ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1856–1871

УДК 517.951

ОБ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. В. Свинина

(664033 Иркутск, ул. Лермонтова 134, ИДСТУ СО РАН, Россия)

e-mail: svinina@icc.ru

Поступила в редакцию 08.07.2019 г.
Переработанный вариант 08.07.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

В работе рассмотрена смешанная задача для квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных индекса $(1, 0)$ первого порядка с двумя независимыми переменными. С помощью метода характеристик и итерационного метода доказана теорема существования решения поставленной задачи. Библ. 17.

Ключевые слова: квазилинейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных, индекс, метод характеристик.

DOI: 10.1134/S0044466919110139

ВВЕДЕНИЕ

В некоторых приложениях встречаются нелинейные дифференциально-алгебраические системы уравнений в частных производных [1]–[5], которые также называют вырожденными системами, не разрешенными относительно старшей производной, системами Соболева и системами, не относящимися к типу Коши–Ковалевской. Впервые такие системы появились в работах, посвященных конкретным уравнениям гидродинамики в конце XIX и начале XX века. Интерес к ним вызвала в том числе и работа С.Л. Соболева [1]. В настоящее время наиболее хорошо исследованы линейные дифференциально-алгебраические уравнения с двумя независимыми переменными [6]–[8]. Для квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными пока разработаны только методы численного решения на основе сплайновой интерполяции искомой вектор-функции [9].

В настоящей работе мы рассмотрим квазилинейную дифференциально-алгебраическую систему уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными с матричным пучком, построенным по коэффициентам системы, специального канонического вида. Отметим, что такие системы включают в себя, как частный случай, классические гиперболические квазилинейные системы уравнений с двумя независимыми переменными, исследования которых подробно изложены в монографии [10]. Для квазилинейной дифференциально-алгебраической системы мы докажем теорему существования решения некоторой смешанной задачи, используя метод характеристик и метод последовательных приближений [11]–[14]. Каноническая структура матричного пучка системы позволит преобразовать линейные системы, полученные на каждом итерационном шаге, к расщепленным формам, состоящим из трех систем уравнений. Одна из них гиперболического типа с ненулевыми характеристиками. Две других системы параболического типа, они имеют только нулевые характеристики. С помощью хорошо известного метода характеристик, восходящего к работам Леви, мы приведем систему гиперболических уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении характеристик, в качестве нижнего предела интегрирования, мы используем параметр, принимающий некоторые допустимые значения. Такой параметр позволит построить интегральные кривые, покрывающие искомые поверхности во всей области определения, а не в ее подобласти.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим квазилинейную систему уравнений в частных производных:

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u = F(x,t,u), \tag{1}$$

где $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ — некоторые заданные квадратные матрицы порядка n тождественно вырожденные в области определения $\mathcal{U} = \{(x,t,u) : (x,t) \in U\}$, где $U = \{(x,t) : x \in I_x = [x_0; X] \subset \mathbb{R}^1$, $t \in I_t = [t_0; T] \subset \mathbb{R}^1\}$. При условии вырожденности матриц $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$, говорят, что квазилинейная система (1) является дифференциально-алгебраической. Мы также предполагаем, что вектор-функция $F(x,t,u)$ задана в области $\mathcal{U}$.

Для системы вида (1) зададим следующие начально-краевые условия:

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — некоторые n-мерные вектор-функции своих аргументов. Предположим, что в каждой точке области $\mathcal{U}$, пучок матриц $P(\lambda,x,t,u) = A(x,t,u) + \lambda B(x,t,u)$ является регулярным. В этом случае его индекс или индекс системы (1) определяется парой чисел $(k,0)$, где k — максимальная степень элементарных делителей пучка $P(\lambda,x,t,u)$. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $P(\lambda,x,t,u)$, по предположению, не содержит сингулярной составляющей. Мы рассмотрим случай, когда система (1) имеет индекс $(1,0)$, то есть все элементарные делители пучка $P(\lambda,x,t,u)$ являются простыми, при этом корни характеристического многочлена $\det P(\lambda,x,t,u)$ могут быть кратными.

Цель работы состоит в исследовании и доказательстве существования единственного решения смешанной задачи (1), (2) в области определения U при определенных условиях гладкости на ее исходные данные. Под решением задачи (1), (2) мы понимаем классическое решение, т.е., решением задачи (1), (2) мы называем вектор-функцию $u(x,t)$ из пространства $C^1(U)$, которая в каждой точке области U вместе со своими производными первого порядка $\partial_x u(x,t)$ и $\partial_t u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), а на границе области U удовлетворяет условиям (2).

При исследовании задачи (1), (2) нам понадобится понятие канонической формы матричного пучка $P(\lambda,x,t,u)$. Кратко приведем некоторые сведения об s-гладкой эквивалентности матричного пучка $P(\lambda,x,t,u)$ специальной канонической структуре. В работе [7] были получены достаточные условия, при выполнении которых пучок $P(\lambda,x,t,u)$ является s-гладко эквивалентным следующему пучку:

$$\operatorname{diag}\{E_d, M(x,t,u), E_p\} + \lambda \operatorname{diag}\{J(x,t,u), E_l, N(x,t,u)\}.$$

Здесь предполагается, что $M(x,t,u)$ и $N(x,t,u)$ — некоторые верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка l и p соответственно, а

$$J(x,t,u) = \operatorname{diag}\{J_1(x,t,u), J_2(x,t,u), \ldots, J_s(x,t,u)\}$$

есть некоторая матрица порядка d. Здесь и далее, символом E_d мы обозначаем единичную матрицу порядка d. Естественно, что должно выполняться соотношение $p = n - d - l$. При этих предположениях найдутся ненулевые k_1 и k_2, где $k_1 = \min\{\overline{k} : M(x,t,u)^{\overline{k}} = 0,\ \forall (x,t,u) \in \mathcal{U}\}$ и $k_2 = \min\{\overline{k} : N(x,t,u)^{\overline{k}} = 0,\ \forall (x,t,u) \in \mathcal{U}\}$, максимальное значение из которых определяет индекс пучка. Таким образом, пучок $P(\lambda,x,t,u)$, для которого выполнены все условия теоремы 1 из работы [7] имеет индекс $(k,0)$, где $k = \max\{k_1,k_2\}$ и мы говорим, что система (1) также имеет индекс $(k,0)$. Очевидно, что значение k — это наибольшая степень элементарных делителей пучка $P(\lambda,x,t,u)$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det P(\lambda,x,t,u)$.

В настоящей работе мы предполагаем, что для системы (1) выполнены все условия теоремы 4 из работы [7] и степени элементарных делителей пучка $P(\lambda,x,t,u)$ не превосходят единицы. В этом случае система (1) имеет индекс $(1,0)$ и в силу теоремы 4 из работы [7] для пучка $P(\lambda,x,t,u)$ найдутся невырожденные в области определения U матрицы $L(x,t,u)$ и $R(x,t,u)$, обладающие той же гладкостью, что и элементы пучка $P(\lambda, x, t, u)$, которые выполняют следующее преобразование:

$$L(x,t,u)P(\lambda,x,t,u)R(x,t,u) = \operatorname{diag}\{E_d, \mathbb{O}_l, E_p\} + \lambda \operatorname{diag}\{J(x,t,u), E_l, \mathbb{O}_p\}, \tag{3}$$

где $J(x,t,u) = \operatorname{diag}\{k_1(x,t,u), k_2(x,t,u), \ldots, k_d(x,t,u)\}$, а $\mathbb{O}_l$ — нулевой квадратный блок порядка l. Правую часть в равенстве (3) мы будем называть канонической формой пучка $P(\lambda, x, t, u)$ системы (1) индекса $(1, 0)$.

