, x, y, u) = f_{21}(t, x, y) + Bu$, f_1 и f_{21} — липшицевы функции с константой Липшица L, u — возмущение, B — стационарная матрица соответствующей размерности. Предполагается, что на систему (1.1) действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$

($\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряется часть фазовых состояний системы (1.1), а именно состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; z_0, u(\cdot))$, где $z_0 = \{x_0, y_0\}$, $z(\cdot; z_0, u(\cdot)) = \{x(\cdot; z_0, u(\cdot)), y(\cdot; z_0, u(\cdot))\}$ – решение системы (1.1). Состояния $x(\tau_i)$, $i \in [1 : m-1]$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ – удовлетворяют неравенствам

$$\left|x(\tau_i) - \xi_i^h\right|_n \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0,1)$ – уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$. Требуется указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения по результатам неточных измерений $x(\tau_i)$. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x(\tau_i)$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) некоторую функцию $u^h = u^h(\cdot)$, являющуюся приближением (в метрике пространства $L_2(T;\mathbb{R}^r)$) возмущения $u(\cdot)$. Эта функция, как будет видно из описания алгоритма восстановления, трактуется в качестве управления некоторой подходящим образом подобранной вспомогательной системой.

Сформулированная выше задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Такого типа задачи в последние годы вызывают пристальное внимание (см., например, [1]–[4]). Один из подходов к их решению развит в исследованиях [5]–[11]. Подход основан на комбинации методов теории позиционного управления [12] и некорректных задач [1]–[4]. В случае, когда возмущение $u(\cdot)$ стеснено мгновенными ограничениями и измеряются все фазовые координаты системы (1.1), обсуждаемая задача может быть решена на основе конструкций работ [5], [6]. В данной статье мы рассмотрим случай измерения части координат. Кроме того, будем полагать отсутствие мгновенных ограничений. Вследствие этого будем считать, что неизвестное возмущение может быть неограниченным, являясь функцией суммируемой с квадратом евклидовой нормы. Мы укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. В связи с неполнотой информации (а именно, с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_i), y(\tau_i)\}$, а лишь его части – $x(\tau_i)$), алгоритм будет содержать два блока. Первый (вспомогательный) блок будет использоваться для восстановления неизвестной координаты. Он будет играть роль поставщика недостающей информации о текущем фазовом состоянии системы (1.1). Эта информация будет оперативно передаваться на второй (основной) блок, формирующий приближение неизвестного возмущения по закону обратной связи.

Другие задачи динамического восстановления, методы решения которых основаны на соответствующих модификациях метода экстремального сдвига, обсуждались, например, в работах [7]–[11]. При этом в работах [7], [8] рассматривался случай измерения "всех" координат. Случай измерения части фазовых координат обсуждался в работе [9] (линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений), [10] (система с последействием), [11] (система с распределенными параметрами.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перейдем к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Как было отмечено выше, метод основан на конструкциях теории управления с обратной связью. При этом задача динамической реконструкции заменяется задачей позиционного управления некоторой подходящим образом подобранной динамической системой. В нашем случае последняя задача состоит из двух блоков управления системами различной структуры.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1). \tag{2.1}$$

Первый (вспомогательный) блок содержит управляемую систему и закон формирования управления $v^h(\cdot)$ этой системой по принципу обратной связи V. Динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_1^h(t) = v^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T, \quad w_1^h, v^h \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

с начальным условием $w_1^h(0) = x_0$. Здесь управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле

$$v^h(t) = v_i^h = V(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2.3}$$

ξ_i^h – результат измерения компоненты $x(\tau_i)$ (см. (1.2)). При $i = 0$ полагаем $\xi_0^h = x_0$. Закон $V(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $v^h(\cdot)$, стоящее в правой части системы (2.2), позволяет с помощью некоторого отображения $U_1 : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ сконструировать функцию $u_1^h(\cdot)$,

$$u_1^h(t) = u_{1i}^h = U_1(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2.4}$$

являющуюся приближением (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемой части фазовой траектории $y(\cdot)$.

