

УДК 517.958

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЯДРА ПУАССОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ¹⁾

© 2019 г. А. О. Багапш^{1,2}

¹⁾ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия;

²⁾ 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия)

e-mail: a.bagapsh@gmail.com

Поступила в редакцию 25.07.2019 г.
Переработанный вариант 25.07.2019 г.
Принята к публикации 05.08.2019 г.

Показано, что ядро Пуассона для уравнения Ламе в круге можно интерпретировать как двулистное отображение проекции эллиптического конуса на проекцию поверхности вращения гиперболы. Соответствующее отображение f_σ этих поверхностей оказывается взаимно однозначным. Такая интерпретация проливает свет на природу известного специального свойства решений эллиптических систем на плоскости, состоящего в том, что эти решения могут отображать точки в кривые и наоборот. В частности, особую точку изучаемого ядра можно рассматривать как проекцию образующей конуса так, что рассматриваемое отображение f_σ поверхностей вполне регулярно в том смысле, что эта образующая взаимно однозначно отображается в кривую. Библ. 20. Фиг. 8.

Ключевые слова: эллиптические системы, уравнение Ламе, неоднолистные отображения.

DOI: 10.1134/S0044466919120044

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Уравнение Ламе в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2p} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа, p – коэффициент Пуассона, а \mathbf{u} – вектор перемещений (см. [1]). В случае плоской деформации третья компонента вектора \mathbf{u} равна нулю, а первые две, в дальнейшем обозначаемые через u и v , зависят только от двух (декартовых) координат x , y ; тогда векторное уравнение (1.1) записывается в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{2(1-p)}{1-2p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2p} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{2(1-p)}{1-2p} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{1-2p} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Складывая первое уравнение со вторым, умноженным на мнимую единицу i , получаем комплексный вид плоского уравнения Ламе

$$\partial \bar{\partial} f(z) + \sigma \partial^2 \overline{f(z)} = 0 \quad (1.2)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00764) и Минобрнауки РФ, проект 1.3843.2017/4.6.

относительно функции $f = u + iv$ переменного $z = x + iy$ с параметром $\sigma = 1/(3 - 4p)$; отметим, что такой вид уравнения Ламе указывался, в частности, в [2], [3]. В формуле (1.2) используются известные операторы Коши–Римана

$$\partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Поскольку коэффициент Пуассона p , как известно, удовлетворяет неравенству $0 < p < 1/2$, то в уравнении (1.2) параметр σ принимает значения из интервала $(1/3, 1)$.

Уравнение (1.2) или соответствующая ему система относится к эллиптическому типу при всех вещественных значениях $\sigma \neq \pm 1$, а при $\sigma \in (-1, 1)$ оно является к тому же сильно эллиптическим (см. терминологию в [2]–[5]). Далее рассматривается именно этот последний случай, к которому относится и уравнение Ламе при всех допустимых значениях коэффициента Пуассона p .

1.2. Для решений уравнения (1.2) имеет место следующее интегральное представление типа Пуассона в единичном круге $\mathcal{D} := \{|z| < 1\}$ (см. [2], [6]):

$$f(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{|e^{it} - z|^2} f(e^{it}) + \frac{\sigma(2 - e^{-it}z)}{(e^{it} - z)^2} \overline{f(e^{it})} \right) dt,$$

где функция f непрерывна в замкнутом круге $\bar{\mathcal{D}} = \{|z| \leq 1\}$. Настоящая работа посвящена изучению геометрических свойств соответствующего ядра Пуассона (без множителя $1/(2\pi)$)

$$P_\sigma(z) = (1 - |z|^2) \left(\frac{1}{|1 - z|^2} + \frac{\sigma(2 - z)}{(1 - z)^2} \right) \quad (1.3)$$

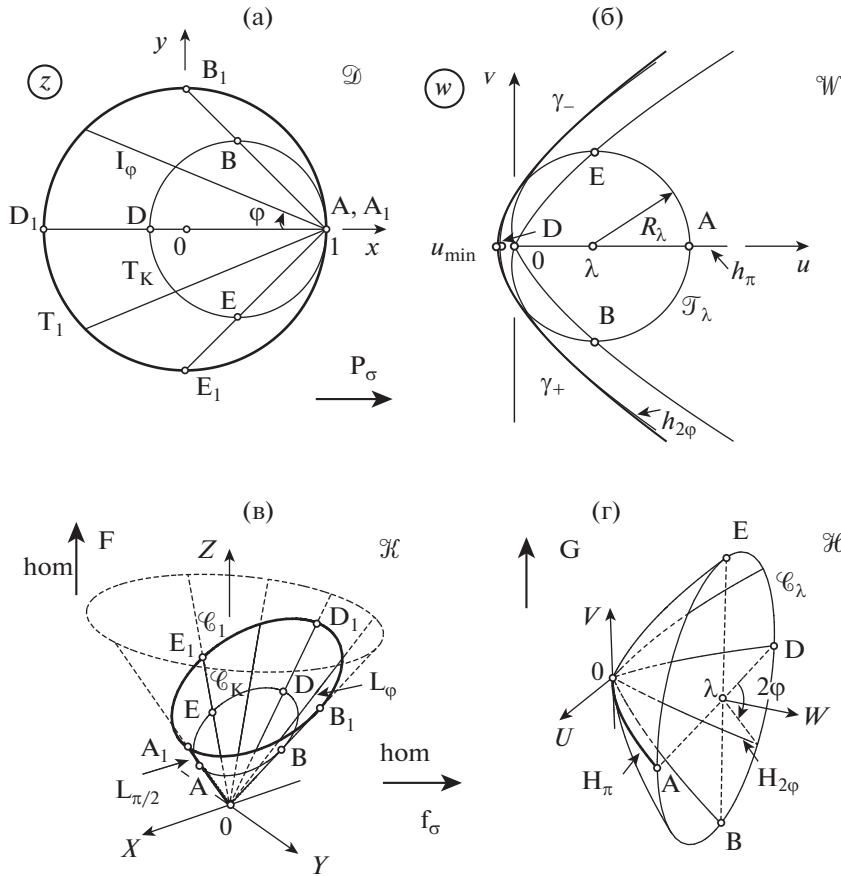
с особенностью в точке $z = 1$.