Для получения необходимых оценок в пространстве $C^1(U)$ непрерывных в области U вектор-функций мы используем нормы

$$\|u(x,t)\|_{C(U)} = \max\{\|u(x,t)\|, \forall (x,t) \in U\}, \quad \text{где} \quad \|u(x,t)\| = \max\{|u_i(x,t)|, \forall i = 1, \ldots, n\}, \tag{4}$$

и

$$\|u(x,t)\|_* = \max_{(x,t)\in U}\{\exp(-l_1(t+x))\|u(x,t)\|\}, \quad l_1 > 0. \tag{5}$$

Отметим, что нормы (4) и (5) эквивалентны (см. [14, с. 12], [13, с. 124]), так как выполняется неравенство

$$\exp(-l_1(X+T))\|u(x,t)\|_{C(U)} \le \|u(x,t\|)_* \le \|u(x,t)\|_{C(U)}.$$

В свою очередь, норму матрицы $A(x,t,u)$ с элементами из $C^1(\mathcal{U})$ мы определяем как (см. [15, с. 391])

$$\|A(x,t,u)\|_{C(\mathcal{U})} = \max_{(x,t,u)\in\mathcal{U}}\{\|A(x,t,u)\|\}, \quad \text{где} \quad \|A(x,t,u)\| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}(x,t,u)| \quad \forall (x,t,u) \in \mathcal{U}.$$

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом разделе мы доказываем основную теорему о существовании единственного решения задачи (1), (2).

Пусть выполнены следующие условия:

1) *все корни характеристического многочлена* $\det P(\lambda, x, t, u)$ *являются вещественными и имеют постоянную кратность в области определения* $\mathcal{U}$;

2) *старший коэффициент многочлена* $\det P(\lambda, x, t, u)$ *по параметру* λ *не обращается в нуль ни в одной точке области* $\mathcal{U}$;

3) *ранги матриц* $A(x,t,u)$ *и* $B(x,t,u)$ *являются постоянными в каждой точке области* $\mathcal{U}$ *и меньше размерности* n;

4) *все элементарные делители пучка* $P(\lambda, x, t, u)$ *имеют первую степень*;

5) *все ненулевые корни характеристического многочлена* $\det P(\lambda, x, t, u)$ *отрицательные*;

6) *элементы матриц* $A(x,t,u)$ *и* $B(x,t,u)$ *принадлежат пространству* $C^1(\mathcal{U})$; *вектор-функция* $\psi(t)$ *принадлежит* $C^1(I_t)$; *производные* $\partial_x A(x,t,u)$, $\partial_x B(x,t,u)$, $\partial_t A(x,t,u)$, $\partial_t B(x,t,u)$, $\partial_{u_j} A(x,t,u)$ *и* $\partial_{u_j} B(x,t,u)$, *где* $j = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$; *вектор-функция* $\phi(x)$ *принадлежит пространству* $C^1(I_x)$; *вектор-функция* $F(x,t,u)$ *удовлетворяет условию Липшица по* u; *частные производные* $\partial_{u_i u_j} F(x,t,u)$, $\partial_{u_j x} F(x,t,u)$ *и* $\partial_{u_j t} F(x,t,u)$, *где* $i, j = 1, \ldots, n$, *существуют, удовлетворяют условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$ *и являются ограниченными в этой области*;

7) *частные производные* $\partial_{u_j x} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j t} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j u_i} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j x} R(x,t,u)$, $\partial_{u_j t} R(x,t,u)$, $\partial_{u_j u_i} R(x,t,u)$, $\partial_{xt} R(x,t,u)$, $\partial_{xx} R(x,t,u)$ *и* $\partial_{tt} R(x,t,u)$ *существуют, удовлетворяют условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$ *и являются ограниченными в этой области*;

8) *матрица* $R(x,t,u)$ *удовлетворяет условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$ *с константой, не превосходящей некоторой постоянной* $\mathcal{M}$;

9) *выполнены условия согласования*

$$\psi(t_0) = \phi(x_0), \quad \left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$
$$A(x_0,t_0)\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + B(x_0,t_0)\left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = F(x_0,t_0,\psi(t_0)).$$

Тогда в области U существует единственное решение $u(x,t)$ системы (1), *непрерывное в U вместе с частными производными первого порядка по переменным x и t, удовлетворяющее условиям* (2).

Кратко опишем доказательство теоремы. Сначала мы преобразуем систему (1) к удобной форме, используя специальное представление вектор-функции $F(x,t,u)$. К полученной системе мы применяем метод последовательных приближений. В результате на каждом шаге итерационного процесса мы получаем линейную систему дифференциально-алгебраических уравнений индекса $(1,0)$. Такие системы с помощью гладких матричных преобразований мы приводим к расщепленной форме и показываем, что их решения образуют фундаментальную последовательность, а ее предел удовлетворяет в области определения U системе (1) с начально-краевыми условиями (2). Для получения необходимых оценок мы используем метод характеристик, с помощью которого записываем расщепленные дифференциальные системы в интегральной форме. Для обоснования дифференцируемости предельной функции мы строим необходимые дифференциальные следствия расщепленной системы, записанной в интегральной форме. Аналогично мы доказываем, что последовательность производных является фундаментальной, а ее предел удовлетворяет соответствующей системе, полученной в результате дифференцирования системы (1). В заключение мы показываем, что построенное решение задачи (1), (2) является единственным.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы, разбивая его на основные пункты.

2.1. Преобразование системы и построение функциональной последовательности

В силу первого и третьего условий настоящей теоремы найдутся невырожденные в области $\mathcal{U}$ матрицы $L(x,t,u)$ и $R(x,t,u)$ с элементами из $C^1(\mathcal{U})$, приводящие пучок $P(\lambda,x,t,u)$ к каноническому виду (3). Выполним преобразование системы (1), используя идею преобразования правой части квазилинейного уравнения из статьи [16]. Для этого мы представим вектор $F(x,t,u)$ следующим образом: $F(x,t,u) = L^{-1}(x,t,u)\mathcal{F}(x,t,u)$. Запишем

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(x,t,u) = \mathcal{F}(x,t,u) - \mathcal{F}(x,t,o) + \mathcal{F}(x,t,o) = \int_0^1 \partial_\xi \mathcal{F}(x,t,\xi u)d\xi + \mathcal{F}(x,t,o) = \\ = \int_0^1 \partial_u \mathcal{F}(x,t,\xi u)u d\xi + \mathcal{F}(x,t,o),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\partial_u \mathcal{F}(x,t,\xi u) = (\partial_{u_{s_2}} \mathcal{F}_{s_1}(x,t,\xi u))$ — матрица Якоби, где $s_1, s_2 = 1, \ldots, n$ и o — нулевой вектор. Пусть

$$C(x,t,u) = -\int_0^1 \partial_u \mathcal{F}(x,t,\xi u)d\xi.$$

Тогда вектор $F(x,t,u)$ с учетом (6) принимает следующий вид:

$$F(x,t,u) = -L^{-1}(x,t,u)(C(x,t,u)u - \mathcal{F}(x,t,o)). \tag{7}$$

Перепишем систему (1) с учетом равенства (7)

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u + L^{-1}(x,t,u)C(x,t,u)u = L^{-1}(x,t,u)\mathcal{F}(x,t,o) \tag{8}$$

и применим затем к задаче (2), (8) метод последовательных приближений

$$\begin{gathered}A(x,t,u_k)\partial_t u_{k+1} + B(x,t,u_k)\partial_x u_{k+1} + L^{-1}(x,t,u_k)C(x,t,u_k)u_{k+1} = L^{-1}(x,t,u_k)\mathcal{F}(x,t,o), \\ u_0(x,t) = \phi(x), \quad u_{k+1}(x,t_0) = \phi(x), \quad u_{k+1}(x_0,t) = \psi(t), \quad k \geq 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Умножая систему в (9) слева на матрицу $L(x,t,u_k)$ и выполняя замену переменной

$$u_{k+1}(x,t) = R(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t), \tag{10}$$

в результате получаем систему

$$\begin{gathered}\mathcal{A}\partial_t v_{k+1} + \mathcal{B}(x,t,u_k)\partial_x v_{k+1} + \mathcal{C}(x,t,u_k)v_{k+1} = \mathcal{F}(x,t,o),\\ u_0(x,t) = \phi(x), \quad v_{k+1}(x,t_0) = \Phi(x), \quad u_{k+1}(x_0,t) = \Psi(t), \quad k \geq 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где матричные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\{E_d, \mathbb{O}_l, E_p\}, \quad \mathcal{B}(x,t,u_k) = \operatorname{diag}\{J(x,t,u_k), E_l, \mathbb{O}_p\},$$

$$\mathcal{C}(x,t,u_k) = L(x,t,u_k)A(x,t,u_k)\left\{\partial_t R(x,t,u_k) + \sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k}}R(x,t,u_k)\partial_t u_{j,k}\right\} +$$

$$+ L(x,t,u_k)B(x,t,u_k)\left\{\partial_x R(x,t,u_k) + \sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k}}R(x,t,u_k)\partial_x u_{j,k}\right\} + C(x,t,u_k)R(x,t,u_k)$$

