ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1846–1855

УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕВЯЗКИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

 П. Г. Сурков

(620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Ин-т матем. и механ. УрО РАН;
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19, Уральский федеральный ун-т, Россия)

e-mail: spg@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 15.05.2019 г.
Переработанный вариант 15.05.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

Для системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка рассматривается задача реконструкции неизвестного входного воздействия. Предлагается алгоритм ее решения, устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений, в основе которого лежат методы регуляризации и конструкции теории динамического обращения. Динамическая реконструкция входного воздействия проводится с использованием метода невязки, не предусматривающего введение вспомогательных систем-моделей. Библ. 20.

Ключевые слова: системы дробного порядка, реконструкция, входное воздействие, оценка погрешности.

DOI: 10.1134/S0044466919110127

1. ВВЕДЕНИЕ

Во время функционирования различных механизмов или развития процессов для наблюдателя в большинстве случаев доступны не все параметры и характеристики рассматриваемого объекта. Поэтому часто возникает необходимость восстановления или реконструкции необходимой информации по данным, полученным в результате измерений. Эта проблематика широко представлена в исследованиях, связанных с математическим моделированием в информационных технологиях (восстановление изображений), экологии (загрязнение окружающей среды), медицине (вирусные заболевания и их лечение) и других областях. Существует несколько различных подходов к решению задач реконструкции неизвестного управляющего воздействия (возмущения), мы же будем использовать методику обратных задач динамики управляемых систем [1, с. 27]. Теоретическая база одного из методов, обеспечивающих в “реальном времени” динамическую реконструкцию входного воздействия на систему, заложена в работах [2]–[6]. Его суть заключается в построении специального алгоритма управления по принципу обратной связи. Согласно этому алгоритму управляющее воздействие выбирается из некоторого заданного множества по результатам неточных измерений положений системы. В большинстве работ по данной тематике решение задач динамической реконструкции основывается на методе локальной регуляризации экстремального сдвига с использованием сглаживающего функционала [1]. В данном случае возникает необходимость введения дополнительной системы – модели. Этого не происходит, если применять динамический метод невязки, который был предложен в статье [7] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии ограничений на входное воздействие в виде выпуклого компакта и модифицирован в [8] – в случае их отсутствия (см. также [4]). Для систем с распределенными параметрами динамический метод невязки был развит в [3], [9], [10].

В настоящей работе мы модифицируем указанный метод для нелинейной системы, принадлежащей более общему классу, а именно, классу дифференциальных уравнений нецелого порядка. В последнее время исследования многих авторов посвящены различным аспектам дробного анализа (см. [11]–[14] и библиографию в них). Этот интерес вызван не только сложными теоретическими проблемами, но и прикладными задачами, построением моделей систем, имеющих самоподобную, пористую структуру, а также наследственные свойства, память. Примеры таких исследований отражены в работах [12], [15]–[17].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для удобства чтения приведем необходимые определения из дробного анализа.

Определение 1 (см. [11, с. 42]). Интеграл дробного порядка γ с началом в точке σ от произвольной функции $f \in L_1(T,\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$[I^\gamma f](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_\sigma^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\gamma}}ds, \quad \gamma \in (0,1), \quad t \in T = [\sigma,\theta], \quad \theta < +\infty.$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{z-1}d\tau, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Определение 2 (см. [11], [12]). Для функции $x \in AC(T,\mathbb{R}^n)$ и произвольного действительного $\gamma \in (0,1)$ выражения

$$[D^\gamma x](t) = \frac{d}{dt}\int_\sigma^t \frac{x(s)}{(t-s)^\gamma}ds = \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}x](t),$$

$$[{}^C D^\gamma x](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_\sigma^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^\gamma}ds = [I^{1-\gamma}\dot{x}](t),$$

называются дробными производными Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто соответственно. Здесь $\dot{x}(t) = dx/dt$.