Второй (основной) блок – блок динамической реконструкции неизвестного возмущения – состоит из управляемой системы

$$\dot{w}_2^h(t) = f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u_{1i}^h) + Bu_i^h \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2.5}$$

с начальным состоянием $w_2^h(0) = y_0$ и закона $U(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^r$ формирования управления $u^h(\cdot)$ этой системой. Закон U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров управление $u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, u_{1i}^h, w_2^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2.6}$$

аппроксимирует неизвестный вход.

Следует отметить, что одно и то же решение системы (1.1) может вызываться не единственным возмущением. Пусть $U(z(\cdot))$ – множество всех возмущений из $L_2(T;\mathbb{R}^r)$, порождающих решение $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы (1.1), т.е.

$$U(z(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^r) : \dot{y}(t) - f_{21}(t, x(t), y(t)) = B\tilde{u}(t) \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $U(z(\cdot))$, порождающее решение $z(\cdot)$ системы (1.1), т.е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in U(z(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [1]–[4], мы будем восстанавливать $u_*(\cdot)$.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Возьмем некоторые семейство Δ_h (2.1), а также две функции $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$ и $\alpha_1(h) : (0,1) \to (0.1)$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ область, в которой остаются первые n фазовых координат решения системы (1.1), порожденного неизвестным возмущением $u(\cdot)$, т.е.

$$x(t) \in M \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

В дальнейшем полагаем, что выполнено следующее условие.

Условие 1. В области $T \times M$ функция $y \to F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой функцией по совокупности переменных с постоянной Липшица L_y. Кроме того, функция f_1 имеет производные по каждому аргументу, и справедливо включение $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$, числа $\alpha_1 = \alpha_1(h), \alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (2.1). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются векторы v_i^h, u_{1i}^h и u_i^h по формулам (2.3), (2.4), (2.6), в которых

$$\begin{gathered} V(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) = -\alpha_1^{-1}[w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h + \tau_i f_1(0, x_0, y_0)], \\ U_1(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h) = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h + f_1(0, x_0, y_0)), \\ U(\tau_i, u_{1i}^h, w_2^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1}B'(w_2^h(\tau_i) - u_{1i}^h). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь штрих означает транспонирование. Затем на вход системы (2.2) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $v^h(t)$ вида (2.3), (3.1), а на вход системы (2.5) – управление $u^h(t)$ вида (2.6), (3.1). Под действием этих управлений решение системы (2.2) переходит из состояния $w_1^h(\tau_i)$ в состояние $w_1^h(\tau_{i+1})$, а решение системы (2.5) – из состояния $w_2^h(\tau_i)$ в состояние $w_2^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Оказывается, что при определенном согласовании величин $h, \delta(h), \alpha(h)$ и $\alpha_1(h)$ функция $u^h(\cdot)$ является аппроксимацией $u(\cdot)$. Прежде, чем перейти к доказательству этого факта приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (см. [6, с. 29]). *Пусть* $x_1(\cdot) \in L_\infty(T_*;\mathbb{R}^n)$, $y_1(\cdot) \in W(T_*;\mathbb{R}^n)$, $T_* = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left|\int_a^t x_1(\tau)d\tau\right|_n \le \varepsilon, \quad |y_1(t)|_n \le K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ *верно неравенство*

$$\left|\int_a^t (x_1(\tau), y_1(\tau))d\tau\right| \le \varepsilon(K + \operatorname{var}(T_*; y_1(\cdot))).$$

Здесь символ $\operatorname{var}(T_*; y_1(\cdot))$ означает вариацию функции $y_1(\cdot)$ на отрезке T_*, символ $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве, символ $|\cdot|$ – модуль числа, а символ $W(T_*; R^n)$ – множество функций $y(\cdot) : T_* \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Лемма 2. *Пусть неотрицательная функция* $\phi(\cdot)$ *при всех* $i \in [0 : m-1]$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\phi(\tau_{i+1}) \le \phi(\tau_i)(1 + p\delta) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |G(\tau)|d\tau,$$