Кроме того, $\Phi(x) = R^{-1}(x,t_0,\phi(x))\phi(x)$ и $\Psi(t) = R^{-1}(x_0,t,\psi(t))\psi(t)$. Заметим, что на каждом шаге итерации k равенства (11) представляют собой начально-краевую задачу для линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных индекса $(1,0)$. Такие задачи хорошо исследованы. Для них получены условия существования решения в пространстве $C^1(U)$ [17] и разработаны эффективные методы численного решения на основе сплайновой интерполяции [6]. Отметим, что для каждого значения k условия теоремы существования решения начально-краевой задачи (11) выполнены (см. [17]) при выполнении условий настоящей теоремы. Поэтому, подставляя стартовое значение $u_0(x,t)$ в коэффициенты системы из (11), мы получаем начально-краевую задачу (11), которая в силу теоремы из [17] имеет решение $v_1(x,t) \in C^1(U)$. С помощью равенства (10) по решению $v_1(x,t)$ мы восстанавливаем вектор $u_1(x,t) \in C^1(U)$. Затем подставляем $u_1(x,t)$ в коэффициенты системы из (11) и находим $v_2(x,t) \in C^1(U)$ и так далее. Предположим, что $v_k(x,t) \in C^1(U)$ – решение задачи (11) на k-м шаге. Используя равенство (10), мы находим вектор-функцию $u_k(x,t)$, которая также принадлежит пространству $C^1(U)$. Подставляя $u_k(x,t)$ в коэффициенты системы из (11), мы получаем граничную задачу, для которой снова выполнены все условия теоремы существования из работы [17]. Следовательно, на $(k+1)$-м шаге существует решение граничной задачи (11) $v_{k+1}(x,t) \in C^1(U)$. Таким образом, задачи (11) разрешимы при любом $k \geq 0$ и определяют бесконечную последовательность $\{v_k(x,t) : k \geq 0\}$ в пространстве $C^1(U)$.

Далее нам необходимо доказать, что последовательность $\{v_k(x,t)\}$ является фундаментальной. Для этой цели мы запишем систему (11) в расщепленной интегральной форме.

2.2. Интегральная форма дифференциальной системы

Разобьем матрицу $\mathcal{C}(x,t,u_k)$ на блоки $\mathcal{C}^i(x,t,u_k)$, где $i = 1,2,3$ размеров $(d\times n)$, $(l\times n)$ и $(p\times n)$ и запишем систему (11) в расщепленном виде

$$\begin{gathered}\partial_t v^1_{k+1}(x,t) + J(x,t,u_k)\partial_x v^1_{k+1}(x,t) + \mathcal{C}^1(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathcal{F}^1(x,t,o),\\ \partial_x v^2_{k+1}(x,t) + \mathcal{C}^2(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathcal{F}^2(x,t,o),\\ \partial_t v^3_{k+1}(x,t) + \mathcal{C}^3(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathcal{F}^3(x,t,o),\end{gathered} \tag{12}$$

где $v_{k+1}(x,t) = (v^1_{k+1}(x,t), v^2_{k+1}(x,t), v^3_{k+1}(x,t))^\top$, $\mathcal{F}(x,t,o) = (\mathcal{F}^1(x,t,o), \mathcal{F}^2(x,t,o), \mathcal{F}^3(x,t,o))^\top$ и $\mathcal{C}(x,t,u_k) = \operatorname{colon}(\mathcal{C}^1(x,t,u_k), \mathcal{C}^2(x,t,u_k), \mathcal{C}^3(x,t,u_k))$. Напомним, что матрица $J(x,t,u_k)$ определена в (3). Рассмотрим задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = k_i(x,t,u_k), \quad x(t^0) = x^0, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{13}$$

где $k_i(x,t,u_k) \in C^1(\mathcal{U})$ – диагональные элементы матрицы $J(x,t,u_k)$. Заметим, что

$$k_i(x,t,u_k) > 0 \quad \forall (x,t,u_k) \in \mathcal{U}.$$

Величины x^0 и t^0 являются параметрами, которые принимают свои значения на границе области U. Обозначим эту границу Γ, то есть $(x^0,t^0) \in \Gamma$, где $\Gamma = \{(x,t) : (x \in I_x, t = t_0) \vee (x = x_0, t \in I_t)\}$. Так-как функции $k_i(x,t,u_k)$ – определены и непрерывны в области U, то решение задачи Коши существует и единственно для каждого i и каждого k на отрезке $[t^0,T]$. Решения задач (13) обозначим $x_i = x_i(x,t,x^0,t^0,u_k)$. Это ненулевые характеристики системы (1). Через каждую граничную точку (x^0,t^0) проходит ровно d ненулевых характеристик. С учетом (13) запишем систему (12) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
dv^1_{i,k+1}(x,t)/dt + \mathscr{C}^1_i(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathscr{F}^1_i(x,t,o), \quad i = 1, \dots, d, \\
\partial_x v^2_{k+1}(x,t) + \mathscr{C}^2(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathscr{F}^2(x,t,o), \\
\partial_t v^3_{k+1}(x,t) + \mathscr{C}^3(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t) = \mathscr{F}^3(x,t,o), \\
u_{k+1}(x,t) = R(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t), \quad u_0(x,t) = \phi(x), \quad k \ge 0, \\
v_{k+1}(x_0,t) = \Psi(t), \quad v_{k+1}(x,t_0) = \Phi(x),
\end{gathered} \tag{14}$$

где $dv^1_{i,k+1}(x,t)/dt$ – полная производная i-й компоненты блока

$$v^1_{k+1}(x,t) = (v^1_{1,k+1}(x,t), v^1_{2,k+1}(x,t), \dots, v^1_{d,k+1}(x,t))^\top$$

по переменной t в направлении характеристики $x = x_i(x,t,u_k,x^0,t^0)$ и

$$\mathscr{F}^1(x,t,o) = (\mathscr{F}^1_1(x,t,o), \mathscr{F}^1_2(x,t,o), \dots, \mathscr{F}^1_d(x,t,o))^\top.$$

Запишем систему (14) в интегральной форме

$$\begin{gathered}
v^1_{i,k+1}(x,t) = \omega^1_i(x_i,t) - \int_{t^0}^{t} \mathscr{C}^1_i(x_i,\tau,u_k(x_i,\tau))v_{k+1}(x_i,\tau)d\tau, \quad t^0 \in I_t, \\
v^2_{k+1}(x,t) = \omega^2(x,t) - \int_{x_0}^{x} \mathscr{C}^2(s,t,u_k(s,t))v_{k+1}(s,t)ds, \\
v^3_{k+1}(x,t) = \omega^3(x,t) - \int_{t_0}^{t} \mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))v_{k+1}(x,\tau)d\tau, \\
u_{k+1}(x,t) = R(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t), \quad u_0(x,t) = \phi(x), \quad k \ge 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\omega(x,t) = (\omega^1(x,t), \omega^2(x,t), \omega^3(x,t))^\top, \quad \omega^1(x,t) = (\omega^1_1(x,t), \omega^1_2(x,t), \dots, \omega^1_d(x,t))^\top,$$

$$\omega^1_i(x_i,t) = v^1_i(x^0,t^0) + \int_{t^0}^{t} \mathscr{F}^1_i(x_i,t,o)d\tau, \quad \omega^2(x,t) = v^2(x_0,t) + \int_{x_0}^{x} \mathscr{F}^2(s,t,o)ds,$$

$$\omega^3(x,t) = v^3(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}^3(x,\tau,o)d\tau.$$

Также запишем систему (15) в операторном виде

$$\begin{gathered}
v_{k+1}(x,t) + \mathscr{L}_k v_{k+1}(x,t) = \omega(x,t), \quad k \ge 0, \\
u_{k+1}(x,t) = R(x,t,u_k)v_{k+1}(x,t), \quad u_0(x,t) = \phi(x),
\end{gathered} \tag{16}$$

где $\mathscr{L}_k$ – оператор, который действует следующим образом:

$$\mathscr{L}_k v_{k+1}(x,t) = (\mathscr{L}^1_k v_{k+1}(x,t), \mathscr{L}^2_k v_{k+1}(x,t), \mathscr{L}^3_k v_{k+1}(x,t))^\top,$$

$$\mathcal{L}_k^1 v_{k+1}(x,t) = \left(\int_{t^0}^{t} \mathcal{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau))v_{k+1}(x_1,\tau)d\tau, \, \ldots, \int_{t^0}^{t} \mathcal{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau))v_{k+1}(x_d,\tau)d\tau \right)^\top,$$

$$\mathcal{L}_k^2 v_{k+1}(x,t) = \int_{x_0}^{x} \mathcal{C}^2(s,t,u_k(s,t))v_{k+1}(s,t)ds,$$

$$\mathcal{L}_k^3 v_{k+1}(x,t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))v_{k+1}(x,\tau)d\tau.$$

Теперь мы можем перейти к доказательству сходимости последовательности $\{v_k(x,t)\}$ к решению задачи (1), (2).