Замечание 1. Обозначения для дробных интегралов и производных используются в несколько сокращенном виде I^γ, D^γ, ${}^C D^\gamma$ вместо $I^\gamma_{\sigma+}$, $D^\gamma_{\sigma+}$ и ${}^C D^\gamma_{\sigma+}$ соответственно ввиду того, что на протяжении всей работы мы рассматриваем только левосторонние интегралы и производные, и начальный момент у них не меняется и всегда остается равен σ.

Перейдем к постановке задачи. Рассматривается система, описываемая нелинейным векторным дифференциальным уравнением:

$$[{}^C D^\gamma x](t) = g(t,x) + Bu(t), \quad t \in T = [\sigma,\theta], \quad 0 < \gamma < 1, \tag{1}$$

$$x(\sigma) = x_\sigma, \tag{2}$$

где фазовый вектор системы $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, E – известное ограниченное множество, начальное состояние $x_\sigma \in \mathbb{R}^n$ фиксировано и задано, B – постоянная $n \times m$ матрица, g: $T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция по t, удовлетворяющая условию Липшица с константой $L > 0$ по совокупности переменных, т.е. при любых (t_1,x_1), $(t_2,x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\max\{|g(t_1,x_1) - g(t_2,y_2)|_n\} \le L(|x_1 - x_2|_n + |t_1 - t_2|). \tag{3}$$

Здесь и далее символом $|\cdot|_n = \|\cdot\|_n$ обозначается норма вектора в евклидовом пространстве. Траектория системы $x(t)$ заранее неизвестна и определяется некоторым управлением $u(\cdot)$, которое также не задано, но подчинено априорному ограничению $u(t) \in P$, $t \in T$, P – заданное выпуклое ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$.

В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, координаты $x(\tau_i)$ измеряются с некоторой погрешностью $h \in (0,1)$. Результаты измерения $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\left|x(\tau_i) - \xi_i^h\right|_n \le h. \tag{4}$$

Требуется найти управление $u(\cdot)$, порождающее $x(\cdot)$: $u(\cdot) = u(\cdot;x(\cdot))$. Следует заметить, что одно и то же конкретное решение системы (1) может определяться разными управлениями. Данный факт при наличии погрешности h приводит к невозможности точного восстановления $u(\cdot)$, поэтому необходимо построить алгоритм вычисления некоторого приближения $u(\cdot)$. Это приближение должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности измерения $x(\tau_i)$ и чем мельче сетка разбиения отрезка T с узлами τ_i.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Прежде, чем перейти к описанию алгоритма, приведем некоторые вспомогательные конструкции.

Определение 3 (см. [11, определение 2.3]). Через $I^{\gamma}(L_{\infty}(T,\mathbb{R}^n))$ обозначим класс функций x: $T \to \mathbb{R}^n$, представимых дробным интегралом порядка $\gamma \in (0,1)$ от суммируемой функции: $x(t) = [I^{\gamma}\varphi](t)$, $t \in T$, $\varphi \in L_{\infty}(T,\mathbb{R}^n)$.

Определение 4 (см. [18]). Функцию x: $T \to \mathbb{R}^n$ будем называть решением задачи Коши (1), (2), если $x(\cdot) \in \{x_{\sigma}\} + I^{\gamma}(L_{\infty}(T,\mathbb{R}^n))$ и равенство (1) выполнено для п.в. $t \in T$.

Будем использовать формулы приближения дробных производных прямоугольниками [13, с. 49]:

$$[{}^C D^{\gamma} z](\tau_i) = \frac{1}{\delta^{\gamma}}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(z(\tau_k) - z(\tau_{k-1})) + R_i, \quad i \in [1,\kappa], \tag{5}$$

где $b_j = ((j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma})/\Gamma(2-\gamma)$, $j \in [0, i-1]$, $R_i = O(\delta^{2-\gamma})$, символом $O(\alpha)$ обозначаются функции, допускающие оценки $O(\alpha) \le K\alpha$, K – положительное число. Если $z \in C^2(T,\mathbb{R})$, то из [13, теорема 3] следует оценка

$$|R_i| = \left|\int_{\sigma}^{\tau_i} \frac{\dot{z}(s)}{(\tau_i - s)^{\gamma}}ds - \frac{1}{\delta^{\gamma}}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(z(\tau_k) - z(\tau_{k-1}))\right| \le C\delta^{2-\gamma}\max_{t\in T}|\ddot{z}(t)|, \tag{6}$$

в которой постоянная C зависит только от γ.