Отметим, что при $\sigma = 0$ уравнение (1.2) превращается в уравнение Лапласа, для которого ядро Пуассона P_0 в круге является вещественнозначной функцией. В отличие от случая $\sigma = 0$, при других значениях параметра σ из интервала $(-1, 1)$ ядро P_σ , в соответствии с (1.3), является комплекснозначной функцией. Поэтому везде в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, будем предполагать, что $\sigma \neq 0$.

1.3. Дадим краткое описание основных результатов, развернутые формулировки которых приведены в разд. 2, а доказательства – в разд. 3–6.

В разд. 3 показано, что функция P_σ осуществляет двулистное отображение единичного круга \mathcal{D} (см. фиг. 1) на некоторое множество $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}$. Для выяснения его структуры заметим, что якобиан отображения, осуществляемого функцией P_σ , обращается в нуль на лемнискате Бута γ . При $\sigma > 0$ ее ветви γ_1 и γ_2 расположены симметрично друг другу относительно вещественной прямой (фиг. 1а), так же, как и их образы γ_+ и γ_- , пересекающиеся в начале координат. При $\sigma < 0$ ветви лемнискаты γ симметричны друг другу относительно прямой $x = 1$, причем только левая ветвь пересекается с кругом \mathcal{D} , см. фиг. 1б, 1в. Эта ветвь состоит из двух дуг γ_{1+} и γ_{1-} , симметричных друг другу относительно оси x ; образы γ_+ и γ_- этих дуг пересекаются при $\sigma \in [-1/3, 0)$ в начале координат (фиг. 1б), а при $\sigma \in (-1, -1/3)$ в точке, лежащей на вещественной оси левее начала координат (фиг. 1в). Лемниската γ при $\sigma < -1/3$ делит круг \mathcal{D} на две области \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , которые отображаются в области \mathcal{W}_1 и \mathcal{W}_2 , причем вторая накрывает первую (фиг. 1в), а при $\sigma \geq -1/3$ она делит круг на три области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, которые отображаются в $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$, причем последняя накрывает две первые (фиг. 1а, 1б). В областях \mathcal{D}_k якобиан знакопостоянен, а отображение однолистно.

В разд. 4 единичный круг \mathcal{D} рассматривается как проекция части подходящего эллиптического конуса на плоскость, перпендикулярную к одной из его образующих. Этот конус, изображенный на фиг. 2в, задается уравнением $X^2 + (1 - a^2)Y^2 - a^2Z^2 = 0$, где $a \in (0, 1)$, а проецируемая область \mathcal{H} состоит из всех его точек, заключенных между плоскостью OXY и плоскостью Π_1 , перпендикулярной к образующей (A_1O) и расположенной на расстоянии $|A_1O| = (1 - a^2)/a$ от начала координат. Функция F , задающая ортогональное проецирование конической области \mathcal{H} на



Фиг. 2. Связь ядра Пуассона для уравнения Ламе с отображением поверхностей. Расчетные значения параметров: $\sigma = -0.5$, $a = 0.5(\sqrt{5} - 1)$, $\kappa = 5/8$, $\varphi = \pi/8$.

дуги гиперболы, проходящей через начало координат, вокруг оси, не являющейся ее осью симметрии, см. фиг. 5. Отображение $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{W}$ осуществляется следующим образом. Поверхность вращения \mathcal{H} нарезается на окружности \mathcal{C}_λ и каждая такая окружность поворачивается на 90° относительно своей вертикальной оси симметрии, переходя в окружность \mathcal{T}_λ на плоскости w (фиг. 2б, 2г). Такое отображение, в отличие от F , не является взаимно однозначным.