где $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $p = \text{const} > 0$, $G(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R})$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\phi(\tau_i) \le \left(\phi(0) + \int_0^{\tau_i} |G(\tau)|d\tau\right)\exp(p\tau_i).$$

Заметим, что встречающиеся в настоящей работе постоянные $c_j, C_j, k_j, k^{(j)}$ зависят от структуры системы (1.1) и не зависят от $h, \alpha, \alpha_1, \delta, \nu$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha_1(h) \to 0$, $\delta(h) \to 0$, $(h + \delta(h))\alpha_1^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда можно указать такое число* $h_0 \in (0,1)$, *что при всех* $h \in (0, h_0)$ *верно неравенство*

$$\sup_{t\in T} |u_1^h(t) - y(t)|_N \le C_0\nu(h, \alpha_1(h), \delta(h)),$$

где $\nu(h, \alpha_1, \delta) = \alpha_1 + (h + \delta)\alpha_1^{-1}$.

Доказательство. Пусть

$$\dot{X}(t) = \dot{x}(t) - f_1(0, x_0, y_0), \quad X(0) = x_0. \tag{3.2}$$

Функция, стоящая в правой части (3.2), является дифференцируемой, ее производная суммируема с квадратом евклидовой нормы. В нуле эта функция обращается в ноль. Кроме того,

$$X(\tau_i) = x(\tau_i) - \tau_i f_1(0, x_0, y_0).$$

Анализ доказательства теоремы 5 из работы [14] позволяет сделать вывод, что эта теорема будет справедлива, если вместо условия $\ddot{x}(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$, $\sup_{t\in T} |\ddot{x}(t)|_n \le d^*$, выполняется условие $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n)$, $|\ddot{x}(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} \le d^*$. В таком случае найдется $h^{(1)} \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h^{(1)})$

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |v^h(t) - \dot{X}(t)|_n \le c_1\nu(h, \alpha_1(h), \delta(h)).$$

В силу условия 1 получаем

$$y(t) = f_{1y}^{-1}(t, x(t), \dot{x}(t)), \tag{3.3}$$

$$|f_{1y}^{-1}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - f_{1y}^{-1}(t, x(t), \dot{x}(t))|_N \le L_y c_1 \nu(h, \alpha_1(h), \delta(h)). \tag{3.4}$$

Заметим, что

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |\dot{x}(t)|_n \le c_2 < +\infty.$$

В таком случае, при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ получаем

$$\begin{gathered}\left|f_{1y}^{-1}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - u_1^h(t)\right|_N \le \\ \le L_y\left(|t - \tau_i| + \left|x(\tau_i) - \xi_i^h\right|_n + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_n dt) \le c_3(h + \delta(h)\right).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Утверждение леммы следует в силу равенства $u_{1i}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h + f_1(0, x_0, y_0))$ из (3.3)–(3.5). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Пусть также* $\alpha(h) \to 0$, $\delta(h)\alpha^{-4}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда можно указать такое* $h_1 \in (0, h_0)$, *что при всех* $h \in (0, h_1)$, $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon_*(t) \le C_1\rho_1(\alpha, \delta, h, \nu), \tag{3.6}$$

$$\int_0^\vartheta |u^h(\tau)|_r^2 d\tau \le (1 + C_2\alpha)\int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2 d\tau + C_3\rho(\alpha, \delta, h, \nu)\alpha^{-1}, \tag{3.7}$$

где $\varepsilon_*(t) = 0.5|w_2^h(t) - y(t)|_N^2$, $\nu = \nu(h, \alpha_1, \delta)$, $\rho_1(\alpha, \delta, h, \nu) = \rho(\alpha, \delta, h, \nu) + \alpha + \delta$, $\rho(\alpha, \delta, h, \nu) = \alpha^4\delta +$ $+ \alpha^4 h^2\delta^{-1} + \nu^2\delta^{-1/2}$.