Введем множество всех допустимых управлений задачи (1), (2), порождающих одну и ту же траекторию $x(t)$, $t \in T$:

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in K_p [{}^C D^{\gamma} x](t) = g(t, x(t)) + Bu(t) \text{ при п.в. } t \in T\}, \tag{7}$$

где $K_p = \{u(\cdot) \in L_2(T,\mathbb{R}^n) u(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$.

Замечание 2. Из свойств множества P следует, что $U(x(\cdot))$ – выпукло ограничено и замкнуто.

Алгоритм решения поставленной задачи разделяется на два этапа: подготовительный (до начала функционирования системы) и динамический (одновременно с системой). На первом этапе фиксируется равномерное разбиение Δ отрезка T контрольными моментами времени τ_i, в которые будут проводиться замеры положений системы:

$$\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{\kappa}, \quad \tau_0 = \sigma, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_{\kappa} = \theta, \quad \delta = \frac{\theta - \sigma}{\kappa}.$$

Рассматривается следующее семейство множеств:

$$\Omega_i^h = \left\{ v \in P: \left| Bv + g(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta^{\gamma}}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1}) \right|_n \le \beta_h \right\}, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} \beta_h = d_1\frac{h}{\delta} + d_2 h + d_3\delta^{\gamma}, \quad d_1 = \frac{2(\theta - \sigma)^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}, \quad d_2 = L, \\ d_3 = C\max_{t\in T, x\in E}\left|[I^{\gamma-2} g(\cdot, x)](t)\right| + L + M_0 L. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда в качестве множества приближений управляющих воздействий примем

$$V^h = \{v(\cdot) \in K_p: v(t) = v_i \text{ при п.в. } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\ v_i \in \Omega_i^h,\ i \in [1,\kappa]\}.$$

На втором этапе работа алгоритма представляет собой $\kappa - 1$ однотипный шаг. В течение i-го шага, выполняемого на промежутке времени $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, определяется приближение управления по формуле

$$v^h(t) = v_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i \in [1, \kappa], \tag{10}$$

где v_i^h – нормальный (следуя терминологии некорректных задач) элемент множества Ω_i^h, который выбирается по правилу

$$v_i^h = \operatorname{argmin}\left\{|v|_m : v \in \Omega_i^h\right\}, \quad i \in [0, \kappa]. \tag{11}$$

Вся процедура осуществляется до момента времени θ.

Теорема 1. *Пусть $\delta(h) \to 0$, $h/\delta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T, \mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Чтобы установить справедливость этой теоремы, нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Для системы (1), используя результаты [11], [12], можно показать, если $\gamma \in (1/2, 1)$, то существует постоянная $M_0 > 0$, при которой имеет место оценка

$$\left|x(t_1, u_1) - x(t_2, u_2)\right|_n \le M_0(|t_2 - t_1|^\gamma + \|u_1 - u_2\|_{L_2}) \quad \forall t_1, t_2 \in T, \quad \forall u_1, u_2 \in K_p. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть $u(\cdot) \in U(x(\cdot))$. Тогда имеют место включения*

$$\frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) \in \Omega_i^h, \quad i \in [1, m]. \tag{13}$$

Доказательство. Уравнение (1) может быть представлено в интегральном виде:

$$x(\tau_i) = x_\sigma + [I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_i) + B[I^\gamma u](\tau_i), \quad i \in [1, m]. \tag{14}$$