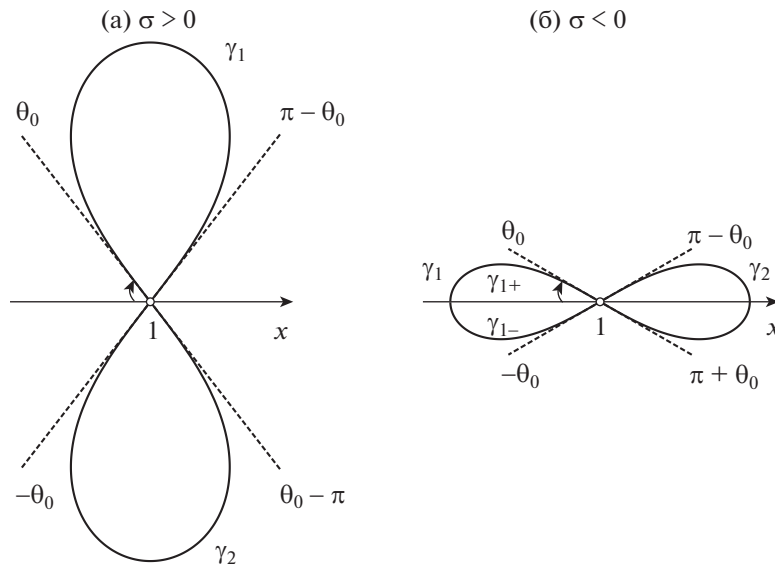
В разд. 6 получено отображение $f_\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, которое соответствует ядру Пуассона P_σ в том смысле, что справедливо представление $P_\sigma = G \circ f_\sigma \circ F^{-1}$. При этом функция f_σ осуществляет взаимно однозначное отображение поверхностей, в отличие от функции P_σ , которая, как было указано выше, осуществляет неоднолистное отображение множеств на плоскости. В частности, окружности \mathcal{C}_κ на конической области \mathcal{H} гомеоморфно переводятся функцией f_σ в окружности \mathcal{C}_λ на поверхности вращения \mathcal{H} , а интервалы L_φ образующих конуса – в дуги гипербол $H_{2\varphi}$, см. фиг. 2в, 2г.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Перейдем к введению нужных определений и подробному формулированию описанных во Введении результатов.

Определение 1 (единичный круг). Обозначим через

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$



Фиг. 3. Гиперболическая лемниската Бута.

круг единичного радиуса с центром в начале координат. Положим $x = 1 - \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ и введем гиперболическую лемнискату Бута

$$\gamma = \{z = x + iy: \sigma \rho^2 = 2(1 - \sigma) \sin^2 \theta - 2(1 + \sigma) \cos^2 \theta\}.$$

Лепестки этой лемнискаты расположены вертикально при $\sigma > 0$ (фиг. 3а) и горизонтально при $\sigma < 0$ (фиг. 3б). Обозначим через

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}}$$

значение параметра θ из интервала $(0, \pi/2)$, отвечающее точке $z = 1$, и определим две ветви лемнискаты γ :

а) при $\sigma > 0$ верхнюю ветвь γ_1 : $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ и нижнюю γ_2 : $\theta \in (\theta_0 - \pi, -\theta_0]$, см. фиг. 3а;

б) при $\sigma < 0$ левую ветвь γ_1 : $\theta \in (-\theta_0, \theta_0]$ и правую γ_2 : $\theta \in [\pi - \theta_0, \pi + \theta_0]$; левую ветвь, в свою очередь, разделим на две дуги γ_{1+} : $\theta \in (0, \theta_0]$ и γ_{1-} : $\theta \in (-\theta_0, 0]$, симметричные друг другу относительно вещественной оси (фиг. 3б).

Отметим, что при $\sigma \rightarrow 0 \pm$ будет $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \pm$ и лемниската γ , утолщаясь и удлиняясь, выродится в пару перпендикулярных друг другу прямых $y = \pm(x - 1)$. Если же $\sigma \rightarrow \pm 1$, то она, напротив, сужается и укорачивается, вырождаясь в одну точку $z = 1$.

При $\sigma \geq -1/3$ лемниската γ пересекается с единичной окружностью в точках с полярными координатами $\theta = \pm\theta_1$, где

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + 3\sigma}{1 - \sigma}}.$$

В частности, при $\sigma = -1/3$ лемниската касается единичной окружности $|z| = 1$ в точке $z = -1$. В зависимости от значения параметра σ она делит круг \mathcal{D} на две или три области:

а) при $\sigma \in (0, 1)$ – это изображенные на фиг. 1а области

$$\mathcal{D}_k = \operatorname{int}(\gamma_k) \cap \mathcal{D}, \quad k = 1, 2, \quad \mathcal{D}_3 = \mathcal{D} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2),$$

где $\operatorname{int}(\gamma_k)$ – внутренность замкнутой кривой γ_k , а $\bar{\mathcal{D}}_k$ – замыкание области \mathcal{D}_k при $k = 1, 2$;

б) при $\sigma \in (-1/3, 0)$ – изображенные на фиг. 1б области

$$\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D} \cap \mathbb{H}) \setminus \overline{\text{int}(\gamma_1)}, \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1 \setminus \overline{\text{int}(\gamma_1)}, \quad \mathcal{D}_3 = \text{int}(\gamma_1) \cap \mathcal{D},$$

где $\mathbb{H} = \{z = x + iy: y > 0\}$ – верхняя полуплоскость;

в) при $\sigma \in (-1, -1/3]$ – изображенные на фиг. 1в области

$$\mathcal{D}_1 = \text{int}(\gamma_1), \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{D}_1}.$$