Доказательство. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_*(t)$ при $t \in T$. Для $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$ имеем

$$\varepsilon_*(t) = 0.5\left|w_2^h(\tau_i) - y(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \{f^i(\tau) + B^i(\tau)\}d\tau\right|_N^2,$$

где $m = m_h$, $\tau_i = \tau_{h,i}$,

$$f^i(t) = f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u_{1i}^h) - f_{21}(t, x(t), y(t)), \quad B^i(t) = B(u_i^h - u(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

В таком случае при $t \in \delta_i$ справедливо равенство

$$\varepsilon_*(t) = \varepsilon_*(\tau_i) + \sum_{j=1}^{\zeta} \nu_i^{(j)}(t).$$

Здесь

$$\nu_i^{(1)}(t) = \left(w_2^h(\tau_i) - y(\tau_i), \int_{\tau_i}^{t} f^i(\tau)d\tau \right), \quad \nu_i^{(2)}(t) = 0.5 \left| \int_{\tau_i}^{t} f^i(\tau)d\tau \right|_N^2,$$

$$\nu_i^{(3)}(t) = \left(w_2^h(\tau_i) - y(\tau_i), \int_{\tau_i}^{t} B^i(\tau)d\tau \right),$$

$$\nu_i^{(4)}(t) = \left(\int_{\tau_i}^{t} f^i(\tau)d\tau, \int_{\tau_i}^{t} B^i(\tau)d\tau \right), \quad \nu_i^{(5)}(t) = 0.5 \left| \int_{\tau_i}^{t} B^i(\tau)d\tau \right|_N^2, \quad t \in \delta_i.$$

Всюду в доказательстве этой леммы $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, $\nu = \nu(h, \alpha_1(h), \delta(h))$. Нетрудно видеть, что при всех i верны неравенства (см. лемму 3)

$$\left| u_i^h \right|_r = \left| \frac{B'(u_{1i}^h - w_2^h(\tau_i))}{\alpha} \right|_r \le \frac{b_*}{\alpha} Q_i, \tag{3.8}$$

где

$$Q_i = \nu + (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2},$$

b_* – евклидова норма матрицы B. Заметим, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верна оценка

$$|f^i(t)|_N \le L\{\delta + h + \nu + |x(t) - x(\tau_i)|_n + |y(t) - y(\tau_i)|_N\} \le LQ_t^{(i)}. \tag{3.9}$$

Здесь

$$Q_t^{(i)} = \delta + h + \nu + \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{x}(\tau)|_n + |\dot{y}(\tau)|_N\} d\tau.$$

В свою очередь из соотношения (3.9) следует неравенство

$$\nu_i^{(1)}(t) \le L(2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} \delta Q_t^{(i)} \le \frac{\delta^{3/2}}{8\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i) + k_0 \alpha^2 \delta^{1/2} (Q_t^{(i)})^2, \quad t \in \delta_i. \tag{3.10}$$

Пусть

$$U_{ip}(t) = \int_{\tau_i}^{t} |u(\tau)|_r^p d\tau, \quad p = 1, 2.$$

Из условия $\delta(h)\alpha^{-4}(h) \to 0$ при $h \to 0$ имеем

$$\nu_i^{(2)}(t) \le k_1 \delta^2 (Q_t^{(i)})^2 \le k_2 \alpha^2 \delta^{1/2} (Q_t^{(i)})^2, \quad t \in \delta_i. \tag{3.11}$$

Также верно неравенство

$$\left| \int_{\tau_i}^{t} B^i(\tau)d\tau \right|_N \le b_* \left\{ U_{i1}(t) + \delta \left| u_i^h \right|_N \right\} \le b_* \{ b_* \delta \alpha^{-1} Q_i + U_{i1}(t) \}, \quad t \in \delta_i. \tag{3.12}$$