Используя выражения (14), запишем разности между значениями решения в соседних узлах разбиения

$$x(\tau_1) - x_\sigma = B[I^\gamma u](\tau_1) + [I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_1),$$

$$x(\tau_k) - x(\tau_{k-1}) = B[I^\gamma u](\tau_k) - B[I^\gamma u](\tau_{k-1}) + [I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_k) - [I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_{k-1}), \quad k \in [2, i].$$

Умножая последние формулы для каждого $k \in [1, i]$ на коэффициенты b_{i-k}, используемые в (5), имеем

$$\begin{aligned} b_{i-k}(x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})) &= b_{i-k}B([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) + \\ &+ b_{i-k}([I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_k) - [I^\gamma g(\cdot, x)](\tau_{k-1})), \quad k \in [1, i]. \end{aligned}$$

Суммируя полученные равенства по k, приходим к выражению

$$B\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) = \sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(x(\tau_k) - x(\tau_{k-1}) - [I_{\sigma+}^\gamma g(\cdot, x)](\tau_k) + [I_{\sigma+}^\gamma g(\cdot, x)](\tau_{k-1})).$$

Правую и левую часть последнего равенства умножив на $1/\delta^\gamma$ и добавив в них слагаемые $g(\tau_{i-1}, \xi_{i-1})$ и $(1/\delta^\gamma)\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})$, получим

$$\left|\frac{1}{\delta^\gamma}B\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) + g(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right|_n \le I_1 + I_2, \tag{15}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\delta^\gamma}\left|\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(x(\tau_k) - x(\tau_{k-1}) - \xi_k + \xi_{k-1})\right|_n,$$

$$I_2 = \left|\frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma g(\cdot,x)](\tau_k) - [I^\gamma g(\cdot,x)](\tau_{k-1})) - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1})\right|_n.$$

Из условия (4) следуют неравенства

$$|x(\tau_k) - x(\tau_{k-1}) - \xi_k + \xi_{k-1}|_n \le 2h, \quad k \in [1,i],$$

используя которые, получаем оценку

$$I_1 \le 2h\frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k} \le \frac{2hi^{1-\gamma}}{\delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)} \le \frac{2h\kappa^{1-\gamma}}{\delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)} = \frac{2h(\theta-\sigma)^{1-\gamma}}{\delta\Gamma(2-\gamma)} = d_1\frac{h}{\delta}. \tag{16}$$

Принимая во внимание (5) и (6), формулу для I_2 перепишем в виде

$$I_2 = |g(\tau_i, x(\tau_i)) - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) + c_2\delta^{2-\gamma}|_n, \tag{17}$$

где $c_2 = C\max\limits_{t\in T, x\in E}\|[I^{\gamma-2}g(\cdot,x)](t)|$. Тогда, добавляя и вычитая выражение $g(\tau_i, x(\tau_{i-1}))$ под знаком нормы в (17) и учитывая условия (3) и (12), получаем

$$\begin{aligned} I_2 &\le |g(\tau_i, x(\tau_i)) - g(\tau_i, x(\tau_{i-1})) + g(\tau_i, x(\tau_{i-1})) - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1})|_n + c_2\delta^{2-\gamma} \le \\ &\le L|x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})|_n + Lh + (c_2 + L)\delta \le d_2 h + d_3\delta^\gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя сумму неравенств (16) и (18) в (15), имеем

$$\left|\frac{1}{\delta^\gamma}B\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) + g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right|_n \le \beta_h,$$

что в сочетании с (8) приводит к формуле (13).

Лемма 2. *Пусть заданы последовательности* $\{h_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *и* $\{v_j(\cdot)\}_{j=1}^\infty \subset K_p$, *также выполнено условие согласования шага разбиения* δ *и погрешности* h:

$$h_j \to 0, \quad \delta(h_j) \to 0, \quad \frac{h_j}{\delta(h_j)} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{19}$$

Если элементы последовательности $\{v_j(\cdot)\}$ *принадлежат* V^{h_j} *и есть сходимость*

$$v_j(\cdot) \to v_0(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T,\mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad j\to\infty, \tag{20}$$

то справедливо включение $v_0(\cdot) \in U(x(\cdot))$.