Определение 2 (множество значений ядра Пуассона). Пусть

$$t = \text{tg } \theta, \quad t_0 = \text{tg } \theta_0 = \sqrt{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}, \quad t_1 = \text{tg } \theta_1 = \sqrt{\frac{1+3\sigma}{1-\sigma}},$$

где последняя величина вводится при $\sigma \geq -1/3$. При $\sigma > 0$ будет $t_0 < t_1$, а при $\sigma < 0$, наоборот, $t_0 > t_1$. Зададим кривые γ_+ и γ_- параметрическими уравнениями

$$u = \frac{2t_0^2}{1+t^2} \sqrt{\frac{2\sigma(1-\sigma)}{t^2-t_0^2}} - (1-\sigma), \quad v = \frac{t(t_1^2-t^2)}{1+t^2} \sqrt{\frac{2\sigma(1-\sigma)}{t^2-t_0^2}}$$

со следующими интервалами изменения параметра t :

- а) при $\sigma \in (0, 1)$ положим $\gamma_+ : t \in (t_0, t_1)$ и $\gamma_- : t \in (-t_1, -t_0)$, см. фиг. 1а;
- б) при $\sigma \in [-1/3, 0)$ положим $\gamma_+ : t \in (t_1, t_0)$ и $\gamma_- : t \in (-t_0, -t_1)$, см. фиг. 1б;
- в) при $\sigma \in (-1, -1/3)$ положим $\gamma_+ : t \in (0, t_0)$ и $\gamma_- : t \in (-t_0, 0)$, см. фиг. 1в.

Построенные таким образом кривые γ_+ и γ_- симметричны друг другу относительно вещественной оси u и имеют общую предельную точку $w_{\min} = w(t_1) = 0$ при $\sigma \geq -1/3$ или $w_{\min} = w(0) = 2\sqrt{-2\sigma(1+\sigma)} - (1-\sigma)$ при $\sigma < -1/3$.

Далее, при $\sigma \geq -1/3$ обозначим через \mathcal{W}_1 и \mathcal{W}_2 области, заключенные между положительной вещественной полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{w = u + iv: u > 0, v = 0\}$ и кривой γ_+ и γ_- соответственно, см. фиг. 1а, 1б. Кроме того, введем область $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_1 \cup \mathbb{R}_+ \cup \mathcal{W}_2$ и множество $\mathcal{W} = \gamma_+ \cup \mathcal{W}_3 \cup \gamma_-$.

При $\sigma < -1/3$ введем область \mathcal{W}_1 , ограниченную кривыми γ_+ и γ_- и разрезом по замкнутой полупрямой $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, а также область $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \cup \mathbb{R}_+$, см. фиг. 1в. Наконец, обозначим $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 \cup \gamma_+ \cup \gamma_- \cup \{w_{\min}\}$.

Предложение 1. *Функция P_σ осуществляет двулистное отображение единичного круга \mathcal{D} на множество \mathcal{W} . Ее якобиан обращается в этом круге в нуль на лемнискате Бута γ , которая делит его при $\sigma \geq -1/3$ на три области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, а при $\sigma < -1/3$ на две области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, отображаемые функцией P_σ однолистно, причем*

$$P_\sigma: \mathcal{D}_k \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{W}_k.$$

Кроме того, в случае $\sigma \geq -1/3$

$$P_\sigma: \gamma_1 \cap \mathcal{D} \xrightarrow{\text{hom}} \gamma_+, \quad \gamma_2 \cap \mathcal{D} \xrightarrow{\text{hom}} \gamma_-,$$

а в случае $\sigma < -1/3$

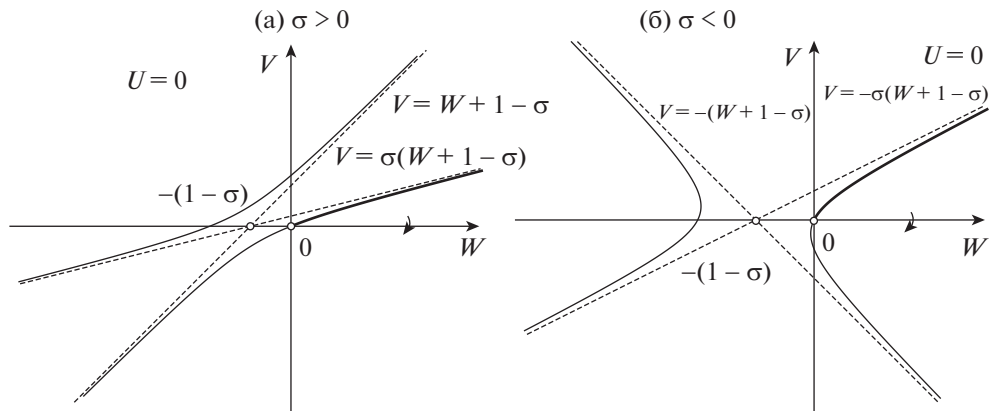
$$P_\sigma: \gamma_1 \setminus \{1\} \xrightarrow{\text{hom}} \gamma_+ \cup \{w_{\min}\} \cup \gamma_-.$$

