ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 11, с. 1823–1835

УДК 519.61

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КАНОНИЗАЦИИ МАТРИЦ[1)]

© 2019 г. В. Г. Волков[1,*], Д. Н. Демьянов[1]

([1] 423812 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19,
Набережночелнинский институт (филиал) КФУ, Россия)

*e-mail: vgvolkov93@mail.ru

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.
Переработанный вариант 04.03.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

Рассматривается задача решения переопределенных, недоопределенных, вырожденных или плохо обусловленных СЛАУ с использованием технологии канонизации матриц. Предлагается модификация существующего алгоритма канонизации, основанная на применении матричных разложений. Получены расчетные формулы, использующие LU-разложение, QR-разложение, LQ-разложение или сингулярное разложение в зависимости от свойств исходной матрицы. Предлагается метод оценки обусловленности задачи канонизации, основанный на вычислении норм матриц, получаемых в результате канонизации, не требующий обращения исходной матрицы. Приведен пошаговый алгоритм канонизации матриц в самом общем случае, реализованный в виде функции на языке программирования MATLAB. Проведено тестирование разработанного приложения на выборке из 100000 случайным образом сгенерированных матриц, подтвердившее корректность и эффективность его работы. Библ. 19. Фиг. 2.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, канонизация матриц, планшетный метод, сингулярное разложение, QR-разложение, LQ-разложение, LU-разложение, число обусловленности, нуль-пространство, пространство строк, пространство столбцов.

DOI: 10.1134/S0044466919110152

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих прикладных задач математического моделирования, теории автоматического управления и теории систем [1]–[6], а также, например, регрессионного анализа часто приводит к переопределенным, недоопределенным или вырожденным СЛАУ. Кроме того, на практике часто возникают обратные задачи с плохо обусловленными матрицами, для решения которых, как правило, невозможно непосредственно вычислить обратную матрицу, применить метод Гаусса или другие классические методы линейной алгебры.

В работах [1]–[6] была разработана и применена теория вложения систем, основывающаяся на анализе алгебраических особенностей оператора системы и позволяющая синтезировать полный класс решений задачи управления данной системой. Для анализа алгебраических особенностей систем в работах [7] и [8] была разработана технология канонизации, которая позволяет строить полный класс решений любых СЛАУ: переопределенных, недоопределенных, вырожденных или плохо обусловленных. Технология канонизации успешно применяется для решения задач теории автоматического управления, например, в работах [9]–[11].

Похожие идеи излагаются в работах Г. Стрэнга [12] и [13], где вводятся понятия правого и левого нуль-пространств, а также ортогональных им пространств строк и столбцов матрицы, и устанавливается связь между LU-разложением матрицы и базисами данных подпространств. Отдельно отметим, что канонизацию матрицы можно рассматривать как обобщение сингулярного разложения, на что было указано в работе [6].

Для получения канонизации матрицы в работе [6] предлагается планшетный метод, основанный на методе Гаусса–Жордана и пригодный как для ручного счета, так и для программной ре-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 17-08-00516).

ализации на ЭВМ. Существует программная реализация планшетного метода канонизации [14], главным достоинством которой является возможность работы с СЛАУ, имеющими дробно-рациональные коэффициенты, что позволяет решать задачи синтеза систем управления, сформулированные в форме матричных передаточных функций. В качестве основных недостатков планшетного метода можно отметить невозможность получения канонизаторов и делителей нуля с заданными свойствами, например, являющихся унитарными, а также теоретическую неустойчивость метода Гаусса.

Из работ по вычислительной линейной алгебре (например, [15] и [16]) известно, что наиболее эффективными являются алгоритмы решения СЛАУ, основанные на матричных разложениях. В частности, наиболее быстрыми методами для квадратных матриц являются те, что основаны на LU-разложении, для матриц произвольного размера – на QR-разложении, максимальная скорость может быть достигнута для эрмитовых положительно-определенных матриц при помощи разложения Холецкого, а для решения вырожденных и плохо обусловленных систем наиболее подходящими являются QR-, LQ- и сингулярное разложения. Следовательно, актуальной задачей является разработка эффективного алгоритма канонизации, основанного на данных разложениях и при этом сохраняющего возможность работы с СЛАУ, имеющими дробно-рациональные коэффициенты.

Проблема вычисления и оценки числа обусловленности задачи поднимается во многих работах, например, в [17] и [18]. Прямое вычисление числа обусловленности матрицы осложнено необходимостью ее обращения, в то время как эффективные методы решения СЛАУ не выполняют его явно. Поэтому практический интерес представляют методы вычисления и оценки числа обусловленности, не требующие обращения матрицы системы.

Таким образом, целью данной работы является разработка алгоритма канонизации матриц, основанного на эффективных матричных разложениях, обладающего достоинствами и свободного от недостатков существующего алгоритма.

В разд. 1 настоящей работы приводятся общие сведения о технологии канонизации матриц (см., например, [6]–[8]). В разд. 2 осуществляется сведение задачи канонизации матрицы к задаче вычисления одного из матричных разложений, разрабатывается алгоритм канонизации, основанный на данных разложениях, и предлагается метод оценки числа обусловленности задачи канонизации, основанный на вычислении норм матриц, получаемых в результате канонизации, который не требует обращения исходной матрицы. В разд. 3 приводятся результаты вычисления канонизации и числа обусловленности тестовых матриц, выполненных в среде MATLAB с помощью предлагаемого алгоритма. В разд. 4 обсуждаются области применения предлагаемого алгоритма.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КАНОНИЗАЦИИ МАТРИЦ

Пусть рассматривается левосторонняя СЛАУ общего вида

$$A_{m\times n} \times X_{n\times p} = B_{m\times p}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее $A_{m\times n}$ – числовая или дробно-рациональная (полиномиальная) матрица коэффициентов размера $m \times n$, $B_{m\times p}$ – числовая или дробно-рациональная (полиномиальная) матрица правых частей размера $m \times p$, $X_{n\times p}$ – матрица с неизвестными числовыми или дробно-рациональными (полиномиальными) элементами размера $n \times p$, m – число строк матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times p}$, n – число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ и строк матрицы $\mathrm{X}_{n\times p}$, p – число столбцов матриц $X_{n\times p}$ и $B_{m\times p}$.