Доказательство. Будем доказывать от противного, пусть $v_0(\cdot) \notin U(x(\cdot))$, т.е., см. формулу (7), на отрезке T существует ближайшее к начальному моменту времени σ множество $[t_1,t_2]$ ненулевой меры, на котором

$$[{}^C D^\gamma x](t) \ne g(t,x) + Bv_0(t),$$

но одновременно с этим

$$[{}^C D^\gamma x](t) = g(t,x) + Bv_0(t) \quad \text{при п.в.} \quad t\in[\sigma,t_1].$$

Другими словами, существует некоторая постоянная $d > 0$, для которой имеем

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x(s)) - Bv_0(s))ds\right|_n = d. \tag{21}$$

Зафиксируем равномерное разбиение

$$\Delta^{h_j} = \{\tau_{i,j}\}_{i=0}^{\kappa(h_j)}, \quad \tau_0 = \sigma, \quad \tau_{i+1,j}^h = \tau_{i,j}^h + \delta(h_j), \quad \tau_{\kappa(h_j)} = \theta, \quad \delta(h_j) = \frac{\theta-\sigma}{\kappa(h_j)}. \tag{22}$$

Далее для узлов сетки будем использовать обозначение $\tau_i = \tau^h_{i,j}$. Пусть номера p и q точек разбиения Δ^{h_j} таковы, что $\tau_p = \tau^h_{p,j} = \min\{t \in \Delta^{h_j} : t \le t_1\}$, $\tau_q = \tau^h_{q,j} = \max\{t \in \Delta^{h_j} : t \le t_2\}$. Тогда интеграл в формуле (21) можно представить суммой

$$\left|\int_{t_1}^{\tau_p}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x(s)) - Bv_0(s))ds + \int_{\tau_p}^{\tau_q}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x(s)) - Bv_0(s))ds + \right.$$
$$\left. + \int_{\tau_q}^{t_2}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x(s)) - Bv_0(s))ds\right|_n = d. \tag{23}$$

Используя результаты [11], [12], получаем оценку

$$\left|[{}^C D^\gamma x(\cdot,u)](t)\right|_n \le K_1 \quad \forall u \in K_p \quad \text{для п.в.} \quad t \in T. \tag{24}$$

Поскольку P — выпукло ограничено и замкнуто, то $v_0(\cdot) \in K_p$, а значит, существует постоянная $c_p = \sup\limits_{v_0 \in P} |v_0|_m < \infty$. Ввиду того, что длины отрезков $[t_1, \tau_p]$ и $[\tau_q, t_2]$ меньше $\delta_j = \delta(h_j)$, и для подынтегральных функций выполнены неравенства (3) и (24), то первый и третий интегралы выражения (23) для всех j, начиная с некоторого j_1, не превосходят $d/2$, что приводит к оценке

$$\left|\int_{\tau_p}^{\tau_q}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x) - Bv_0(s))ds\right|_n \ge \frac{d}{2}.$$

В последнем неравенстве под знаком нормы добавим и вычтем слагаемые

$$g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}), \quad \delta_j^{-\gamma}\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})ds \quad \text{и} \quad B\int_{\tau_p}^{\tau_q} v_j(s)ds,$$

в результате имеем

$$\left|\int_{\tau_p}^{\tau_q}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x))ds - B\int_{\tau_p}^{\tau_q} v_0(s)ds + \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})ds + g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})ds - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) + B\int_{\tau_p}^{\tau_q} v_j(s)ds - B\int_{\tau_p}^{\tau_q} v_j(s)ds\right|_n \ge \frac{d}{2}.$$