Определение 3 (коническая область). Для произвольного числа $a \in (0, 1)$ положим $d_1 = (1 - a^2)/a$ и зададим область

$$\mathcal{H} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3: X^2 + (1 - a^2)Y^2 - a^2Z^2 = 0, \frac{aX + Z}{\sqrt{a^2 + 1}} < d_1, Z > 0 \right\},$$

состоящую из всех точек поверхности эллиптического конуса $X^2 + (1 - a^2)Y^2 - a^2Z^2 = 0$, расположенных между плоскостями $Z = 0$ и Π_κ , где

$$\Pi_\kappa = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3: \frac{aX + Z}{\sqrt{a^2 + 1}} - \kappa d_1 = 0 \right\}, \quad \kappa \in (0, 1],$$



Фиг. 4. Образующая гипербола.

есть плоскость, перпендикулярная образующей $X = aZ$ этого конуса и отдаленная от начала координат на расстояние kd_1 (см. фиг. 1в). Сечение конической области \mathcal{H} каждой такой плоскостью представляет собой окружность $\mathcal{C}_\kappa := \Pi_\kappa \cap \mathcal{H}$, а сечение плоскостью

$$\mathcal{P}_\varphi = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{X - aZ}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin \varphi + Y \cos \varphi = 0 \right\}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

составляющей угол φ с плоскостями Π_κ , дает интервал образующей конуса $L_\varphi := \mathcal{P}_\varphi \cap \mathcal{H}$.

Определение 4 (поверхность вращения гиперболы). Введем поверхность

$$\mathcal{H} = \left\{ (U, V, W) \in \mathbb{R}^3 : R^2 \mp (1 + \sigma)RW + \sigma W^2 \mp (1 - \sigma)(1 + \sigma)R + 2\sigma(1 - \sigma)W = 0, \right. \\ \left. R = \sqrt{U^2 + V^2}, \quad W > 0 \right\},$$

выбирая верхние знаки при $\sigma > 0$, а нижние при $\sigma < 0$. Эта поверхность образована вращением дуги гиперболы

$$V^2 \mp (1 + \sigma)WV + \sigma W^2 \mp (1 - \sigma)(1 + \sigma)V + 2\sigma(1 - \sigma)W = 0, \quad V > 0, \quad W > 0,$$

лежащей в плоскости $U = 0$, вокруг оси W , которая не является ее осью симметрии (см. фиг. 5, на которой жирной линией обозначена вращающаяся дуга). Каждая поперечная плоскость

$$\tilde{\Pi}_\lambda = \left\{ (U, V, W) \in \mathbb{R}^3 : W = \lambda \right\}, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

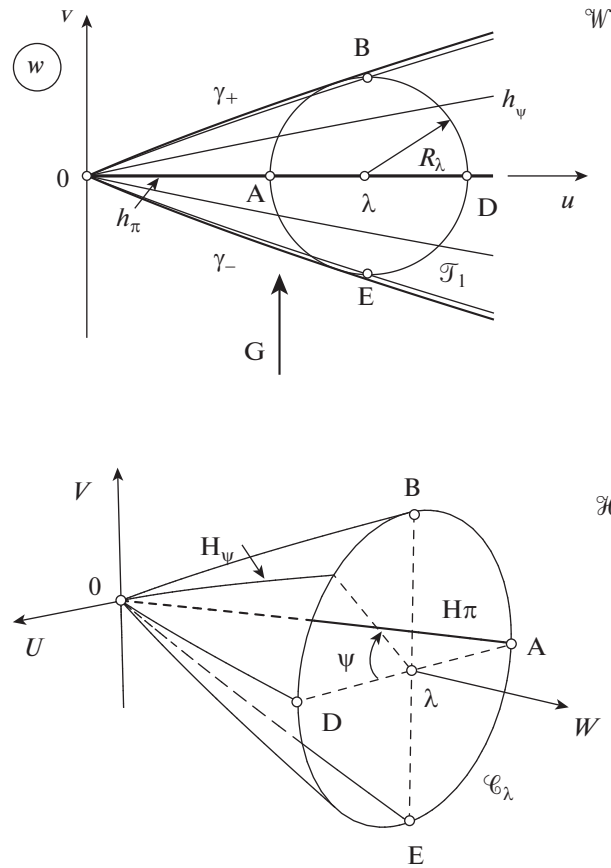
отсекает на \mathcal{H} окружность $\mathcal{C}_\lambda := \tilde{\Pi}_\lambda \cap \mathcal{H}$, а полуплоскость

$$\tilde{\mathcal{P}}_\psi = \left\{ (U, V, W) \in \mathbb{R}^3 : U \sin \psi - V \cos \psi = 0, \sigma U \cos \psi \leq 0 \right\}, \quad \psi \in (-\pi, \pi],$$

составляющая с осью U угол ψ , отсчитываемый при $\sigma > 0$ от ее положительного, а при $\sigma < 0$ от отрицательного направления – дугу гиперболы $\mathcal{H}_\psi := \tilde{\mathcal{P}}_\psi \cap \mathcal{H}$ (см. фиг. 6, 7 соответственно).