2.3. Доказательство сходимости последовательности $\{v_k(x,t)\}$

Пусть $v_{k+1,s} = v_{k+s+1} - v_{k+1}$, тогда из (16) получаем

$$v_{k+1,s} + \mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s} + (\mathcal{L}_{k+s} - \mathcal{L}_k)v_{k+1} = 0. \tag{17}$$

В свою очередь, из (17) мы получаем неравенство

$$\|v_{k+1,s}\|_* \le \|\mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s}\|_* + \|(\mathcal{L}_{k+s} - \mathcal{L}_k)v_{k+1}\|_*. \tag{18}$$

Далее $\mathcal{C}_i^2(x,t,u)$ и $\mathcal{C}_j^3(x,t,u)$, где $i = 1, \ldots, l$ и $j = 1, \ldots, p$, обозначают строки блоков $\mathcal{C}^2(x,t,u)$ и $\mathcal{C}^3(x,t,u)$ соответственно. Оценим по норме $\mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s}$. Имеем

$$\|\mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s}\|_* = \max_{(x,t)\in U}\{\exp(-l_1(t+x))\|\mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s}\|\} =$$

$$= \max_{(x,t)\in U}\left\{\exp(-l_1(t+x))\max\left\{\left|\int_{t^0}^{t}\mathcal{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))v_{k+1,s}(x_1,\tau)d\tau\right|,\ldots\right.\right.$$

$$\ldots,\left|\int_{t^0}^{t}\mathcal{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))v_{k+1,s}(x_d,\tau)d\tau\right|, \left|\int_{x^0}^{x}\mathcal{C}_1^2(s,t,u_{k+s}(s,t))v_{k+1,s}(s,t)ds\right|, \ldots$$

$$\ldots,\left|\int_{x^0}^{x}\mathcal{C}_l^2(s,t,u_{k+s}(s,t))v_{k+1,s}(s,t)ds\right|, \left|\int_{t^0}^{t}\mathcal{C}_1^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))v_{k+1,s}(x,\tau)d\tau\right|,\ldots$$

$$\left.\left.\ldots,\left|\int_{t^0}^{t}\mathcal{C}_p^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))v_{k+1,s}(x,\tau)d\tau\right|\right\}\right\} \le$$

$$\le \max_{(x,t)\in U}\left\{\|\mathcal{C}(x,t,u(x,t))\|\cdot\max\left\{\int_{t^0}^{t}\exp(l_1(\tau-t))\exp(-l_1(\tau+x))\|v_{k+1,s}(x_1,\tau)\|d\tau,\ldots\right.\right.$$

$$\ldots\int_{t^0}^{t}\exp(l_1(\tau-t))\exp(-l_1(\tau+x))\|v_{k+1,s}(x_d,\tau)\|d\tau,\ \int_{x^0}^{x}\exp(l_1(s-x))\exp(-l_1(s+t))\|v_{k+1,s}(s,t)\|ds,$$

$$\left.\left.\int_{t^0}^{t}\exp(l_1(\tau-t))\exp(-l_1(\tau+x))\|v_{k+1,s}(x,\tau)\|d\tau\right\}\right\} \le \|\mathcal{C}(x,t,u(x,t))\|_{C(U)}\cdot\|v_{k+1,s}(x,t)\|_*\times$$

$$\times\max_{(x,t)\in U}\left\{\int_{t^0}^{t}\exp(l_1(\tau-t))d\tau,\ \int_{x^0}^{x}\exp(l_1(s-x))ds,\ \int_{t^0}^{t}\exp(l_1(\tau-t))d\tau\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{l_1}\|\mathcal{C}(x,t,u(x,t))\|_{C(U)}\cdot\|v_{k+1,s}(x,t)\|_*\max\{1-\exp(-l_1T), 1-\exp(-l_1X)\}.$$

Пусть $\rho = \dfrac{1}{l_1}\max\{1-\exp(-l_1T), 1-\exp(-l_1X)\}$ и $c_1 = \|C(x,t,u(x,t))\|_{C(U)}$. Тогда

$$\|\mathcal{L}_{k+s}v_{k+1,s}\|_* \le \rho c_1\|v_{k+1,s}\|_*. \tag{19}$$

Так как для произвольной постоянной величины κ выполняется $\lim\limits_{l_1\to\infty}(1-\exp(-l_1\kappa))/l_1 = 0$, то при достаточно большом значении l_1 будет $0<\rho c_1<1$. Далее, оценим по норме разность $(\mathcal{L}_{k+s}-\mathcal{L}_k)v_{k+s+1}$. Имеем

$$(\mathcal{L}_{k+s}-\mathcal{L}_k)v_{k+1} = \left(\int_{t^0}^{t}(\mathcal{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau)) - \mathcal{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau)))v_{k+1}(x_1,\tau)d\tau, \ldots\right.$$
$$\ldots, \int_{t^0}^{t}(\mathcal{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau)) - \mathcal{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau)))v_{k+1}(x_d,\tau)d\tau,$$
$$\int_{t^0}^{t}(\mathcal{C}^2(s,t,u_{k+s}(s,t)) - \mathcal{C}^2(s,t,u_k(s,t)))v_{k+1}(s,t)ds,$$
$$\left.\int_{t^0}^{t}(\mathcal{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau)) - \mathcal{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau)))v_{k+1}(x,\tau)d\tau\right)^{\top}.$$

В силу шестого и седьмого условий теоремы, матрица $\mathcal{C}(x,t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u в области $\mathcal{U}$. Следовательно, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{C}(x,t,u_2) - \mathcal{C}(x,t,u_1)\|_* \le c_2\|u_2-u_1\|_* \quad \forall u_1,u_2\in\mathcal{U}, \tag{20}$$

с некоторой постоянной c_2. (Далее у нас появляются другие постоянные c_i.) Пусть $u_{k,s} = u_{k+s}-u_k$, тогда с учетом (20) получаем оценку

$$\|(\mathcal{L}_{k+s}-\mathcal{L}_k)v_{k+1}\|_* \le c_2\rho\|v_{k+1}\|_*\|u_{k,s}\|_*.$$

Покажем, что для любого k выполняется неравенство $\|v_k\|_*\le c_3$. Система (16) эквивалентна системе (11), поэтому она однозначно разрешима при любом k. Из (16) находим

$$\|v_{k+1}(x,t)\|_* \le c_3, \quad \text{где} \quad c_3 = \|\omega(x,t)\|_*/(1-\rho c_1). \tag{21}$$

Из (18), (19) и (20) имеем оценку

$$\|v_{k+1,s}\|_* \le \frac{\rho c_2c_3}{1-\rho c_1}\|u_{k,s}\|_*. \tag{22}$$

Оценим по норме $u_{k,s}$. Из (15) находим

$$u_{k,s} = R(x,t,u_{k+s-1})v_{k,s} + (R(x,t,u_{k+s-1}) - R(x,t,u_{k-1}))v_k. \tag{23}$$

Так как элементы матрицы $R(x,t,u)$ принадлежат $C^1(\mathcal{U})$, то матрица $R(x,t,u)$ является ограниченной в области $\mathcal{U}$ и удовлетворяет условию Липшица по u, то есть выполняются оценки

$$\|R(x,t,u)\|_{C(\mathcal{U})} \le c_4 \quad \text{и} \quad \|R(x,t,u_2)-R(x,t,u_1)\|_* \le c_5\|u_2-u_1\|_* \quad \forall u_1,u_2\in\mathcal{U}.$$