Введем обозначения и перепишем полученное выражение в виде

$$I_1^j + I_2^j + I_3^j \ge \frac{d}{2}, \quad j \ge j_1, \tag{25}$$

где

$$I_1^j = \left|B\int_{\tau_p}^{\tau_q}(v_0(s) - v_j(s))ds\right|_n,$$
$$I_2^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}([{}^C D^\gamma x](s) - g(s,x(s)) + g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1}))ds\right|_n, \tag{26}$$
$$I_3^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(Bv_j(s) + g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1}))ds\right|_n.$$

В силу слабой сходимости (20) имеем

$$I_1^j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{27}$$

В формуле (26) под интегралом добавим и вычтем выражение $[{}^C D^\gamma x](\tau_i)$. Тогда для I_2^j выполнено неравенство

$$I_2^j \le I_{21}^j + I_{22}^j + I_{23}^j,$$

где

$$I_{21}^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}([{}^C D^\gamma x](s) - [{}^C D^\gamma x](\tau_i))ds\right|_n,$$

$$I_{22}^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(g(s,x(s)) - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}))ds\right|_n,$$

$$I_{23}^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left([{}^C D^\gamma x](\tau_i) - \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right)ds\right|_n.$$

Из определений 3 и 4 и свойств оператора I^γ [18] следует $x \in C(T,\mathbb{R}^n)$, тогда из теоремы 2.2 [12, с. 93] получаем $[{}^C D^\gamma x](\cdot) \in C(T,\mathbb{R}^n)$. Это дает сходимость $I_{21}^j \to 0$ при $j \to \infty$ ($\delta_j \to 0$). Из условия (3) и оценки (12) для функции $g(s,x)$ получаем

$$|g(s,x(s)) - g(\tau_{i-1},\xi_{i-1})|_n \le L(|x(s) - \xi_{i-1}|_n + |s - \tau_i|) = O(h_j) + O(\delta_j^\gamma), \quad s \in [\tau_{i-1},\tau_i].$$

Поэтому $I_{22}^j \to 0$ при $j \to \infty$. Выражение для I_{23}^j преобразуем, используя асимптотическую формулу (5), к виду

$$I_{23}^j = \left|\sum_{i=p+1}^{q}\frac{\delta_j}{\delta_j^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(x(\tau_k) - x(\tau_{k-1}) - (\xi_k - \xi_{k-1}))\right|_n + O(\delta_j^{1-\gamma}).$$

Учитывая неравенства (4) и соотношение (19), получаем $I_{23}^j \to 0$ при $j \to \infty$. Следовательно, и

$$I_2^j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{28}$$

По условию леммы $v_j(\cdot) \in V^{h_j}$. Тогда имеем

$$v_j(t) = v_{ij} \in \Omega_i^{h_j} \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{i-1},\tau_i),$$

т.е.

$$\left|Bv_{ij} + g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta_j^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right|_n \le \beta_{h_j}.$$

Поскольку выполнение (19) влечет сходимость $\beta_{h_j} \to 0$ при $j \to \infty$, то

$$I_3^j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{29}$$

В результате сходимость последовательностей (27)–(29) дает сходимость их суммы к нулю, что противоречит (25).

Доказательство теоремы 1. Введем вспомогательную функцию

$$\tilde{v}_h(t) = \begin{cases} v^h(t+\delta) & \text{при} \quad t \in [\sigma, \theta - \delta), \\ v^h_{\kappa(h)} & \text{при} \quad t \in [\theta - \delta, \theta], \end{cases}$$

и покажем, что

$$\tilde{v}_h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{при} \quad h \to 0 \quad \text{в} \quad L_2(T,\mathbb{R}^m). \tag{30}$$

Для этого достаточно установить, что для произвольной последовательности $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, $h_j > 0$, $h_j \to 0$ при $j \to \infty$, имеется сходимость

$$\tilde{v}_{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T, \mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Предположим противное, т.е. найдется подпоследовательность последовательности $\{\tilde{v}_{h_j}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, обозначим ее через $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, со свойством

$$u_j(\cdot) \to u_0(\cdot) \neq u(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T, \mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{31}$$