Определение 5 (отображение конуса на поверхность вращения гиперболы). Зададим функцию $f_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ставящую в соответствие точке (X, Y, Z) точку (U, V, W) по следующим формулам:

$$f_\sigma : \begin{cases} U = \frac{\sigma\sqrt{a^2+1}}{ad_1} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} + d_1 \right) \frac{X+a^3Z}{(aX+Z)^2}, \\ V = \frac{\sigma}{d_1} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} + d_1 \right) \frac{X-aZ}{aX+Z}, \\ W = -\frac{\sqrt{a^2+1}}{aX+Z} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(1 + \frac{\sigma aX+Z}{d_1 \sqrt{a^2+1}} \right). \end{cases}$$



Фиг. 5. Отображение поверхности вращения гиперболы \mathcal{H} на множество \mathcal{W} значений ядра Пуассона при $\sigma > 0$.

Предложение 2. Функция f_σ осуществляет взаимно однозначное отображение конической области \mathcal{K} на поверхность вращения гиперболы \mathcal{H} , в частности,

$$f_\sigma: \mathcal{C}_\kappa \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{C}_\lambda, \quad \lambda = (\kappa^{-1} - 1)(1 + \sigma\kappa), \quad \kappa \in (0, 1),$$

и

$$f_\sigma: L_\varphi \xrightarrow{\text{hom}} H_{2\varphi}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

то есть каждая окружность $\mathcal{C}_\kappa \subset \mathcal{K}$ гомеоморфно переводится в окружность $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{H}$, а образующие конуса L_φ , лежащие в его сечении плоскостью \mathcal{P}_φ под углом φ относительно плоскости Π_1 , переходят в гиперболы $H_{2\varphi}$, отсекаемые на поверхности \mathcal{H} полуплоскостями $\tilde{\mathcal{P}}_{2\varphi}$, составляющими удвоенный угол 2φ с осью U .

Определение 6 (кривые в единичном круге). Введем обозначения

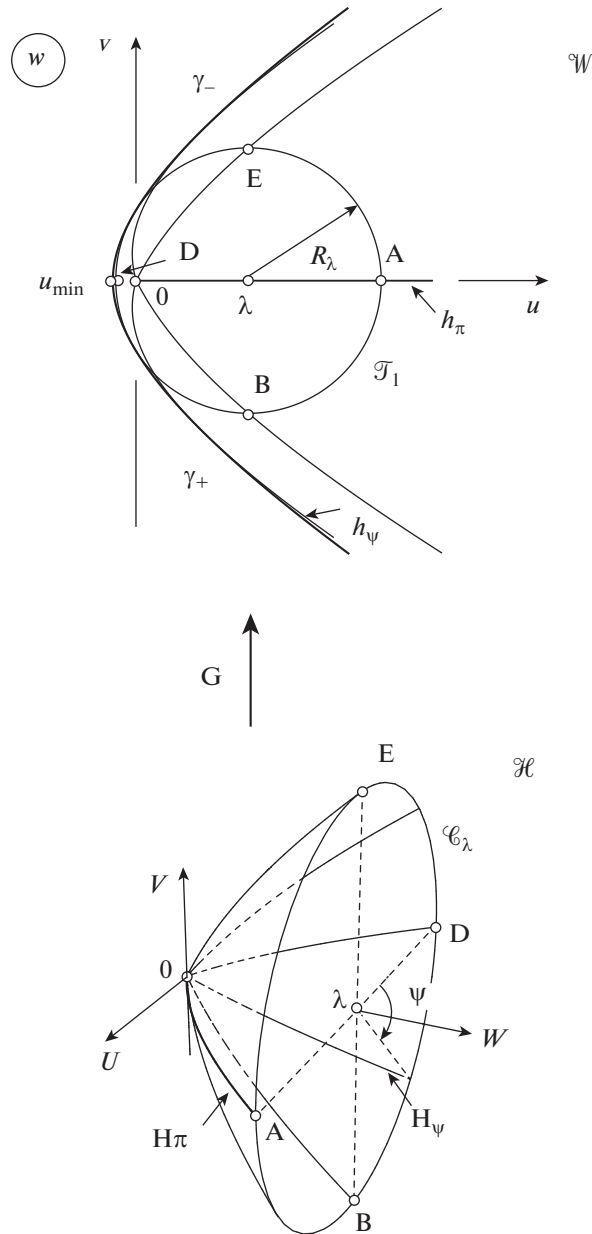
$$T_\kappa = \{z = x + iy: (x - (1 - \kappa))^2 + y^2 = \kappa^2\}, \quad \kappa \in (0, 1],$$

для окружности радиуса κ с центром в точке $1 - \kappa$ и

$$I_\varphi = \{z = x + iy: (x - 1)\sin \varphi + y \cos \varphi = 0, |z| < 1\}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

для лежащего в единичном круге \mathcal{D} интервала прямой, проходящей через точку $z = 1$ под углом φ относительно отрицательного направления вещественной оси (фиг. 2а).

Определение 7 (отображение конуса на круг). Введем в плоскости Π_1 декартову систему координат (x, y) с началом в точке C_1 , являющейся центром окружности \mathcal{C}_1 . Ось абсцисс x направим



Фиг. 6. Отображение поверхности вращения гиперβολы \mathcal{H} на множество \mathcal{W} значений ядра Пуассона при $\sigma < 0$.