В случае, если матрица $A_{m\times n}$ является квадратной и невырожденной, то есть $m = n$ и $\mathrm{rank}(A_{m\times m}) = m$, то формально решением СЛАУ вида (1.1) является следующее выражение:

$$X_{m\times p} = (A_{m\times m})^{-1} \times B_{m\times p}, \tag{1.2}$$

где $(A_{m\times m})^{-1}$ – обратная матрица. По теореме Кронекера–Капелли решение данной системы существует, если выполняется условие

$$\mathrm{rank}(A_{m\times m}) = \mathrm{rank}(A_{m\times m}\ \ B_{m\times p}). \tag{1.3}$$

Однако, если матрица $A_{m\times n}$ не является квадратной или невырожденной, то есть $m \neq n$ или $\mathrm{rank}(A_{m\times n}) < \min(m, n)$, то выражение $(A_{m\times n})^{-1}$ не имеет смысла. В этом случае, в зависимости от выполнения условий $m < n$ или $m > n$, говорят о том, что система (1.1) является недоопределенной или переопределенной, соответственно, записать аналитическое решение в явном виде (1.2) оказывается невозможным.

В работах [6]–[8] предлагается обобщение подхода, описываемого выражениями (1.2) и (1.3). Данный метод авторы называют методом канонизации. Он заключается в нахождении в общем случае пятерки матриц

$$(\overline{A}^L_{(m-r)\times m} \ \ \overline{A}^R_{n\times(n-r)} \ \ \tilde{A}^L_{r\times m} \ \ \tilde{A}^R_{n\times r} \ \ \tilde{A}_{n\times m}). \tag{1.4}$$

Здесь и далее матрица $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$ называется левым, а $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$ – правым делителями нуля максимального ранга, $\tilde{A}^L_{r\times m}$ – левым канонизатором (делителем единицы), $\tilde{A}^R_{n\times r}$ – правым канонизатором (делителем единицы) и $\tilde{A}_{n\times m}$ – сводным канонизатором, r – ранг матрицы $A_{m\times n}$.

Известны соотношения (строго обоснованные в работах [6] и [8]), связывающие вышеописанные матрицы

$$\tilde{A}^L_{r\times m} \times A_{m\times n} \times \tilde{A}^R_{n\times r} = I_{r\times r}, \tag{1.5}$$

$$\overline{A}^L_{(m-r)\times m} \times A_{m\times n} = O_{(m-r)\times n}, \tag{1.6}$$

$$A_{m\times n} \times \overline{A}^R_{n\times()} = O_{m\times(n-r)}, \tag{1.7}$$

$$\tilde{A}_{n\times m} = \tilde{A}^R_{n\times r} \times \tilde{A}^L_{r\times m}. \tag{1.8}$$

Здесь $I_{r\times r}$ – единичная матрица размера $r\times r$, а $O_{(m-r)\times n}$ и $O_{m\times(n-r)}$ – нулевые матрицы соответствующих размеров. Учитывая основную теорему линейной алгебры (см., например, [12] и [13]), из соотношений (1.5)–(1.8) следует, что левый делитель нуля $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$ составлен из строк, являющихся базисом левого нуль-пространства матрицы $A_{m\times n}$, правый делитель нуля $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$ – из столбцов, являющихся базисом (правого) нуль-пространства матрицы $A_{m\times n}$, строки левого канонизатора $\tilde{A}^L_{r\times m}$ непосредственно связаны с базисом пространства строк матрицы $A_{m\times n}$, а столбцы правого канонизатора $\tilde{A}^R_{n\times r}$ – с базисом пространства столбцов матрицы $A_{m\times n}$ [6].

Используя соотношения (1.5) и (1.8), можно показать, что сводный канонизатор $\tilde{A}_{m\times n}$ является обобщением понятия обратной матрицы $(A_{m\times n})^{-1}$. Кроме того, в работе [8] доказываются теоремы, утверждающие, что на основе условия (1.3) и канонизации (1.4) можно сформулировать условие разрешимости СЛАУ (1.1)

$$\overline{A}^L_{(m-r)\times m} \times B_{m\times p} = O_{(m-r)\times p} \tag{1.9}$$

и в совокупности с соотношениями (1.5) и (1.8) записать полный класс решений СЛАУ (1.1) в виде

$$\{X_{n\times p}\}_\eta = \tilde{A}_{n\times m} \times B_{m\times p} + \overline{A}^R_{n\times(n-r)} \times \eta_{(n-r)\times p}. \tag{1.10}$$

Здесь $\eta_{(n-r)\times p}$ – матрица размера $(n-r)\times p$ с произвольными элементами $n_{i,j}$, $i=\overline{1,(n-r)}$, $j=\overline{1,p}$. Обозначением $\{X_{n\times p}\}_\eta$ указывают на множественность возможных решений $X_{n\times p}$, зависящих от матричного параметра $\eta_{(n-r)\times p}$.

Таким образом, условие (1.9) и выражение (1.10) дают полное решение СЛАУ (1.1) в аналитическом виде. Следует отметить, что аналогичные результаты можно получить для правосторонних и двусторонних СЛАУ (см., например, [6] и [8]).

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ КАНОНИЗАЦИИ К ЗАДАЧЕ МАТРИЧНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

2.1. Планшетный метод канонизации

Известно, что наиболее распространенным подходом к решению СЛАУ вида (1.1) является метод Гаусса [13]–[16]. В работах [6] и [8] предлагается так называемый планшетный метод вычисления канонизации (1.4), основанный на методе Гаусса–Жордана для вычисления обратной матрицы и заключающийся в применении эквивалентных преобразований к исходной матрице

$A_{m\times n}$ и двум единичным матрицам $I_{m\times m}$ и $I_{n\times n}$, приводящих матрицу $A_{m\times n}$ к каноническому представлению:

$$\begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

а единичные матрицы $I_{m\times m}$ и $I_{n\times n}$ к видам

$$A^L = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L_{r\times m} \\ \overline{A}^L_{(m-r)\times m} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$A^R = [\tilde{A}^R_{n\times r} \;\; \overline{A}^R_{n\times(n-r)}] \tag{2.3}$$

соответственно.