Определим функцию, используя разбиение Δ^{h_j}, заданное формулой (22) и управление u:

$$\overline{u}_j(t) = u_{ji} = \frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}([I^\gamma u](\tau_k) - [I^\gamma u](\tau_{k-1})) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i).$$

По лемме 1 получаем $u_{ji} \in \Omega_i^{h_j}$, что приводит к включению $\overline{u}_j(\cdot) \in V^{h_j}$. Принцип выбора (11) элементов $v_i^{h_j}$ из множества V^{h_j} дает

$$\|u_j\|_{L_2([\tau_{i-1},\tau_i],\mathbb{R}^m)} \le \|\overline{u}_j\|_{L_2([\tau_{i-1},\tau_i],\mathbb{R}^m)} \le \|\overline{u}_j - u\|_{L_2([\tau_{i-1},\tau_i],\mathbb{R}^m)} + \|u\|_{L_2([\tau_{i-1},\tau_i],\mathbb{R}^m)}. \tag{32}$$

Применяя лемму 2.4 [11, с. 50], можно записать тождество

$$[{}^C D^\gamma I^\gamma u](t) = u(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in T. \tag{33}$$

Тогда, учитывая формулу (5), имеем

$$\|\overline{u}_j - u\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} = \sum_{i=1}^{\kappa}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|[{}^C D^\gamma I^\gamma u](\tau_i) - [{}^C D^\gamma I^\gamma u](s) + O(\delta^{2-\gamma})\right|_m^2 ds.$$

Ввиду включения $[{}^C D^\gamma I^\gamma u](\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^m)$ [11, теорема 2.6], [20, с. 288], получаем

$$\|\overline{u}_j - u\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{34}$$

Используя формулу (34) в неравенстве (32), находим

$$\overline{\lim}_{j\to\infty}\|u_j(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} \le \|u(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)}. \tag{35}$$

Из свойств слабого предела следует неравенство

$$\underline{\lim}_{j\to\infty}\|u_j(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} \ge \|u_0(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)}. \tag{36}$$

Объединяя неравенства (35) и (36), заключаем

$$\|u_0(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} \le \|u(\cdot)\|_{L_2(T,\mathbb{R}^m)}.$$

И поскольку из леммы 2 следует включение $u_0 \in U(x(\cdot))$, а из замечания 2 – единственность элемента минимальной нормы, то $u_0(\cdot) = u(\cdot)$. Последнее равенство противоречит (31). Таким образом, мы доказали сходимость (30). Теперь оценим интеграл

$$I = \int_\sigma^\theta |v^h(s) - u(s)|_m^2 ds,$$

находим

$$I \le \int_\sigma^\delta \left|u(s) - v_0^h\right|_m^2 ds + \int_\delta^\theta |\tilde{v}_h(s-\delta) - u(s-\delta)|_m^2 ds + \int_\delta^\theta |u(s-\delta) - u(s)|_m^2 ds.$$

Первое и третье слагаемые правой части последнего соотношения стремятся к нулю при $\delta \to 0$ ввиду того, что $u \in L_2(T, \mathbb{R}^m)$ и $\left|v_0^h\right|_m \le c_p$. Второе слагаемое не превосходит величины $\|\tilde{v}_h(\cdot) - u(\cdot)\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^m)}$, которая в силу сходимости (30) является бесконечно малой при $h \to 0$.

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. Пусть $\omega(u,\delta)$ — модуль непрерывности функции u, определяемый формулой

$$\omega(u,\delta) = \sup\{|u(t_1) - u(t_2)| : |t_1 - t_2| \le \delta;\ t_1, t_2 \in T\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $u \in AC(T,\mathbb{R}^m)$, $n = m$, $\det B \ne 0$ *и выполнены условия теоремы* 1. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|u(\cdot) - v^h(\cdot)\right\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^m)} \le \omega(u,\delta) + 3c_b\beta_h, \tag{37}$$

где β_h *определяется выражением* (9), $c_b = \left\|B^{-1}\right\|$.