В силу (3.8) и (3.12) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \nu_i^{(3)}(t) &\le \int_{\tau_i}^{t} (w_2^h(\tau_i) - u_{1i}^h, B^i(\tau))d\tau + \nu b_* \{ b_* \delta \alpha^{-1} (\nu + (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2}) + U_{1i}(t) \} \le \\ &\le \int_{\tau_i}^{t} (w_2^h(\tau_i) - u_{1i}^h, B^i(\tau))d\tau + k_3 \nu^2 \delta^{1/2} + \nu b_* U_{i1}(t) + \frac{\delta^{3/2}}{2\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ввиду условия $\delta(h)\alpha^{-4}(h) \to 0$ при $h \to 0$ из двух последних неравенств следует существование такого $h_* \in (0, h_0)$, что при всех $h \in (0, h_*)$ получаем

$$\nu_i^{(4)}(t) \le \frac{\delta^{3/2}}{8\alpha^2}\varepsilon_*(\tau_i) + k_5\delta\{h^2 + \nu^2 + \delta^2 + \delta U_{i2}(t) + \delta Q_{i,t}\}, \tag{3.14}$$

$$\nu_i^{(5)}(t) \le 0,5b_*^2\left(U_{i1}(t) + \delta b_*\frac{Q_i}{\alpha}\right)^2 \le \frac{\delta^{3/2}}{8\alpha^2}\varepsilon_*(\tau_i) + k_6(\nu^2\delta + \delta U_{i2}(t)); \tag{3.15}$$

здесь

$$Q_{i,t} = \int_{\tau_i}^{t}\{|\dot{x}(\tau)|_n^2 + |\dot{y}(\tau)|_N^2\}d\tau.$$

Введем величину

$$\mu(t) = 2\varepsilon_*(t) + \alpha\int_0^t\left\{|u^h(\tau)|_r^2 - |u(\tau)|_r^2\right\}d\tau.$$

Объединяя соотношения (3.10), (3.11), (3.13)–(3.15) и учитывая неравенство

$$(Q_t^{(i)})^2 \le k_4\{h^2 + \delta^2 + \nu^2 + \delta Q_{i,t}\},$$

получаем

$$\begin{aligned}\mu(t) \le \mu(\tau_i) + k_7\delta U_{i2}(t) + k_8\phi + \frac{\delta^{3/2}}{\alpha^2}\varepsilon_*(\tau_i) + b_*\nu U_{i1}(t) + k_9\alpha^2\delta^{3/2}Q_{i,t} + \\ + \alpha\int_{\tau_i}^{t}\left\{\left|u_i^h\right|_r^2 - |u(\tau)|_r^2\right\}d\tau + 2\int_{\tau_i}^{t}(w_2^h(\tau_i) - u_{1i}^h, B^i(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\phi = \phi(\alpha, \delta, \nu, h) = \alpha^4(h^2 + \delta^2) + \nu^2\delta^{1/2}.$$

Заметим, что ввиду правила определения управления u_i^h (см. (2.6), (3.1)), сумма двух последних слагаемых в правой части неравенства (3.16) неположительна. Кроме того,

$$\nu U_{i1}(t) \le \delta^{1/2}\nu^2 + \delta^{1/2}U_{2i}(t).$$

В таком случае в силу (3.16) заключаем, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеет место неравенство

$$\mu(t) \le \mu(\tau_i) + \frac{\delta^{3/2}}{\alpha^2}\varepsilon_*(\tau_i) + k_{10}\phi + k_{11}\delta^{1/2}U_{i2}(t) + k_9\alpha^2\delta^{3/2}Q_{i,t}. \tag{3.17}$$

Пусть

$$\gamma_*(t) = 2\varepsilon_*(t) + \alpha\int_0^t|u^h(\tau)|_r^2 d\tau.$$

Из (3.17) получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценку

$$\gamma_*(t) \le \left\{1 + \frac{\delta^{3/2}}{\alpha^2}\right\}\gamma_*(\tau_i) + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2})U_{i2}(t) + k_{10}\phi + k_9\delta^{3/2}\alpha^2 Q_{i,t}. \tag{3.18}$$