Тогда из (23) получаем

$$\|u_{k,s}\|_* \le c_4\|v_{k,s}\|_* + c_5\|u_{k-1,s}\|_*\|v_k\|_*. \tag{24}$$

С учетом (22), неравенство (24) переписывается в следующем виде:

$$\|u_{k+1,s}\|_* \le \kappa_1\|u_{k,s}\|_*, \quad \text{где} \quad \kappa_1 = \frac{\rho c_6}{1-\rho c_1} + c_5c_3. \tag{25}$$

Если принять за $\mathcal{M}$ величину, равную $(1-\rho\|C(x,t,u)\|_{C(U)})/(\|\omega(x,t)\|_*)$, то в силу восьмого условия теоремы будет выполняться неравенство $c_5c_3<1$. Поэтому увеличивая достаточно l_1, мы всегда можем добиться, чтобы выполнялось неравенство $\kappa_1 < 1$. Из (16), для любых k и s, имеем $\|u_{k,s}\|_* \le 2c_4c_3$, тогда из (25) получаем

$$\|u_{k+1,s}\|_* \le 2c_4c_3\kappa_1^k. \tag{26}$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}$ является сходящейся в себе. В силу признака Коши (см. [13, с. 35]) последовательность $\{u_k\}$ является сходящейся по норме $\|u_k\|_*$ в пространстве $C(U)$. В силу эквивалентности двух норм $\|u_k\|_*$ и $\|u_k\|_{C(U)}$ последовательность $\|u_k\|$ также является сходящейся по норме $\|u_k\|_{C(U)}$ в этом пространстве к некоторой предельной функции $u(x,t)$. Покажем, что последовательность $\{v_k\}$ будет фундаментальной. Имеем

$$v_{k+1}(x,t) = R^{-1}(x,t,u_k)u_{k+1}(x,t). \tag{27}$$

Из (27) получаем

$$v_{k+1,s} = R^{-1}(x,t,u_{k+s})u_{k+1,s} + (R^{-1}(x,t,u_k) - R^{-1}(x,t,u_k))u_{k+1}. \tag{28}$$

Элементы матрицы $R^{-1}(x,t,u)$ принадлежат пространству $C(\mathcal{U})$, следовательно, $R^{-1}(x,t,u)$ является ограниченной и удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|R^{-1}(x,t,u)\right\|_{C(\mathcal{U})} \le c_6 \quad \text{и} \quad \left\|R^{-1}(x,t,u_2) - R^{-1}(x,t,u_1)\right\|_* \le c_7\|u_2 - u_1\|_*. \tag{29}$$

Из (28) с учетом (29) получаем неравенство

$$\|v_{k+1,s}\|_* \le c_6(\|u_{k+1,s}\|_* + \|u_{k,s}\|_*), \tag{30}$$

из которого имеем оценку

$$\|v_{k+1,s}\|_* \le c_8\kappa_1^k. \tag{31}$$

Из неравенства (31) следует, что последовательность $\{v_k\}$ является фундаментальной. В силу признака Коши последовательность $\{v_k\}$ сходится по норме $\{v_k\}_*$ и, следовательно, по норме $\|v_k\|_{C(U)}$ в пространстве $C(U)$ к некоторой предельной функции $v(x,t)$.

Покажем, что $u(x,t)$ является решением задачи (1), (2). Переходя к пределу в (15) при $k \to \infty$, получаем, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$v_i^1(x,t) = \omega_i^1(x_i,t) - \int_{t^0}^{t} \mathcal{C}_i^1(x_i,\tau,u(x_i,\tau))v(x_i,\tau)d\tau, \quad t^0 \in I_t,$$
$$v^2(x,t) = \omega^2(x,t) - \int_{x_0}^{x} \mathcal{C}^2(s,t,u(s,t))v(s,t)ds,$$
$$v^3(x,t) = \omega^3(x,t) - \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}^3(x,\tau,u(x,\tau))v(x,\tau)d\tau,$$
$$u(x,t) = R(x,t,u)v(x,t), \quad u_0(x,t) = \phi(x).$$

Следовательно, $u(x,t)$ удовлетворяет и системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\partial_t v^1(x,t) + J(x,t,u)\partial_x v^1(x,t) + \mathcal{C}^1(x,t,u)v(x,t) = \mathcal{F}^1(x,t,o),\\
\partial_x v^2(x,t) + \mathcal{C}^2(x,t,u)v(x,t) = \mathcal{F}^2(x,t,o),\\
\partial_t v^3(x,t) + \mathcal{C}^3(x,t,u)v(x,t) = \mathcal{F}^3(x,t,o), \quad u(x,t) = R(x,t,u)v(x,t)\\
v(x_0,t) = R^{-1}(x_0,t,u(x_0,t))\Psi(t), \quad v(x,t_0) = R^{-1}(x,t_0,u(x,t_0))\Phi(x).
\end{gathered} \tag{32}$$

Покажем, что система (32) эквивалентна системе (1) с условием (2). Запишем систему (32) в матричном виде

$$\begin{gathered}\mathcal{A}\partial_t v + \mathcal{B}(x,t,u)\partial_x v + \mathcal{C}(x,t,u)v = \mathcal{F}(x,t,o),\\ v(x_0,t) = R^{-1}(x_0,t,u(x_0,t))\psi(t), \quad v(x,t_0) = R^{-1}(x,t_0,u(x,t_0))\phi(x), \quad u(x,t) = R(x,t,u)v(x,t),\end{gathered} \tag{33}$$

где матричные коэффициенты имеют вид

$$\begin{gathered}\mathcal{A} = \operatorname{diag}\{E_d, \mathbb{O}_l, E_p\}, \quad \mathcal{B}(x,t,u) = \operatorname{diag}\{J(x,t,u), E_l, \mathbb{O}_p\} \quad \text{и}\\ \mathcal{C}(x,t,u) = L(x,t,u)A(x,t,u)\partial_t R(x,t,u) + L(x,t,u)B(x,t,u)\partial_t R(x,t,u) + C(x,t,u)R(x,t,u).\end{gathered}$$

Производные $\partial_t R(x,t,u)$ и $\partial_x R(x,t,u)$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\partial_t R(x,t,u) = \partial_t R(x,t,u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{u_j} R(x,t,u)\partial_t u_j,\\ \partial_x R(x,t,u) = \partial_x R(x,t,u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{u_j} R(x,t,u)\partial_x u_j.\end{gathered}$$

Умножим систему (33) слева на матрицу $L^{-1}(x,t,u)$ и вернемся в (33) к искомой функции $u(x,t)$. В результате получим

$$\begin{gathered}L^{-1}(x,t,u)\mathcal{A}\partial_t(R^{-1}(x,t,u)u) + L^{-1}(x,t,u)\mathcal{B}(x,t,u)\partial_x(R^{-1}(x,t,u)u) +\\ + L^{-1}(x,t,u)\mathcal{C}(x,t,u)R^{-1}(x,t,u)u(x,t) = L^{-1}(x,t,u)\mathcal{F}(x,t,o),\\ u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x).\end{gathered} \tag{34}$$

Преобразуем (34) к виду

$$\begin{gathered}A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u + \Delta u = F(x,t,u),\\ u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x),\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta = A(x,t,u)(R(x,t,u)\partial_t R^{-1}(x,t,u) + \partial_t R(x,t,u)R^{-1}(x,t,u)) +\\ + B(x,t,u)(R(x,t,u)\partial_x R^{-1}(x,t,u) + \partial_x R(x,t,u)R^{-1}(x,t,u)).\end{gathered}$$

Так как в Δ выражения в скобках представляют собой производные $\partial_t(R(x,t,u)R^{-1}(x,t,u))$ и $\partial_x(R(x,t,u)R^{-1}(x,t,u))$, то $\Delta \equiv 0$. Таким образом, задача (32) эквивалентна задаче (1), (2). Следовательно, функция $u(x,t)$ является решением задачи (1), (2).

Далее, мы докажем, что $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменным x и t в области U.

2.4. Доказательство непрерывной дифференцируемости решения $u(x,t)$ по переменным x и t

Из непрерывности подынтегральных функций в (30) следует непрерывная дифференцируемость компонент $v_i^1(x,t)$ первой блочной компоненты $v^1(x,t)$ предельной функции $v(x,t)$ по переменной t вдоль соответствующего характеристического направления $x = x_i(x,t,x^0,t^0)$. Вторая блочная компонента $v^2(x,t)$ предельной функции $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменной x и третья блочная компонента $v^3(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменной t. Остается доказать, что первая блочная компонента $v^1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменным x и t, вторая блочная компонента $v^2(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменной t и третья $v^3(x,t)$ по переменной x. Сначала докажем, что первая $v^1(x,t)$ и третья $v^3(x,t)$ компоненты предельной функции $v(x,t)$ дифференцируемы по переменной x.