Рассматривая выражения (2.1)–(2.3), а также соотношения (1.5)–(1.8), можно видеть, что для них должно выполняться следующее равенство

$$A^L \times A_{m\times n} \times A^R = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Известна программная реализация планшетного метода вычисления канонизации (1.4) [14], использующая метод исключения для приведения матрицы $A_{m\times n}$ к каноническому виду (0.1) и запоминающая в памяти ЭВМ применяемые к матрице $A_{m\times n}$ элементарные преобразования строк и столбцов, в совокупности составляющие матрицы (2.2) и (2.3) соответственно.

Далее рассматриваются возможности сведения задачи канонизации матрицы к задаче вычисления матричных разложений.

2.2. Канонизация на основе сингулярного разложения

Известно (например, из теорем 5.1 и 5.2 в [15]), что сингулярное разложение является наиболее точным инструментом для оценки ранга матрицы, вычисления ортонормированных базисов четырех фундаментальных подпространств матрицы: пространств строк и столбцов, а также правого и левого нуль-пространств. В работе [6] указывается, что задача канонизации эквивалентна задаче вычисления сингулярного разложения матрицы $A_{m\times n}$

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} \times \Sigma_{\mathrm{m\times n}} \times (V_{n\times n})^* . \tag{2.5}$$

Здесь матрицы $U_{m\times m}$ и $V_{n\times n}$ суть унитарные квадратные матрицы размеров $m\times m$ и $n\times n$ соответственно; матрица $\Sigma_{\mathrm{m\times n}}$ состоит из нулевых элементов всюду, кроме главной диагонали, где первые r ненулевых элементов представляют собой сингулярные числа матрицы $A_{m\times n}$, расставленные по убыванию. Следует отметить, что для задачи канонизации важными особенностями сингулярного разложения являются простота обращения унитарных матриц $U_{m\times m}$ и $V_{n\times n}$ (посредством эрмитового сопряжения) и псевдообращения матрицы $\Sigma_{m\times n}$.

После подстановки полученного разложения (2.5) в исходную СЛАУ (1.1) получим следующую систему

$$\Sigma_{m\times n} \times (V_{n\times n})^* \times X_{n\times p} = (U_{m\times m})^* \times B_{m\times p}. \tag{2.6}$$

Учитывая, что матрица $\Sigma_{m\times n}$ в СЛАУ (2.6) в общем случае может являться прямоугольной и вырожденной, и осуществляя процедуру ее псевдообращения, получаем

$$(\Sigma_{m\times n})^+ = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

где σ_k – сингулярные числа матрицы $A_{m\times n}$, $k = \overline{1,r}$. Здесь и далее будем обозначать псевдообращение матрицы A как A^{+}. Используя псевдообратную матрицу (2.7), можно записать частное и общее решения системы (1.1)

$$X'_{n\times p} = V_{n\times r} \times \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} \times (U_{m\times r})^* \times B_{m\times p}, \tag{2.8}$$

$$X''_{n\times p} = V_{n\times(n-r)} \times \eta_{(n-r)\times p}. \tag{2.9}$$

Здесь $X'_{n\times p}$ – частное решение неоднородной системы (1.1), $X''_{n\times p}$ – общее решение соответствующей однородной системы, $\eta_{(n-r)\times p}$ – произвольная матрица подходящего размера. Используя решения (2.8) и (2.9), можно записать полный класс решений СЛАУ (1.1)

$$\{X_{n\times p}\}_\eta = V_{n\times r} \times \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} \times (U_{m\times r})^* \times B_{m\times p} + V_{n\times(n-r)} \times \eta_{(n-r)\times p}. \tag{2.10}$$

Сравнивая выражения (1.10) и (2.10), и учитывая, что для правосторонней СЛАУ можно провести аналогичные рассуждения, запишем следующие формулы:

$$\tilde{A}_{n\times m} = V_{n\times r} \times \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} \times (U_{m\times r})^*, \tag{2.11}$$

$$\tilde{A}^R_{n\times r} = V_{n\times r} \times \left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r}\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

$$\tilde{A}^L_{r\times m} = \left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r}\right)^{1/2} \times (U_{m\times r})^*, \tag{2.13}$$

$$\overline{A}^R_{n\times(n-r)} = V_{n\times(n-r)}, \tag{2.14}$$

$$\overline{A}^L_{(m-r)\times m} = (U_{m\times(m-r)})^*. \tag{2.15}$$

Следует отметить, что в виду равенства (1.8), при выводе выражений для левого и правого канонизаторов у разработчика имеется свобода выбора во внесении диагонального блока $\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r}$ в выражение (2.12) или (2.13). Иными словами, выражения (2.12) и (2.13) при необходимости могут быть записаны в виде

$$\tilde{A}^R_{n\times r} = V_{n\times r} \times \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} \quad \text{и} \quad \tilde{A}^L_{r\times m} = (U_{m\times r})^*$$

или

$$\tilde{A}^R_{n\times r} = V_{n\times r} \quad \text{и} \quad \tilde{A}^L_{r\times m} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)_{r\times r} \times (U_{m\times r})^*.$$

2.3. Канонизация на основе QR- и LQ-разложений

В целях повышения эффективности вычислительного процесса сведем задачу канонизации исходной прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$ к задаче вычисления QR-разложения. Будем использовать QR-разложение матрицы $A_{m\times n}$

$$A_{m\times n} \times E_{n\times n} = Q_{m\times m} \times R_{m\times n}. \tag{2.16}$$

Здесь $E_{n\times n}$ – квадратная матрица перестановок столбцов матрицы $A_{m\times n}$, выбирающаяся из условия линейной независимости первых r столбцов, $Q_{m\times m}$ – квадратная унитарная матрица размера

$m \times m$, $R_{m\times n}$ – прямоугольная верхняя треугольная матрица размера $m \times n$. Заметим, что матрицу $R_{m\times n}$ в разложении (2.16) можно представить в виде блочной конструкции

$$R_{m\times n} = \begin{bmatrix} R_{r\times r} & R_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Здесь $R_{r\times r}$ – квадратная, обратимая, верхняя треугольная матрица размера $r \times r$, $R_{r\times(n-r)}$ – в общем случае прямоугольная матрица соответствующих размеров. Заметим, что обратная матрица для $R_{m\times n}$, вообще говоря, не существует, однако, используя обобщенное дополнение Шура, можно получить обобщенную обратную матрицу [6].