В силу леммы 2 из (3.18) выводим

$$\begin{aligned}\gamma_*(\tau_{i+1}) \le [\gamma_*(0) + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2})U^{(i+1)} + \\ + k_{12}\rho + \delta^{3/2}\alpha^2\int_0^{\tau_{i+1}}\{|\dot{x}(\tau)|_n^2 + |\dot{y}(\tau)|_N^2\}d\tau]\exp\left\{\frac{\delta^{1/2}}{\alpha^2}\tau_{i+1}\right\}, \quad i \in [0 : m-1].\end{aligned}$$

Здесь

$$\rho = \rho(\alpha, \delta, h, \nu), \quad U^{(i+1)} = \int_0^{\tau_{i+1}}|u(\tau)|_r^2 d\tau.$$

Заметим, что

$$\int_0^{\vartheta}\{|\dot{x}(\tau)|_n^2 + |\dot{y}(\tau)|_N^2\}d\tau \le k_{13}. \tag{3.19}$$

Следовательно,

$$\gamma_*(\tau_i) \le [\gamma_*(0) + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2})U^{(i)} + k_{14}\rho]\exp\left\{\frac{\delta^{1/2}}{\alpha^2}\tau_i\right\}.$$

Далее, из последнего неравенства, учитывая тот факт, что $\gamma_*(0) = 0$, получаем

$$\gamma_*(\tau_i) \le [k_{14}\rho + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2}U^{(i)}]\exp\left\{\frac{\delta^{1/2}}{\alpha^2}\tau_i\right\}. \tag{3.20}$$

В силу условия $\delta(h)\alpha^{-4}(h) \to 0$ при $h \to 0$ найдется такое число $h^* \in (0, h_*)$, что при всех $h \in (0, h^*)$ справедливо неравенство

$$\exp\{\vartheta\delta^{1/2}\alpha^{-2}\} \le 1 + k_{15}\delta^{1/2}\alpha^{-2}. \tag{3.21}$$

В таком случае, учитывая последнее неравенство, из (3.20) выводим оценку, справедливую при всех $h \in (0, h^*)$, $i \in [0 : m]$

$$2\varepsilon_*(\tau_i) \le \gamma_*(\tau_i) \le k_{16}\rho + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2})(1 + k_{15}\delta^{1/2}\alpha^{-2})U^{(i)}. \tag{3.22}$$

В свою очередь из (3.20), учитывая (3.21), получаем

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau_i} |u^h(\tau)|_r^2 d\tau \le (1 + k_{11}\delta^{1/2}\alpha^{-1})(1 + k_{15}\delta^{1/2}\alpha^{-2})U^{(i)} + k_{16}\rho\alpha^{-1} \le \\ \le (1 + k_{17}\alpha)U^{(i)} + k_{16}\rho\alpha^{-1}, \quad i \in [0 : m], \quad h \in (0, h^*).\end{gathered} \tag{3.23}$$

Положив $i = m$, получим неравенство (3.7). Проверим неравенство (3.6). При $t \in [\tau_i; \tau_{i+1}]$верна оценка

$$(2\varepsilon_*(t))^{1/2} \le (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} + I_{t,i} + \left|\int_{\tau_i}^{t} B\{u_i^h - u(\tau)\}d\tau\right|_N, \tag{3.24}$$

где (см. (3.9))

$$I_{t,i} = \int_{\tau_i}^{t} |f_2(\tau, x(\tau), y(\tau)) - f_2(\tau_i, \xi_i^h, u_{1i}^h)|_n d\tau \le \delta L\{h + \delta + \nu + \int_{\tau_i}^{t}\{|\dot{x}(\tau)|_n + |\dot{y}(\tau)|_N\}d\tau\}. \tag{3.25}$$

Поэтому из (3.24), воспользовавшись неравенствами (3.19), (3.25), а также неравенством

$$\max_{i\in[0:m-1]} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |Bu(t)|_N dt \le k_{18}\delta^{1/2},$$