Пусть $\overline{v}_{k+1} = (v_{k+1}^1, v_{k+1}^3)^\top$, $\overline{\mathcal{L}}v_{k+1}(x,t) = (\mathcal{L}_k^1 v_{k+1}(x,t), \mathcal{L}_k^3 v_{k+1}(x,t))^\top$ и $\overline{\omega}(x,t) = (\omega^1(x,t), \omega^3(x,t))^\top$. Первое и третье уравнения системы (15) запишем в виде операторного уравнения

$$\overline{v}_{k+1}(x,t) + \overline{\mathcal{L}}_k v_{k+1}(x,t) = \overline{\omega}(x,t). \tag{35}$$

Продифференцируем уравнение (35) по переменной x. Получим

$$\partial_x \overline{v}_{k+1}(x,t) + (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1}(x,t) + \overline{\mathscr{L}}_k \partial_x v_{k+1}(x,t) = \partial_x \overline{\omega}(x,t). \tag{36}$$

Разобьем каждую блочную строку $\mathscr{C}_i(x,t,u)$, где $i = 1,2,3$, матрицы $\mathscr{C}(x,t,u)$, так, чтобы в каждом блоке содержалось по d, l и p столбцов соответственно. Получим матрицу $\mathscr{C}(x,t,u) = (\mathscr{C}^{i,j}(x,t,u))$, где $i, j = 1,2,3$, состоящую из блоков

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}^{1,j}(x,t,u) &= \operatorname{colon}(\mathscr{C}^1_{1,j}(x,t,u), \mathscr{C}^1_{2,j}(x,t,u), \ldots, \mathscr{C}^1_{d,j}(x,t,u)),\\
\mathscr{C}^{2,j}(x,t,u) &= \operatorname{colon}(\mathscr{C}^2_{1,j}(x,t,u), \mathscr{C}^2_{2,j}(x,t,u), \ldots, \mathscr{C}^2_{l,j}(x,t,u)),\\
\mathscr{C}^{3,j}(x,t,u) &= \operatorname{colon}(\mathscr{C}^3_{1,j}(x,t,u), \mathscr{C}^3_{2,j}(x,t,u), \ldots, \mathscr{C}^3_{p,j}(x,t,u)).
\end{aligned}$$

Согласно этому разбиению запишем $\mathscr{L}^i_k v_{k+1}(x,t) = (\mathscr{L}^i_{k,1} v^1_{k+1}(x,t), \mathscr{L}^i_{k,2} v^2_{k+1}(x,t), \mathscr{L}^i_{k,3} v^3_{k+1}(x,t))$, где $i = 1,2,3$. Пусть $\overline{\mathscr{L}}_k v_{k+1} = (\overline{\mathscr{L}}_{k,1} v^1_{k+1}, \overline{\mathscr{L}}_{k,2} v^2_{k+1}, \overline{\mathscr{L}}_{k,3} v^3_{k+1})$, где каждый блок имеет вид $\overline{\mathscr{L}}_{k,i} v^i_{k+1} = (\mathscr{L}^1_{k,i} v^i_{k+1}, \mathscr{L}^3_{k,i} v^i_{k+1})^\top$. Исключая из уравнения (35) компоненту $\partial_x v^2_{k+1}(x,t)$, используя второе уравнение из (12), получаем

$$\partial_x \overline{v}_{k+1} + (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,1} \partial_x v^1_{k+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,3} \partial_x v^3_{k+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,2}(\mathscr{F}^2(x,t,o) - \mathscr{C}^2(x,t,u_k) v_{k+1}) = \partial_x \overline{\omega}(x,t). \tag{37}$$

Обозначив $\partial_x \overline{v}_{k+1,s} = \partial_x \overline{v}_{k+s+1} - \partial_x \overline{v}_{k+1}$, из (37) находим

$$\begin{gathered}
\partial_x \overline{v}_{k+1,s} + (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s}) v_{k+s+1} - (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} \partial_x v^1_{k+s+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1} \partial_x v^1_{k+1} + \\
+ \overline{\mathscr{L}}_{k+s,3} \partial_x v^3_{k+s+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3} \partial_x v^3_{k+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^2(x,t,u_k) v_{k+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} \mathscr{C}^2(x,t,u_{k+s}) v_{k+s+1} + \\
+ \left(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} - \overline{\mathscr{L}}_{k,2}\right) \mathscr{F}^2(x,t,o) = 0.
\end{gathered} \tag{38}$$

Слагаемые из (38) запишем в более удобной форме:

$$\begin{gathered}
(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s}) v_{k+s+1} - (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1} = (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+s+1} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k v_{k+1,s},\\
\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} \partial_x v^1_{k+s+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1} \partial_x v^1_{k+1} = (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1}) \partial_x v^1_{k+s+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,1} \partial_x \overline{v}_{k+1,s},\\
\overline{\mathscr{L}}_{k+s,3} \partial_x v^3_{k+s+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3} \partial_x v^3_{k+1} = (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3}) \partial_x v^3_{k+s+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,3} \partial_x \overline{v}_{k+1,s},\\
\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} C^3(x,t,u_{k+s}) v_{k+s+1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k) v_{k+1} =\\
= (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_{k+s}) - \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k)) v_{k+s+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k) v_{k+1,s}.
\end{gathered} \tag{39}$$

Перепишем равенство (38), используя выражения (39)

$$\begin{gathered}
\partial_x \overline{v}_{k+1,s} = -(\overline{\mathscr{L}}_{k,1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,3}) \partial_x \overline{v}_{k+1,s} - (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+s+1} + (\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1,s} - \\
- (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1}) \partial_x v^1_{k+s+1} - (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,3} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3}) \partial_x v^3_{k+s+1} - (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} - \overline{\mathscr{L}}_{k,2}) \mathscr{F}^2(x,t,o) + \\
+ (\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_{k+s}) - \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k)) v_{k+s+1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k) v_{k+1,s}.
\end{gathered} \tag{40}$$

Получим оценку по норме вектора $\partial_x \overline{v}_{k+1,s}$. Из (40) находим

$$\begin{gathered}
\left\|\partial_x \overline{v}_{k+1,s}\right\|_* \le \left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k,1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,3}) \partial_x \overline{v}_{k+1,s}\right\|_* + \left\|(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+s+1}\right\|_* + \left\|(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1,s}\right\|_* + \\
+ \left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1}) \partial_x v^1_{k+s+1}\right\|_* + \left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,3} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3}) \partial_x v^3_{k+s+1}\right\|_* + \left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} - \overline{\mathscr{L}}_{k,2}) \mathscr{F}^2(x,t,o)\right\|_* + \\
+ \left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_{k+s}) - \overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k)) v_{k+s+1}\right\|_* + \left\|\overline{\mathscr{L}}_{k,2} \mathscr{C}^3(x,t,u_k) v_{k+1,s}\right\|_*.
\end{gathered} \tag{41}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое из первой части неравенства (41). Аналогично оценке (19) находим

$$\left\|\left(\overline{\mathscr{L}}_{k,1} + \overline{\mathscr{L}}_{k,3}\right) \partial_x \overline{v}_{k+1,s}\right\|_* \le 2\rho c_1 \left\|\partial_x \overline{v}_{k+1,s}\right\|_*. \tag{42}$$

Далее оценим второе слагаемое из правой части (41). Имеем

$$(\partial_x\overline{\mathcal{L}}_{k+s}-\partial_x\overline{\mathcal{L}}_k)v_{k+s+1}=\left(\int\limits_{t^0}^{t}\left(\partial_{x_1}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))+\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))\times\right.\right.$$

$$\left.\times\,\partial_{x_1}u_{j,k+s}-\partial_{x_1}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau))-\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau))\partial_{x_1}u_{j,k}\right)\partial_x x_1 v_{k+s+1}(x_1,\tau)d\tau,\ldots$$

$$\ldots,\int_{t^0}^{t}\left(\partial_{x_d}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))+\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))\partial_{x_d}u_{j,k+s}-\right.$$

$$\left.-\,\partial_{x_d}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau))-\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_1^d(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau))\partial_{x_d}u_{j,k}\right)\partial_x x_d v_{k+s+1}(x_d,\tau)d\tau,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left(\partial_x\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))+\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))\partial_x u_{j,k+s}-\partial_x\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))\partial_x u_{j,k}\right)v_{k+s+1}(x,\tau)d\tau\right)^{\top},$$