от точки C_1 к точке A_1 , в которой плоскость Π_1 пересекается с образующей $L_{\pi/2} : X = aZ$, а ось ординат u — перпендикулярно оси x в сторону положительных значений пространственной координаты Y . Затем ортогонально спроецируем конус \mathcal{K} на плоскость Π_1 с помощью отображения

$$F: \quad x = 1 + \frac{X - aZ}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad y = Y$$

и отождествим Π_1 с плоскостью комплексного переменного $z = x + iy$.

Предложение 3. Функция F осуществляет отображение $\overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ замыкания $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \mathcal{C}_1 \cup \{0\}$ области \mathcal{K} на замкнутый круг $\overline{\mathcal{D}}$, причем $F : \mathcal{K} \setminus L_{\pi/2} \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{D}$, в частности,

$$F: \quad \mathcal{C}_\kappa \xrightarrow{\text{hom}} T_\kappa, \quad \kappa \in (0, 1),$$

и

$$F: L_\varphi \xrightarrow{\text{hom}} I_\varphi, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме того, $F: \mathcal{C}_1 \setminus A_1 \xrightarrow{\text{hom}} T_1 \setminus \{1\}$, однако, F отображает образующую $L_{\pi/2}$ в точку $z = 1$, так что на $L_{\pi/2}$ нарушается взаимная однозначность.

Определение 8 (кривые на множестве значений ядра Пуассона). Примем обозначение (см. фиг. 5, 6)

$$\mathcal{T}_\lambda = \{w = u + iv: (u - \lambda)^2 + v^2 = R_\lambda^2\}, \quad \lambda \in [0, \infty),$$

для окружности с центром в точке λ и радиусом

$$R_\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma) \left[(1 + \sigma)(\lambda + 1 - \sigma) - (1 - \sigma)\sqrt{(\lambda + 1 - \sigma)^2 + 4\sigma} \right],$$

а также обозначение h_ψ для дуги гиперболы

$$\begin{aligned} \sigma \sin^2 \psi \cdot u^2 - (1 + \sigma + 2\sigma \cos \psi) \sin \psi \cdot uv + (1 + \cos \psi)(1 + \sigma \cos \psi)v^2 + \\ + 2\sigma(1 - \sigma)^2 \sin^2 \psi \cdot u - (1 - \sigma)(1 + \sigma + 2\sigma \cos \psi) \sin \psi \cdot v = 0, \end{aligned}$$

идушей от начала координат к асимптоте

$$v = \frac{\sigma \sin \psi \cdot (u + 1 - \sigma)}{1 + \sigma \cos \psi}$$

при $u \rightarrow \infty$.

Определение 9 (отображение поверхности вращения гиперболы на множество значений ядра Пуассона). Отобразим поверхность \mathcal{H} на плоскость комплексного переменного $w = u + iv$ с помощью функции

$$G: u = U + W, \quad v = V.$$

Суть такого отображения состоит в том, что каждая окружность \mathcal{C}_λ , расположенная в поперечном сечении поверхности \mathcal{H} , поворачивается на 90° вокруг прямой $W = \lambda$, $U = 0$, являющейся ее осью симметрии (фиг. 5, 6). Иначе говоря, поверхность \mathcal{H} , нарезанная на окружности \mathcal{C}_λ плоскостями $\tilde{\Pi}_\lambda$, “раскладывается” на плоскости $U = 0$, которую мы отождествляем с плоскостью переменного w .

Предложение 4. Функция G отображает замкнутую поверхность $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{0\}$ на множество $\overline{W} = W \cup \{0\}$, причем

$$G: \mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda, \quad \lambda \in [0, \infty), \quad H_\psi \rightarrow h_\psi, \quad \psi \in (-\pi, \pi).$$

Предложение 5. Ядро Пуассона P_σ для уравнения Ламе (1.2) при $0 < |\sigma| < 1$ в круге \mathcal{D} представляется как композиция функций:

$$P_\sigma = G \circ f_\sigma \circ F^{-1},$$

и осуществляет следующее отображение кривых:

$$P_\sigma: T_\kappa \rightarrow \mathcal{T}_\lambda, \quad \lambda = (\kappa^{-1} - 1)(1 + \sigma\kappa), \quad \kappa \in (0, 1),$$

и

$$P_\sigma: I_\varphi \rightarrow h_{2\varphi}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ядро Пуассона для уравнения Ламе обладает одним из необычных свойств, встречающихся среди решений эллиптических систем второго порядка на плоскости, которое состоит в отображении точки в кривую и наоборот. Это свойство составляет одно из ярких отличий таких функций от голоморфных, являющихся решениями системы Коши–Римана, т.е. системы уравнений первого порядка. Особенно хорошо данное свойство известно на примере гармонических функций, см. [7]. Ядро Пуассона и его производные – характерный пример.