Теорема 1. *Канонизация* (1.4) *может быть найдена на основе QR-разложения* (2.16) *матрицы* $A_{m\times n}$ *по следующим формулам*:

$$\overline{A}^{R}_{n\times(n-r)} = E_{n\times n} \times \begin{bmatrix} -(R_{r\times r})^{-1} \times R_{r\times(n-r)} \\ I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\overline{A}^{L}_{(m-r)\times m} = (Q_{m\times(m-r)})^{*}, \tag{2.19}$$

$$\tilde{A}^{R}_{n\times r} = E_{n\times n} \times \begin{bmatrix} (R_{r\times r})^{-1} \\ O_{(n-r)\times r} \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\tilde{A}^{L}_{r\times m} = (Q_{m\times r})^{*}, \tag{2.21}$$

$$\tilde{A}_{n\times m} = E_{n\times n} \times \begin{bmatrix} (R_{r\times r})^{-1} \\ O_{(n-r)\times r} \end{bmatrix} \times (Q_{m\times r})^{*}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Будем рассматривать QR-разложение исходной матрицы $A_{m\times n}$ (2.16). Используя представление (2.17) прямоугольной матрицы $R_{m\times n}$, запишем QR-разложение (2.16) следующим образом:

$$A_{m\times n} \times E_{n\times n} = Q_{m\times m} \times \begin{bmatrix} R_{r\times r} & R_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Учитывая, что $Q_{m\times m}$ является квадратной унитарной матрицей, можно записать выражение (2.23) в виде

$$(Q_{m\times m})^{*} \times A_{m\times n} \times E_{n\times n} = \begin{bmatrix} R_{r\times r} & R_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Представим матрицу, стоящую в правой части (2.24), в виде произведения матрицы из правой части (2.4) и блочной верхней треугольной обратимой

$$(Q_{m\times m})^{*} \times A_{m\times n} \times E_{n\times n} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{r\times r} & R_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & I_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Обращая данную блочную верхнюю треугольную и умножая левую и правую части уравнения (2.25) на нее справа, получим

$$(Q_{m\times m})^{*} \times A_{m\times n} \times E_{n\times n} \times \begin{bmatrix} (R_{r\times r})^{-1} & -(R_{r\times r})^{-1} \times R_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Сравнивая равенства (2.4) и (2.26), и учитывая (2.2) и (2.3), получаем формулы (2.18)–(2.22).

Помимо QR-разложения для канонизации матрицы $A_{m\times n}$ можно применить и ее LQ-разложение

$$E_{m\times m} \times A_{m\times n} = L_{m\times n} \times Q_{n\times n}. \tag{2.27}$$

Здесь $E_{m\times m}$ – квадратная матрица перестановок строк матрицы $A_{m\times n}$, выбирающаяся из условия линейной независимости первых r строк, $L_{m\times n}$ – прямоугольная нижняя треугольная матрица размера $m \times n$, $Q_{n\times n}$ – квадратная унитарная матрица размера $n \times n$.

Теорема 2. *Канонизация* (1.4) *может быть найдена на основе LQ-разложения* (2.27) *матрицы* $A_{m\times n}$ *по следующим формулам*:

$$\bar{A}^R_{n\times(n-r)} = (Q_{(n-r)\times n})^*, \tag{2.28}$$

$$\bar{A}^L_{(m-r)\times m} = [-L_{(m-r)\times r}\times\left(L_{r\times r}\right)^{-1}\ \ I_{(m-r)\times(m-r)}]\times E_{m\times m}, \tag{2.29}$$

$$\tilde{A}^R_{n\times r} = (Q_{r\times n})^*, \tag{2.30}$$

$$\tilde{A}^L_{r\times m} = [(L_{r\times r})^{-1}\ \ O_{r\times(m-r)}]\times E_{m\times m}, \tag{2.31}$$

$$\tilde{A}_{n\times m} = (Q_{r\times n})^*\times[(L_{r\times r})^{-1}\ \ O_{r\times(m-r)}]\times E_{m\times m}. \tag{2.32}$$

Доказательство. Доказательство справедливости формул (2.28)–(2.32) вытекает из доказательства теоремы 1, если учесть, что LQ-разложение матрицы $A_{m\times n}$ совпадает с QR-разложением матрицы $(A_{m\times n})^*$.

2.4. Канонизация на основе LU-разложения

Известно, например, из работ [15] и [16], что наиболее быстрыми алгоритмами разложения произвольных квадратных матриц являются алгоритмы вычисления LU-разложения, поэтому сведем задачу канонизации исходной квадратной матрицы $A_{m\times m}$ к задаче вычисления LU-разложения. Будем использовать разложение следующего вида:

$$P_{m\times m}\times A_{m\times m}\times Q_{m\times m} = L_{m\times m}\times U_{m\times m}. \tag{2.33}$$

Здесь матрицы $P_{m\times m}$, $Q_{m\times m}$ – матрицы перестановок строк и столбцов матрицы $A_{m\times m}$, выбирающиеся из условия линейной независимости первых r строк и столбцов, соответственно, $L_{m\times m}$ – невырожденная квадратная нижняя треугольная матрица размера $m\times m$, $U_{m\times m}$ – квадратная, возможно вырожденная, верхняя треугольная матрица размера $m\times m$. Заметим, что по аналогии с QR-разложением матрицу $U_{m\times m}$ в разложении (2.33) можно представить в виде блочной конструкции:

$$U_{m\times m} = \begin{bmatrix} U_{r\times r} & U_{r\times(m-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Здесь $U_{r\times r}$ – квадратная, обратимая, верхняя треугольная матрица размера $r\times r$, $U_{r\times(m-r)}$ – необратимая, в общем случае прямоугольная матрица размера $r\times(m-r)$.