получаем

$$(2\varepsilon_*(t))^{1/2} \le (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} + k_{19}\{\delta(h + \nu) + \delta|u_i^h|_r + \delta^{1/2}\}.$$

Таким образом,

$$2\varepsilon_*(t) \le k_{20}\left\{2\varepsilon_*(\tau_i) + \delta + \delta^2\left|u_i^h\right|_r^2 + \delta^2(h^2 + \nu^2)\right\}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \tag{3.26}$$

Далее, в силу (3.8) имеем

$$\delta^2\left|u_i^h\right|_r^2 \le 2b_*^2\delta^2\alpha^{-2}(\nu^2 + 2\varepsilon_*(\tau_i)) \le k_{21}(\delta\nu^2 + \varepsilon_*(\tau_i)). \tag{3.27}$$

Значит, вввиду (3.26), (3.27) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо неравенство

$$2\varepsilon_*(t) \le k_{22}\{\varepsilon_*(\tau_i) + \delta + \delta\nu^2\}.$$

Отсюда и из (3.22) получаем

$$2\varepsilon_*(t) \le k_{23}\left[\rho + \delta + \delta\nu^2 + (\alpha + k_{11}\delta^{1/2})(1 + k_{15}\delta\alpha^{-2})\int_0^t |u(\tau)|_r^2 d\tau\right] \le k_{24}\rho_1(\alpha, \delta, h, \nu), \quad t \in T.$$

Неравенство (3.6) следует из последнего неравенства. Лемма доказана.

С помощью леммы 4 стандартным образом (см., например, [6]) может быть доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Пусть также*

$$\rho_1(\alpha(h),\delta(h),h,\nu(h,\alpha_1(h),\delta(h)))\to 0,\quad \nu(h,\alpha_1(h),\delta(h))\to 0,$$

$$\rho(\alpha(h),\delta(h),h,\nu(h,\alpha_1(h),\delta(h)))\alpha^{-1}(h)\to 0\quad \textit{при}\quad h\to 0.$$

Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot)\to u_*(\cdot)\quad \textit{при}\quad h\to 0.$$

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости алгоритма.

Лемма 5. *Пусть* $u(\cdot)$ – *функция ограниченной вариации,* $N\ge r$, $\operatorname{rank}B=r$. *Пусть также выполнены условия леммы* 4. *Тогда при всех* $h\in(0,h_1)$ *верно неравенство*

$$\int_0^{\vartheta}|u^h(\tau)-u(\tau)|_r^2d\tau\le C_4\rho_0(\alpha,\delta,h,\nu)+C_3\rho(\alpha,\delta,h,\nu)\alpha^{-1},$$

где $\rho_0(\alpha,\delta,h,\nu)=\alpha^{1/2}+\delta^{1/2}+h\delta^{-1/2}\alpha^2+\nu\delta^{-1/4}$.

Доказательство. Учитывая липшицевость функции f_{21}, а также лемму 3, заключаем, что для любых $t_1,t_2\in T$, $t_1<t_2$, справедливо неравенство

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}B\{u^h(t)-u(t)\}dt\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}[\dot w_2^h(\tau)-\dot y(\tau)-f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),u_1^h(\tau))+f_{21}(\tau,x(\tau),y(\tau))]d\tau\right|\le$$

$$\le|\mu_h(t_2)-\mu_h(t_1)|_N+k^{(1)}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left|\xi^h(\tau)-x(\tau)\right|_n+\left|u_1^h(\tau)-y(\tau)\right|_N\right\}d\tau+\delta\right\}\le$$

$$\le|\mu_h(t_2)-\mu_h(t_1)|_N+k^{(2)}\int_{t_1}^{t_2}\{|\mu_h(\tau)|_N+h+\delta+\nu\}d\tau,$$