где $\partial_x u_{j,k,s}=\partial_x u_{j,k+s}-\partial_x u_{j,k}$. Перепишем последнее равенство, преобразуя выражения в правой части. Получим

$$(\partial_x\overline{\mathcal{L}}_{k+s}-\partial_x\overline{\mathcal{L}}_k)v_{k+s+1}=\left(\int\limits_{t^0}^{t}(\partial_{x_1}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))-\partial_{x_1}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau))+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}((\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))-\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau)))\partial_{x_1}u_{j,k,s}+$$

$$+\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau))\partial_{x_1}u_{j,k,s}+(\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau))-$$

$$\left.-\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau)))\partial_{x_1}u_{j,k})\right)\partial_x x_1 v_{k+s+1}d\tau,\ldots$$

$$\ldots,\int\limits_{t^0}^{t}(\partial_{x_d}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))-\partial_{x_d}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}((\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))-\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau)))\partial_{x_d}u_{j,k,s}+$$

$$+\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau))\partial_{x_d}u_{j,k,s}+(\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))-$$

$$-\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}_d^1(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau)))\partial_{x_d}u_{j,k}))\partial_x x_d v_{k+s+1}d\tau,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}(\partial_x\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))-\partial_x\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}((\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))-\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau)))\partial_x u_{j,k,s}+$$

$$+\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau))\partial_x u_{j,k,s}+(\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))-$$

$$-\,\partial_{u_{j,k}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_k(x,\tau)))\partial_x u_{j,k}))v_{k+s+1}d\tau)^{\top}.$$

В силу шестого и седьмого условий теоремы, матрица $\partial_x \mathscr{C}(x,t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u

$$\left\|\partial_x \mathscr{C}(x,t,u_2) - \partial_x \mathscr{C}(x,t,u_1)\right\|_* \le c_9 \left\|u_2 - u_1\right\|_* \quad \forall u_1, u_2 \in \mathscr{U} \tag{43}$$

и является ограниченной в области $C(\mathscr{U})$. Используя (43), находим

$$\left\|(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+s+1}\right\|_* \le c_{10}\rho \left\|v_{k+s+1}\right\|_* \left\{\left\|u_{k,s}\right\|_* (1 + \left\|\partial_x u_{k,s}\right\|_* + \left\|\partial_x u_k\right\|_*) + \left\|\partial_x u_{k,s}\right\|_*\right\}. \tag{44}$$

Оценим сначала $\left\|\partial_x u_k\right\|_*$. Имеем

$$\partial_x u_{k+1} = \left(\partial_x R(x,t,u_k) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{u_j} R(x,t,u_k)\right) v_{k+1} + R(x,t,u_k)\partial_x v_{k+1}.$$

Тогда

$$\left\|\partial_x u_{k+1}\right\|_* \le c_{11} \left\|v_{k+1}\right\|_* + c_{12} \left\|\partial_x u_k\right\|_*. \tag{45}$$

Из (36) и второго уравнения в (14) находим

$$\left\|\partial_x \overline{v}_{k+1}\right\|_* \le c_{15}, \quad \text{и} \quad \left\|\partial_x v^2_{k+1}\right\|_* \le c_{16},$$

где

$$c_{15} = \frac{c_{14}\rho(1 + \left\|F(x,t,o)\right\|_{C(U)}) + \left\|\partial_x \overline{\omega}(x,t)\right\|_{C(U)}}{1 - c_{13}\rho} \quad \text{и} \quad c_{16} = \left\|\mathscr{F}^2(x,t,o)\right\|_* + c_3 \left\|\mathscr{C}^2(x,t,u)\right\|_*.$$

Следовательно, $\left\|\partial_x v_{k+1}\right\|_* \le c_{17}$, где $c_{17} = \max\{c_{15}, c_{16}\}$. Подставляя в (45) полученную оценку и учитывая (21), находим

$$\left\|\partial_x u_{k+1}\right\|_* \le c_{18}, \quad \text{где} \quad c_{18} = c_3 c_{11} + c_{12} c_{17}. \tag{46}$$

Далее, продифференцируем равенство (23) по переменной x

$$\begin{gathered}\partial_x u_{k,s} = \partial_x R(x,t,u_{k+s-1}) v_{k,s} + \sum_{j=1}^{n} \partial_{u_{j,k+s-1}} R(x,t,u_{k+s-1}) \partial_x u_{k+s-1} v_{k,s} + R(x,t,u_{k+s-1}) \times \\ \times \partial_x v_{k,s} + (\partial_x R(x,t,u_{k+s-1}) - \partial_x R(x,t,u_{k-1})) v_k + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{u_{j,k+s-1}} R(x,t,u_{k+s-1}) \partial_x u_{k+s-1} - \\ - \partial_{u_{j,k-1}} R(x,t,u_{k-1}) \partial_x u_{k-1}) v_k + (R(x,t,u_{k+s-1}) - R(x,t,u_{k-1})) v_k.\end{gathered} \tag{47}$$

Учитывая ограниченность матричных коэффициентов из правой части равенства (47), а также ограниченность векторов v_k, $\partial_x u_k$ и $v_{k,s}$ (оценки (21), (31) и (46)), из (47) получаем

$$\left\|\partial_x u_{k,s}\right\|_* \le c_{19} \left\|\partial_x v_{k,s}\right\|_*.$$

Отдельно оценим компоненту $\partial_x v^2_{k,s}$. Из второго уравнения в (14) получаем

$$\partial_x v^2_{k,s}(x,t) = -(\mathscr{C}^2(x,t,u_{k+s-1}) - \mathscr{C}^2(x,t,u_{k-1})) v_{k+s} - \mathscr{C}^2(x,t,u_{k-1}) v_{k,s}. \tag{48}$$

Из (48) находим

$$\left\|\partial_x v^2_{k,s}(x,t)\right\|_* \le c_{20} \kappa_1^k. \tag{49}$$

Следовательно, из (44), используя (21), (26), (46) и (49) получаем

$$\left\|(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_{k+s} - \partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+s+1}\right\|_* \le c_{21} \kappa_1^k + c_{22}\rho \left\|\partial_x \overline{v}_{k,s}\right\|_*. \tag{50}$$

Перейдем к оценке следующего слагаемого $(\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k) v_{k+1,s}$ из (41). Имеем

$$\partial_x \overline{\mathscr{L}}_k v_{k+1,s} = \left(\int_{t^0}^{t} \left(\partial_{x_1} \mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{u_{j,k+s}} \mathscr{C}_1^1(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau)) \partial_{x_1} u_{j,k+s}\right) \partial_x x_1 v_{k+1,s}(x_1,\tau) d\tau, \ldots\right.$$

$$\ldots, \int_{t^0}^{t}\left(\partial_{x_d}\mathscr{C}^1_d(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau)) + \sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}^1_d(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau))\partial_{x_d}u_{j,k+s}\right)\partial_x x_d v_{k+1,s}(x_d,\tau)d\tau,$$

$$\left.\int_{t_0}^{t}\left(\partial_x\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau)) + \sum_{j=1}^{n}\partial_{u_{j,k+s}}\mathscr{C}^3(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau))\partial_x u_{j,k+s}\right)v_{k+1,s}(x,\tau)d\tau\right)^{\top}.$$

При выполнении условий 6) и 7) настоящей теоремы, матрица $\partial_x\mathscr{C}(x,t,u)$ является ограниченной в области $\mathscr{U}$, следовательно,

$$\left\|(\partial_x\overline{\mathscr{L}}_k)v_{k+1,s}\right\|_* \le c_{23}\rho\left\|v_{k+1,s}\right\|_*. \tag{51}$$

Из (51) с помощью (31) получаем

$$\left\|(\partial_x\overline{\mathscr{L}}_k)v_{k+1,s}\right\|_* \le c_{24}\rho\kappa_1^k. \tag{52}$$