Теорема 3. *Канонизация* (14) *может быть найдена на основе LU-разложения* (2.33) *матрицы* $A_{m\times m}$ *по следующим формулам*:

$$\bar{A}^R_{m\times(m-r)} = Q_{m\times m}\times\begin{bmatrix} -(U_{r\times r})^{-1}\times U_{r\times(m-r)} \\ I_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

$$\bar{A}^L_{(m-r)\times m} = L^{-1}_{(m-r)\times m}\times P_{m\times m}, \tag{2.36}$$

$$\tilde{A}^R_{m\times r} = Q_{m\times m}\times\begin{bmatrix} (U_{r\times r})^{-1} \\ O_{(m-r)\times r} \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\tilde{A}^L_{r\times m} = L^{-1}_{r\times m}\times P_{m\times m}, \tag{2.38}$$

$$\tilde{A}_{m\times m} = Q_{m\times m}\times\begin{bmatrix} (U_{r\times r})^{-1} \\ O_{(m-r)\times r} \end{bmatrix}\times L^{-1}_{r\times m}\times P_{m\times m}\ . \tag{2.39}$$

Здесь через $L^{-1}_{r\times m}$ и $L^{-1}_{(m-r)\times m}$ обозначены матрицы, составленные из первых r и последних $(m-r)$ строк матрицы $L^{-1}_{m\times m}$ соответственно.

Доказательство. Доказательство справедливости формул (2.35)–(2.39) строится с учетом (2.34) по аналогии с доказательством теоремы 1.

2.5. Алгоритм канонизации на основе матричных разложений

Основываясь на полученных результатах, сформулируем алгоритм, вычисляющий канонизацию произвольной числовой или дробно-рациональной (полиномиальной) прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$.

АЛГОРИТМ

Шаг 1. Определить размер матрицы $A_{m\times n}$.

Шаг 2. Если $m > n$, то перейти к шагу 3, если $m < n$, то перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 7.

Шаг 3. Вычислить матрицы $Q_{m\times m}$ и $R_{m\times n}$, осуществив QR-разложение (2.16) матрицы $A_{m\times n}$.

Шаг 4. Вычислить канонизацию (1.4), сформировав матрицы $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$, $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$, $\tilde{A}^R_{n\times r}$, $\tilde{A}^L_{r\times m}$ и $\tilde{A}_{n\times m}$ в соответствии с формулами (2.18)–(2.22). Перейти к шагу 11.

Шаг 5. Вычислить матрицы $L_{m\times n}$ и $Q_{n\times n}$, осуществив LQ-разложение (2.27) матрицы $A_{m\times n}$.

Шаг 6. Вычислить канонизацию (1.4), сформировав матрицы $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$, $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$, $\tilde{A}^R_{n\times r}$, $\tilde{A}^L_{r\times m}$ и $\tilde{A}_{n\times m}$ в соответствии с формулами (2.28)–(2.32). Перейти к шагу 11.

Шаг 7. Вычислить матрицы $P_{m\times m}$, $L_{m\times m}$ и $U_{m\times m}$, осуществив LU-разложение (2.33) матрицы $A_{m\times n}$.

Шаг 8. Вычислить канонизацию (1.4), сформировав матрицы $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$, $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$, $\tilde{A}^R_{n\times r}$, $\tilde{A}^L_{r\times m}$ и $\tilde{A}_{n\times m}$ в соответствии с формулами (2.35)–(2.39). Перейти к шагу 11.

Шаг 9. Вычислить матрицы $U_{m\times m}$, $\Sigma_{m\times n}$ и $V_{n\times n}$, осуществив сингулярное разложение (2.5) матрицы $A_{m\times n}$.

Шаг 10. Вычислить канонизацию (1.4), сформировав матрицы $\overline{A}^R_{n\times(n-r)}$, $\overline{A}^L_{(m-r)\times m}$, $\tilde{A}^R_{n\times r}$, $\tilde{A}^L_{r\times m}$ и $\tilde{A}_{n\times m}$ в соответствии с формулами (2.11)–(2.15). Перейти к шагу 13.

Шаг 11. Вычислить число обусловленности $\kappa(A)$.

Шаг 12. Если $(\kappa(A))^{-1} < u\cdot\|A\|\cdot\max(m,n)$, то перейти к шагу 9, иначе перейти к шагу 13.

Шаг 13. Конец алгоритма.

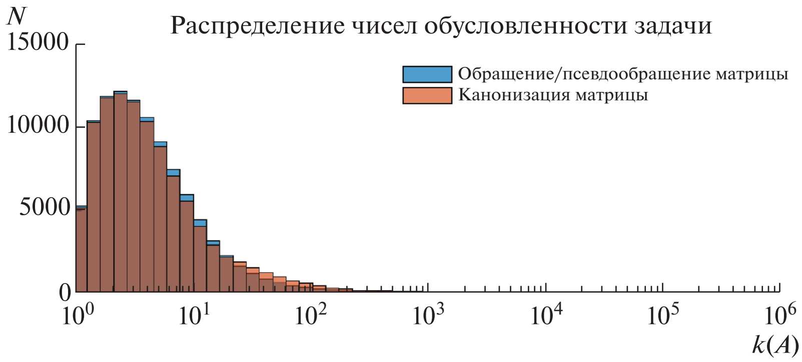
Следует отметить, что в большинстве пакетов прикладных программ (MATLAB, Wolfram Mathematica, Mathcad и т.д.) для вычисления матричных разложений, используемых предлагаемым алгоритмом, существуют эффективные вычислительные процедуры. Отметим, что шаг 11 предлагаемого алгоритма предполагает вычисление числа обусловленности $\kappa(A)$ матрицы $A_{m\times n}$, а шаг 12 – сравнение $(\kappa(A))^{-1}$ с допустимым уровнем точности $u\cdot\|A\|\cdot\max(m,n)$, зависящим от машинной точности u, нормы исходной матрицы $\|A\|$ и максимальной размерности матрицы $\max(m,n)$ (см., например, [15] и [16]).