где $\nu=\nu(h,\alpha_1,\delta)$, $\mu_h(t)=w_2^h(t)-y(t)$, $f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),u_1^h(\tau))=f_{21}(\tau_i,\xi_i^h,u_{1i}^h)$, $\xi^h(\tau)=\xi_i^h$ при п.в. $\tau\in[\tau_i,\tau_{i+1})$. Кроме того, в силу леммы 4 (см. (3.6))

$$|\mu_h(t)|_N=(2\varepsilon_*(t))^{1/2}\le C_1^{1/2}\rho_1^{1/2}(\alpha,\delta,h,\nu).$$

Отсюда выводим

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\{u^h(t)-u(t)\}dt\right|_r\le k^{(3)}\left|\int_{t_1}^{t_2}B\{u^h(t)-u(t)\}dt\right|_N\le k^{(4)}\{\rho_1^{1/2}(\alpha,\delta,h,\nu)+h+\delta+\nu\}\le k^{(5)}\rho_0(\alpha,\delta,h,\nu).\tag{4.1}$$

Снова воспользовавшись леммой 4 (см.(3.7)), получаем

$$\int_0^{\vartheta}|u^h(\tau)-u(\tau)|_r^2d\tau=\int_0^{\vartheta}|u^h(\tau)|_r^2d\tau-2\int_0^{\vartheta}(u^h(\tau),u(\tau))d\tau+\int_0^{\vartheta}|u(\tau)|_r^2d\tau\le$$

$$+(2+C_2\alpha)\int_0^{\vartheta}|u(\tau)|_r^2d\tau-2\int_0^{\vartheta}(u^h(\tau),u(\tau))d\tau+C_3\rho(\alpha,\delta,h,\nu)\alpha^{-1}=$$

$$=2\int_0^{\vartheta}(u(\tau)-u^h(\tau),u(\tau))d\tau+C_2\alpha\int_0^{\vartheta}|u(\tau)|_r^2d\tau+C_3\rho(\alpha,\delta,h,\nu)\alpha^{-1},\quad t\in T.$$

В силу леммы 1, учитывая (4.1), получаем

$$\sup_{t\in T}\left|\int_0^t(u(\tau)-u^h(\tau),u(\tau))d\tau\right|\le k^{(6)}\rho_0(\alpha,\delta,h,\nu).$$

Таким образом при всех $h \in (0, h_1), t \in T$ верно неравенство

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u(\tau)|_N^2 d\tau \le 2k^{(6)}\rho_0(\alpha, \delta, h, \nu) + C_3\rho(\alpha, \delta, h, \nu)\alpha^{-1}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что справедлива

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Пусть также* $\varepsilon \in (0, 1/4)$. *Если* $\delta(h) = h$, $\alpha_1(h) = \delta^{1/2}(h)$, $\alpha(h) = \delta^{1/4-\varepsilon}(h)$, *то можно указать такое число* $h_2 \in (0, h_1)$, *что при всех* $h \in (0, h_2)$ *справедливы неравенства*

$$\rho(\alpha(h), \alpha_1(h), \delta(h), h, \nu(h))\alpha^{-1}(h) \le C_5 h^{1/4+\varepsilon},$$
$$\rho_1(\alpha(h), \alpha_1(h), \delta(h), h, \nu(h)) \le C_6 h^{1/4-\varepsilon}.$$

Здесь $\nu(h) = \nu(h, \alpha_1(h), \delta(h))$.

В таком случае из лемм 4 и 6 вытекает

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(t) - u(t)|_N^2 dt \le C_7 h^{1/8-\varepsilon/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск. Наука, 1980.
3. *Banks H.T., Kunisch K.* Estimation techniques for distributed parameter systems. Boston, Birkhäuser, 1989.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
6. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
7. *Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.* On rough inversuion of a dynamical system with disturbance // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16. 4. P. 1–14.
8. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 1. С. 88–100.
9. *Maksimov V.I.* On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. V. 26. 3. P. 395–410.
10. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 109–122.
11. *Каппель Ф., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. АН. 2000. Т. 370. № 5. С. 599–601.
12. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974.
13. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. матем. и механ. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.
14. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции заданной неточно с помощью законов обратной связи // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.