Далее оценим $(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1})\partial_x v^1_{k+s+1}$. Имеем

$$(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1})\partial_x v^1_{k+s+1} = \left(\int_{t^0}^{t}(\mathscr{C}^1_{1,1}(x_1,\tau,u_{k+s}(x_1,\tau)) - \mathscr{C}^1_{1,1}(x_1,\tau,u_k(x_1,\tau)))\partial_x v^1_{k+s+1}(x_1,\tau)d\tau,\right.$$

$$\ldots, \int_{t^0}^{t}(\mathscr{C}^1_{d,1}(x_d,\tau,u_{k+s}(x_d,\tau)) - \mathscr{C}^1_{d,1}(x_d,\tau,u_k(x_d,\tau)))\partial_x v^1_{k+s+1}(x_d,\tau)d\tau,$$

$$\left.\int_{t_0}^{t}(\mathscr{C}^{3,1}(x,\tau,u_{k+s}(x,\tau)) - \mathscr{C}^{3,1}(x,\tau,u_k(x,\tau)))\partial_x v^1_{k+s+1}(x,\tau)d\tau\right)^{\top}.$$

Следовательно,

$$\left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1})\partial_x v^1_{k+s+1}\right\|_* \le c_{25}\rho\left\|u_{k,s}\right\|_*\left\|\partial_x v^1_{k+s+1}(x,t)\right\|_*. \tag{53}$$

Следовательно,

$$\left\|\partial_x v^1_{k+s+1}(x,t)\right\|_* \le c_{26}. \tag{54}$$

Из (53) с учетом (54) и (26) получаем требуемую оценку

$$\left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,1} - \overline{\mathscr{L}}_{k,1})\partial_x v^1_{k+s+1}\right\|_* \le c_{27}\rho\kappa_1^k. \tag{55}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получаем

$$\begin{gathered}
\left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,3} - \overline{\mathscr{L}}_{k,3})\partial_x v^3_{k+s+1}\right\|_* \le c_{28}\rho\kappa_1^k,\\
\left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2} - \overline{\mathscr{L}}_{k,2})\mathscr{F}^2(x,t,o)\right\|_* \le c_{29}\rho\kappa_1^k,\\
\left\|(\overline{\mathscr{L}}_{k+s,2}\mathscr{C}^3(x,t,u_{k+s}) - \overline{\mathscr{L}}_{k,2}\mathscr{C}^3(x,t,u_k))v_{k+s+1}\right\|_* \le c_{30}\rho\kappa_1^k,\\
\left\|\overline{\mathscr{L}}_{k,2}\mathscr{C}^3(x,t,u_k)v_{k+1,s}\right\|_* \le c_{31}\rho\kappa_1^k.
\end{gathered} \tag{56}$$

Из (41), учитывая (42), (50), (52), (55) и (56), имеем

$$\left\|\partial_x\overline{v}_{k+1,s}\right\|_* \le \kappa_2\left\|\partial_x\overline{v}_{k,s}\right\|_* + c_{33}\kappa_1^k, \quad \text{где} \quad \kappa_2 = c_{22}\rho/(1 - 2c_1\rho). \tag{57}$$

При достаточно большом значении l_1 будет $\kappa_2 < 1$. Так как для любых значений k и s выполняется неравенство $\left\|\partial_x\overline{v}_{k,s}\right\|_* \le 2c_{15}$, то из (57) получаем оценку

$$\left\|\partial_x\overline{v}_{k+1,s}\right\|_* \le 2c_{15}\kappa_2^{k+1} + \frac{c_{33}\kappa_1^k}{1 - \kappa_2}.$$

Из неравенства (57) следует, что последовательность $\{\partial_x \overline{v}_k\}$ является фундаментальной. В силу признака Коши последовательность $\{\partial_x \overline{v}_k\}$ сходится по норме $\{\partial_x \overline{v}_k\}_*$ и, следовательно, по норме $\{\partial_x \overline{v}_k\}_{C(U)}$ в пространстве $C(U)$ к некоторой предельной функции $\partial_x \overline{v}(x,t)$. Из неравенства (52) в силу условия 7) настоящей теоремы следует, что последовательность $\{\partial_x \overline{u}_k\}$ также сходится по норме $\|\partial_x \overline{u}_k\|_{C(U)}$ в пространстве $C(U)$ к некоторой предельной функции $\partial_x \overline{u}(x,t)$. Нетрудно показать, что вектор-функция $\partial_x u(x,t) = (\partial_x u^1(x,t), \partial_x u^2(x,t), \partial_x u^3(x,t))^\top$ удовлетворяет начально-краевой задаче, полученной в результате дифференцирования задачи (1), (2) по переменной x. Для этого достаточно перейти к пределу при $k \to \infty$ в уравнении (36) и показать, что предельное соотношение эквивалентно системе дифференциальных уравнений, полученной в результате дифференцирования первого и третьего уравнений системы (32).

Аналогично доказывается дифференцируемость вектора $u(x,t)$ по переменной t.

Перейдем теперь к заключительной части доказательства и покажем, что построенное решение $u(x,t)$ является единственным.

2.5. Единственность решения задачи (1), (2)

Предположим, что задача (1), (2) имеет два различных решения $\tilde{u}^1(x,t)$ и $\tilde{u}^2(x,t)$ в области U. Тогда их разность удовлетворяет неравенству, аналогичному (24),

$$\left\|\tilde{u}^1(x,t) - \tilde{u}^2(x,t)\right\|_* \le k_1 \left\|\tilde{u}^1(x,t) - \tilde{u}^2(x,t)\right\|_*, \quad \text{где} \quad 0 < k_1 < 1.$$

Очевидно, что последнее неравенство выполняется только в случае, когда $\tilde{u}^1(x,t) \equiv \tilde{u}^2(x,t)$ в области U.

Таким образом, теорема доказана.

Сделаем небольшие замечания по поводу условий теоремы.

Замечание 1. В случае, когда преобразующие матрицы $L(x,t,u)$ и $R(x,t,u)$ неизвестны, проверить выполнение условия 7) теоремы не представляется возможным. В этом случае нужно воспользоваться теоремой 4 из работы [7] и проверить, будут ли матрицы $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ обладать достаточной гладкостью в области $\mathcal{U}$, так как в силу теоремы 4 из работы [7] матрицы $A(x,t,u)$, $B(x,t,u)$, $L(x,t,u)$ и $R(x,t,u)$ обладают одним и тем же порядком гладкости.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что условие 8) возникло в результате следующей замены переменной $u_{k+1}(x,t) = R(x,t,u_k(x,t))v_{k+1}(x,t)$ и появления таким образом нелинейного итерационного соотношения, оператор перехода в котором должен быть оператором сжатия. Отметим, что для систем, записанных в канонической форме и для систем с правой преобразующей матрицей $R(x,t)$, не зависящей от переменной u, условие 8) автоматически выполняется. В общем случае для проверки условия 8) за постоянную $\mathcal{M}$ можно взять величину, меньшую $\mathcal{M}_1$, где $\mathcal{M}_1 = (1 - \rho\|C(x,t,u)\|_{C(U)})/(\|\omega(x,t)\|_*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
2. *Демиденко Г.А., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научн. книга, 1998.
3. *Рущинский В.М.* Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов // Вопросы идентификации и моделирования. 1968. С. 8–15.
4. *Soto M. Selva, Tischendorf C.* Numerical analysis of DAEs from coupled circuit and semiconductor simulation // Appl. Numer. Math. 2005. № 53. P. 471–488.
5. *Lucht W.* Partial differential-algebraic systems of second order with symmetric convection // Appl. Numer. Math. 2005. № 53. P. 357–371.
6. *Гайдомак С.В.* Об устойчивости неявной сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1460–1479.
7. *Гайдомак С.В.* Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. С. 608–618.

8. *Гайдомак С.В.* Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1530–1544.
9. *Svinina S.V.* Stability of a Spline Collocation Difference Scheme for a Quasi-Linear Differential Algebraic system of First-Order Partial Differential Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Т. 58. № 11. С. 1775–1791.
10. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1933.
12. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. Л.: Гос. изд. технико-теоретич. литературы, 1950.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Издание второе. М.: Наука, 1977.
14. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
16. *Олейник О.А., Вентцель Т.Д.* Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа // Матем. сборник. 1957. Т. 41(83). № 1. С. 105–128.
17. *Свинина С.В., Свинин А.К.* Об одной начально-краевой задаче для полулинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных индекса (1,0) // Известия вузов. Математика. 2019. № 5. С. 70–82.