Доказательство. Учитывая формулу (10), находим

$$\left\|u(\cdot) - v^h(\cdot)\right\|^2_{L_2(T,R^n)} = \sum_{i=1}^{\kappa}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|u(s) - v_i^h\right|_m^2 ds \le 2c_p\sum_{i=1}^{\kappa}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|u(s) - v_i^h\right|_m ds. \tag{38}$$

Используя определение множества (8) и выражение (33), получаем интеграл

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|u(s) - v_i^h\right|_m ds = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\Big|u(s) - u(\tau_i) + [{}^C D^\gamma I^\gamma u](\tau_i) - v_i^h + B^{-1}g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) -$$
$$- B^{-1}g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) + \frac{1}{\delta^\gamma}B^{-1}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1}) - \frac{1}{\delta^\gamma}B^{-1}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\Big|_n ds \le I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u(s) - u(\tau_i)|_n ds,$$

$$I_2 = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|[{}^C D^\gamma I^\gamma u](\tau_i) + B^{-1}g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta^\gamma}B^{-1}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right|_n ds,$$

$$I_3 = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|v_i^h + B^{-1}g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \frac{1}{\delta^\gamma}B^{-1}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1})\right|_n ds.$$

Поскольку $u \in AC(T,\mathbb{R})$, то функция u равномерно непрерывна на T. В таком случае, из теоремы 4.17 [19, с. 183] следует

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(u,\delta) = 0.$$

Тогда для интеграла I_1 получаем оценку

$$I_1 \le \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\omega(u,\delta)ds = \delta\omega(u,\delta). \tag{39}$$

Учитывая формулу (5) и лемму 1, имеем

$$\begin{gathered} I_2 \le \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\Big|\frac{1}{\delta^\gamma}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(I^\gamma u(\tau_k) - I^\gamma u(\tau_{k-1})) + B^{-1}g(\tau_{i-1},\xi_{i-1}) - \\ - \frac{1}{\delta^\gamma}B^{-1}\sum_{k=1}^{i} b_{i-k}(\xi_k - \xi_{k-1}) + d_3\delta^{2-\gamma}\Big|_n ds \le c_b\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\beta_h + d_3\delta^{2-\gamma}))ds \le 2c_b\delta\beta_h. \end{gathered} \tag{40}$$

Аналогичным образом для интеграла I_3 находим

$$I_3 \le c_b \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \beta_h ds = c_b \delta \beta_h. \tag{41}$$

Суммируя неравенства (39)–(41) по i от 1 до к и подставляя в (38), получаем формулу (37).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. NY: Basel, Gordon and Breach, 1995.
4. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.
5. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 16–28.
6. *Osipov Yu.S., Maksimov V.I., Pandolfi L.* Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 2. P. 149–162.
7. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О методах позиционного моделирования управления в динамических системах // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем: сб. науч. трудов. УрО АН СССР. Свердловск, 1988. С. 34–44.
8. *Максимов В.И.* Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 4. С. 618–629.
9. *Максимов В.И.* Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 2. С. 297–307.
10. *Maksimov V.I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. V. 25. № 3. P. 465–481.
11. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
12. *Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.* Theory and applications of fractional differential equations. Berlin: Elsevier, 2006.
13. *Li C., Zeng F.* Numerical methods for fractional Calculus. CRC Press, 2015.
14. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.
15. *Carpinteri A., Mainardi F.* Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Vienna: Springer-Verlag, 1997.
16. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
17. *Sabatier J., Agrawal O.P., Tenreiro-Machado J.A.* Advances in fractional calculus–Theoretical Developments and Applications in physics and engineering. Berlin: Springer. 2007.
18. *Gomoyunov M.I.* Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. V. 21. Issue 5. P. 1238–1261.
19. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1985.
20. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961.