Далее предлагается способ вычисления числа обусловленности, возникающий в результате вычисления канонизации (1.4), позволяющий не осуществлять явного обращения исходной матрицы. Данный способ может быть особенно полезным в случаях, когда исходная матрица является прямоугольной или вырожденной.

2.6. Оценка числа обусловленности задачи канонизации

В вычислительной линейной алгебре для оценки обусловленности задачи, характеризующей поведение решения в условиях наличия достаточно малых возмущений исходных данных, как правило, используют относительное число обусловленности. Существуют теоремы (например, теоремы 12.1 и 12.2 из [15]), доказывающие, что в случае СЛАУ число обусловленности задачи вычисления правой части $B_{m\times p}$ по известной матрице $X_{m\times p}$ и задачи вычисления неизвестной матрицы $X_{m\times p}$ по известным матрицам $A^{-1}_{m\times m}$ и $B_{m\times p}$ эквивалентно числу обусловленности квадратной невырожденной матрицы $A_{m\times m}$

$$\kappa(A_{m\times m}) = \|A_{m\times m}\|\cdot\|A^{-1}_{m\times m}\|. \tag{2.40}$$



Фиг. 1. Распределение чисел обусловленности для рассматриваемой выборки.

Кроме того, хотя обычно говорят о числе обусловленности квадратной невырожденной матрицы, известны также способы распространения данного понятия и на системы с прямоугольными матрицами, основанные, например, на замене обратной матрицы в формуле (2.40) на псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза [15]

$$\kappa(A_{m\times n}) = \|A_{m\times n}\| \cdot \|A^{+}_{n\times m}\|. \tag{2.41}$$

По аналогии с (2.41), в данной работе также будем использовать более широкое определение числа обусловленности, основанное на формальной замене обратной матрицы в формуле (2.40) на сводный канонизатор $\tilde{A}_{n\times m}$

$$\kappa\left(A_{m\times n}\right) = \|A_{m\times n}\| \cdot \|\tilde{A}_{n\times m}\|. \tag{2.42}$$

Рассматривая оценку числа обусловленности (2.42) можно видеть, что оно не требует обращения исходной матрицы. Вместо этого используется сводный канонизатор $\tilde{A}_{n\times m}$, получаемый по формуле (1.8). Используя формулу для вычисления сводного канонизатора (1.8) и свойства нормы, можно заменить равенство (2.42), на следующее неравенство:

$$\kappa(A_{m\times n}) \le \|A_{m\times n}\| \cdot \|\tilde{A}^{R}_{n\times r}\| \cdot \|\tilde{A}^{L}_{r\times m}\|, \tag{2.43}$$

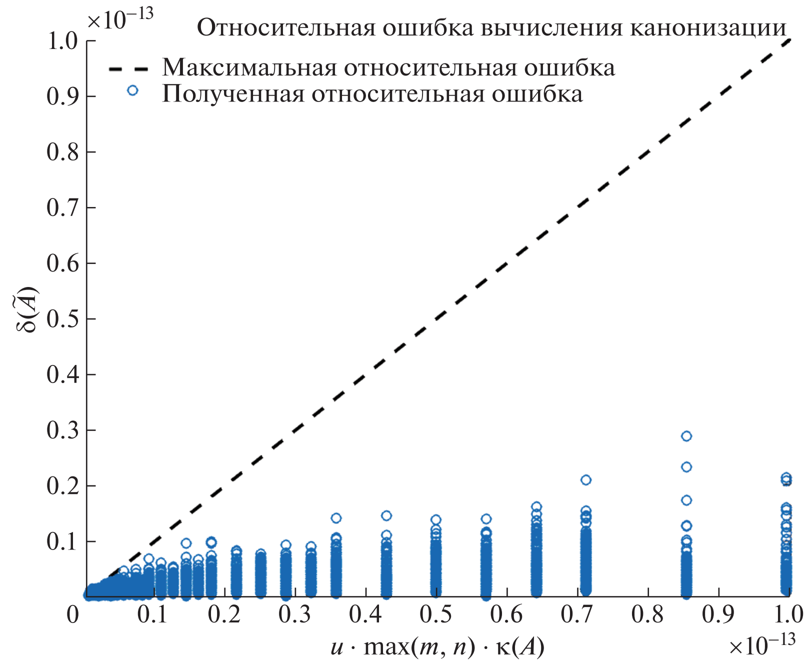
представляющее собой оценку числа обусловленности (2.42).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для иллюстрации работы предлагаемого алгоритма осуществим канонизацию выборки объемом $N = 100\,000$ в общем случае прямоугольных матриц. Количества строк и столбцов матриц являются независимыми дискретными случайными величинами, равномерно распределенными в интервале $[2,10]$. Элементы матриц также являются независимыми дискретными случайными величинами, равномерно распределенными в интервале $[-10,10]$. На фиг. 1 представлены распределения чисел обусловленности задач обращения и вычисления канонизации матрицы для данной выборки, вычисляемые по формулам (2.40), (2.41) и (2.43) соответственно; на оси абсцисс отложено число обусловленности, на оси ординат – количество матриц с соответствующим числом обусловленности. По гистограммам видно, что предлагаемая оценка числа обусловленности (2.43) практически идентична оценкам (2.40), (2.41). Отметим, что количество матриц с большим числом обусловленности $(\kappa(A) > 10^3)$ достаточно невелико, однако не равно нулю. На фиг. 2 показаны значения относительной ошибки канонизации, определяемые по следующей формуле:

$$\delta\tilde{A}_{n\times m} = \left\|\tilde{A}^{L}_{r\times m} \times A_{m\times n} \times \tilde{A}^{R}_{n\times r} - I_{r\times r}\right\|.$$

Видно, что относительная ошибка $\delta\tilde{A}_{n\times m}$ не превышает $u \cdot \max(m,n) \cdot \kappa\left(A_{m\times n}\right)$ при любых размерах и значениях числа обусловленности матрицы $A_{m\times n}$.



Фиг. 2. Относительная ошибка вычисления канонизации для рассматриваемой выборки.

Далее рассмотрим процесс канонизации плохо обусловленной обратной по отношению к матрице Гильберта матрицы размера 5×5

$$T = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & 18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что она выбрана в качестве примера, поскольку в отличие от матрицы Гильберта ее элементы являются целыми числами и точно представимы числами с плавающей точкой, что исключает возможность влияния на процесс канонизации неточности представления исходных данных.

Осуществляя ее канонизацию в соответствии с предлагаемым алгоритмом, получаем следующие матрицы:

$$\tilde{T}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.7500 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0.7619 & 0.3571 & 0 \\ 0 & 0.6000 & 0.8571 & 0.9643 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.8333 & 0.7143 & 0.6250 & 0.5556 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}^R = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0152 & -0.1200 & -0.3556 & 1.0000 \\ 0 & 0.0008 & -0.0167 & -0.1111 & 0.5000 \\ 0 & 0 & -0.0024 & -0.0423 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0139 & 0.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2000 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица T является невырожденной, матрицы $\overline{T}^L$ и $\overline{T}^R$ не существуют. Числа обусловленности, вычисленные по формулам (2.40) и (2.42), совпадают и равны 4.7661×10^5; максимальная ошибка составляет $u \cdot \max(m, n) \cdot \kappa(A_{m\times n}) = 2.9104 \times 10^{-10}$, а относительная ошибка равна $\delta\tilde{A}_{n\times m} = 6.5157 \times 10^{-12}$.

Теперь рассмотрим процесс канонизации прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 4 & 9 \\ -1 & -9 & -8 & -7 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Осуществляя ее канонизацию в соответствии с предлагаемым алгоритмом, получаем следующие матрицы:

$$\overline{A}^R = \begin{bmatrix} -0.4459 & -0.7408 \\ -0.6325 & 0.1059 \\ 0.6203 & -0.5116 \\ 0.0904 & 0.2985 \\ 0.0904 & 0.2985 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}^L = \begin{bmatrix} -0.0642 & 0 & 0 \\ 0.2271 & 0.2420 & 0 \\ 0.0120 & 0.0819 & 0.1420 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}^R = \begin{bmatrix} -0.0642 & -0.0149 & 0.4980 \\ -0.5774 & -0.1344 & -0.4872 \\ -0.5132 & -0.1195 & -0.2753 \\ -0.2566 & -0.7858 & 0.4684 \\ -0.5774 & 0.5916 & 0.4684 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.0067 & 0.0372 & 0.0707 \\ 0.0007 & -0.0724 & -0.0692 \\ 0.0025 & -0.0515 & -0.0391 \\ -0.1563 & -0.1518 & 0.0665 \\ 0.1770 & 0.1815 & 0.0665 \end{bmatrix}.$$

Поскольку все строки исходной матрицы A линейно независимы, ее левый делитель нуля (матрица $\overline{A}^L$) не существует.

Числа обусловленности, вычисляемые по формулам (2.41) и (2.43), оказались приблизительно равны – разница между ними оказалась равной 8.8818×10^{-16}, кроме того, поскольку канонизация данной матрицы осуществлялась методом LQ-разложения, оценка ее числа обусловленности является точной, то есть совпадает с числом обусловленности, полученным по формуле (2.42). Максимальная ошибка составляет $u \cdot \max(m, n) \cdot \kappa(A_{m\times n}) = 4.4409 \times 10^{-15}$, а относительная ошибка равна $\delta\tilde{A}_{n\times m} = 7.2075 \times 10^{-16}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Определим области применения предлагаемого алгоритма канонизации. Отметим, что алгоритмы матричных разложений являются устойчивыми и могут быть применены к матрицам любого размера. Кроме того, из работы [14] известно, что для решения плохо обусловленных СЛАУ целесообразно применять алгоритм сингулярного разложения с последующей аппроксимацией плохо обусловленной матрицы $\Sigma_{m\times n}$ хорошо обусловленной матрицей более низкого ранга. Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма канонизации можно решать переопределенные, недоопределенные, вырожденные, а также плохо обусловленные СЛАУ. Однако следует отметить, что вычислительная сложность такого разложения, например, методом Голуба–Райнша (Golub-Reinsch method) [19] составляет порядка $4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$, а методом R-SVD – порядка $4m^2n + 22n^3$ операций с плавающей точкой, что существенно медленнее стандартных алгоритмов вычисления QR- или LU-разложений. Так, например, алгоритм QR-разложения, основанный на преобразованиях Хаусхолдера, также является устойчивым и требует лишь порядка $2mn^3 - 2/3n^3$ операций, а для квадратных матриц LU-разложение позволяет выполнить канонизацию существенно быстрее, поскольку требует лишь порядка $2/3m^3$ операций с плавающей точкой [15]. Таким образом, для вычисления канонизации представляется целесообразным использовать сингулярное разложение только в случаях, когда требуется повышенная точность результата канонизации или матрица является плохо обусловленной. Во всех остальных случаях желательно использовать более эффективные с вычислительной точки зрения алгоритмы, например, QR- и LU-разложения.

Следует отметить, что хотя LU-разложение может применяться и к прямоугольным матрицам, более целесообразным представляется в таких случаях использовать QR- или LQ-разложения, поскольку исходная прямоугольная матрица по определению является вырожденной и требует более точных методов вычисления базисов фундаментальных подпространств матрицы $A_{m\times n}$.

Отдельно укажем на тот факт, что формулы (2.18)–(2.22) и (2.28)–(2.32) напрямую не требуют обратимости матриц $R_{m\times n}$ и $L_{m\times n}$ соответственно, что позволяет осуществлять на их основе канонизацию матриц произвольного ранга и размера. Кроме того, хотя в формулах (2.18), (2.20), (2.29) и (2.31) формально присутствует обращение матриц $R_{r\times r}$ и $L_{r\times r}$, оно, с учетом того, что они являются треугольными, на практике сводится к применению эффективных алгоритмов прямой и обратной подстановок. Как и в случае с QR-разложением, в формулах (2.35)–(2.39) формально присутствуют операции обращения матриц $L_{m\times m}$ и $U_{r\times r}$, однако обе матрицы являются треугольными обратимыми и, следовательно, для вычисления можно также применять эффективные алгоритмы прямой и обратной подстановок.

Отметим, что на практике также полезным свойством канонизации на основе QR- или LQ-разложений является возможность получения ортонормированного левого или правого делителя нуля и канонизатора, позволяющих более тонко контролировать норму решения (1.10), варьируя произвольную матрицу $\eta_{(n-r)\times p}$. Также заметим, что формула оценки числа обусловленности (2.43) с вычислительной точки зрения существенно проще формулы (2.42), поскольку не требует перемножения матриц $\tilde{A}^R_{n\times r}$ и $\tilde{A}^L_{r\times m}$. Равенство в (2.43) достигается в случае, если один из канонизаторов, правый или левый, является ортонормированным. Учитывая формулы (2.21) и (2.30), можно видеть, что данное условие выполняется при вычислении канонизации методами QR- или LQ-разложений, в результате которых оказывается унитарной матрица $\tilde{A}^L_{r\times m}$ или $\tilde{A}^R_{n\times r}$ соответственно. Если для оценки обусловленности задачи канонизации используется формула (2.42), то непосредственно перед ее вычислением возникает необходимость вычисления сводного канонизатора $\tilde{A}_{n\times m}$ путем перемножения правого и левого канонизаторов, что несколько снижает ее вычислительную эффективность перед оценкой (2.43). Таким образом, алгоритм канонизации матрицы, основанный на QR- или LQ-разложении, позволяет использовать более эффективную с вычислительной точки зрения оценку обусловленности (2.43) без потери точности в сравнении с оценкой (2.42).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложены новые методы нахождения канонизации матрицы, основанные на ее LU-, QR- или LQ-разложении, кроме того, представлены формулы, позволяющие осуществлять оценку обусловленности задачи канонизации, не осуществляя явного обращения исходной матрицы. Также на основе предлагаемых методов разработан и реализован на языке программирования MATLAB эффективный алгоритм вычисления канонизации матриц, позволяющий существенно повысить как устойчивость, так и быстродействие вычислительного процесса. Показано, что наиболее эффективным методом канонизации квадратных, возможно вырожденных матриц, является метод, основанный на LU-разложении произвольных прямоугольных матриц – метод, основанный на QR- или LQ-разложении, а плохо обусловленных матриц – метод, основанный на сингулярном разложении. Показаны точность и эффективность оценки обусловленности матрицы, получаемой на основе вычисления норм ее левого и правого канонизаторов. Доказано, что наиболее эффективную с вычислительной точки зрения оценку числа обусловленности, не теряющую при этом своей точности, можно получить, вычисляя канонизацию методами, основанными на QR- или LQ-разложениях.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач теории автоматического управления, теории систем и других предметных областей, приводящих к переопределенным, недоопределенным, вырожденным или плохо обусловленным СЛАУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Вложение систем // Автоматика и телемехан. 1999. № 8. С. 61–73. Autom. Remote Control. 1999. V. 60:8. P. 1106–1116.
2. *Буков В.Н., Рябченко В.Н.* Вложение систем. Проматрицы // Автоматика и телемехан. 2000. № 4. С. 20–33. Autom. Remote Control. 2000. V. 61:4. P. 554–567.
3. *Буков В.Н., Горюнов С.В., Рябченко В.Н.* Анализ и синтез матричных линейных систем. Сравнение подходов // Автоматика и телемехан. 2000. № 11. С. 3–43. Autom. Remote Control.2000.V. 61:11.P.1759–1795.
4. *Буков В.Н., Рябченко В.Н.* Вложение систем. Линейное управление // Автоматика и телемехан. 2001. № 1. С. 50–66. Autom. Remote Control. 2001. V. 62:1. P. 39–54.
5. *Буков В.Н., Косьянчук В.В.* Вложение систем. Линейное наблюдение // Автоматика и телемехан. 2001. № 2. С. 3–15. Autom. Remote Control. 2001. V. 62:2. P. 169–180.
6. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. лит. Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
7. *Буков В.Н., Горюнов С.В.* Обращение и канонизация блочных матриц // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 5. С. 662–673. Math. Notes. 2006. V. 79:5. P. 614–624.
8. *Буков В.Н., Рябченко В.Н., Косьянчук В.В., Зыбин Е.Ю.* Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестн. Киевского университета. Серия: Физ.-матем. Науки. 2002. № 1. С. 19–28.
9. *Асанов А.З., Демьянов Д.Н.* Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Известия вузов. Авиационная техн. 2013. № 4. С. 13–18.
10. *Асанов А.З., Демьянов Д.Н.* Аналитический синтез функциональных наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями //Автометрия. 2014. Т. 50. № 6. С. 111–119.
11. *Волков В.Г., Демьянов Д.Н.* Синтез функциональных наблюдателей с использованием линейных матричных неравенств // Автометрия. 2016. Т. 52. № 4. С. 21–29.
12. *Strang G.* The fundamental theorem of linear algebra // The American Mathematical Monthly. 1993. V. 100. № 9. P. 848–855.
13. *Strang G.* Linear algebra and its applications, fourth edition. Thomson, 2006. P. 487.
14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015617953 РФ. Программа канонизации матриц / И.З. Ахметзянов. Правообладатель ФГАОУ ВПО КФУ. № 2015614621. Заявл. 29.05.2015. Опубл. 20.08.2015. 1 с.
15. *Trefethen L.N., Bau D.* Numerical linear algebra. Siam, 1997. P. 361.
16. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix computations. JHU Press, 2012. P. 756.
17. *Hager W.W.* Condition estimates // SIAM Journal on scientific and statistical computing, 1984. V. 5. № 2. P. 311–316.
18. *Higham N.J., Tisseur F.* A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2000. V. 21. № 4. P. 1185–1201.
19. *Golub G.H., Reinsch C.* Singular value decomposition and least squares solutions // Numerische Mathematic. 1970. V. 14. № 5. P. 403–420.