Описанные в настоящей работе геометрические построения дают наглядное объяснение указанному явлению. Ядро Пуассона P_σ для системы Ламе отображает точку $z = 1$ в вещественную полупрямую $(0, \infty)$ в смысле всевозможных пределов изнутри единичного круга \mathcal{D} , поскольку $P_\sigma(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 1$ по любой некасательной кривой, а пределы по всевозможным кривым, касающимся единичной окружности в точке $z = 1$, образуют множество $(0, \infty)$. Круг \mathcal{D} является образом конической области \mathcal{K} при отображении F , а множество \mathcal{W} значений ядра Пуассона в круге — образом поверхности \mathcal{H} при отображении G , так что отображению $P_\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$ ставится в соответствие отображение поверхностей $f_\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ такое, что $P_\sigma = G \circ f_\sigma \circ F^{-1}$. При этом точке $z = 1$ соответствует образующая $L_{\pi/2}$ эллиптического конуса \mathcal{K} (фиг. 2а, 2в), а стремление точки $z \rightarrow 1$ под любым углом к единичной окружности, отличным от нулевого или развернутого, соответствует стремлению образа $F^{-1}(z)$ этой точки по конической поверхности \mathcal{K} к началу координат. В свою очередь, начало координат в результате последовательного применения отображений f_σ и G отображается в бесконечно удаленную точку, и, таким образом, все некасательные пределы ядра Пуассона при $z \rightarrow 1$ оказываются равными бесконечности. Если же $z \rightarrow 1$ по кривой, касающейся единичной окружности, то образ $F^{-1}(z)$ точки z на конусе стремится к некоторой точке его образующей $L_{\pi/2}$, отличной от нуля, а эта точка после применения функций f_σ и G отображается в некоторую конечную точку множества \mathcal{W} , так что касательные пределы ядра Пуассона P_σ оказываются конечными. Только касательные пределы и могут быть конечными, поскольку невозможно, двигаясь по поверхности эллиптического конуса \mathcal{K} , попасть в отличную от начала координат точку на его образующей $L_{\pi/2}$ под углом, отличным от нулевого или развернутого — это определяется геометрией конуса.

Важным вопросом в теории отображения решениями эллиптических систем на плоскости является проблема однолистности. Она состоит в определении условий на две области и на функцию, задающую гомеоморфизм между их границами, при которых решение заданной в одной из этих областей системы уравнений, совпадающее с этой функцией на границе, осуществляет гомеоморфизм областей. Классическим результатом является теорема Радо—Кнезера—Шоке [8], [9] о взаимной однозначности гармонического отображения ограниченной жордановой области на выпуклую область при условии выполнения гомеоморфизма границ. В целом отображения комплекснозначными гармоническими функциями являются, пожалуй, наиболее хорошо изученными среди всех решений эллиптических систем второго порядка, см. [10]–[13]. Это направление активно развивается и сегодня, см. [14]–[16]. Вместе с тем в последние десятилетия растет интерес к изучению отображений решениями эллиптических систем, отличных от системы уравнений Лапласа, и проблема однолистности занимает здесь заметное место. Так, в [17] показано, что теорема Радо—Кнезера—Шоке неверна для решения некоторых систем, отличных от системы Лапласа. В работах [18], [19] даны достаточные условия, которым должно удовлетворять отображение границ, чтобы соответствующее ему непрерывное продолжение до решения кососимметричной сильно эллиптической системы с постоянными коэффициентами было однолистным.

Вместе с тем не исключено, что неоднолистные решения систем могут оказаться не только более характерными, но и в некоторых отношениях более содержательными, чем однолистные, на что указывает приводимый здесь пример ядра Пуассона для системы Ламе, которое естественным образом отождествляется со взаимно однозначным отображением поверхностей.

Тот факт, что ядро Пуассона P_σ для уравнения Ламе соответствует взаимно однозначному отображению поверхностей, а не плоских областей, по-видимому, связан с двумя обстоятельствами: во-первых, P_σ является комплекснозначной функцией, а во-вторых, решением дифференциального уравнения второго порядка. Напротив, ядро Пуассона для гармонических функций в круге хотя тоже является решением уравнения второго порядка, однако вещественнозначно и отображает круг на полупрямую. Это ядро является, как известно, вещественной частью ядра Шварца, которое комплекснозначно, но удовлетворяет системе уравнений Коши—Римана, имеющей первый порядок. Ядро Шварца связано с отображением плоских областей: оно однолистно отображает круг на полуплоскость. Таким образом, комплекснозначность решения эллиптического уравнения второго порядка может приводить к новым геометрическим эффектам, связанным с отображением поверхностей.

3. ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГА НА ПЛОСКОСТЬ

Исследуем отображение единичного круга \mathcal{D} с помощью ядра Пуассона (1.3). Чтобы выяснить структуру множества значений этого ядра, понадобится найти образ единичной окружности $|z| = 1$ и кривой, на которой якобиан рассматриваемого отображения обращается в нуль. Для вычислений удобно ввести полярные координаты ρ, θ по формулам

$$x = 1 - \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (3.1)$$

в этих координатах функция $w = P_\sigma(z)$ записывается в виде

$$u = \frac{1}{\rho} (2 \cos \theta - \rho)(1 + \sigma \rho \cos \theta + \sigma \cos 2\theta), \quad v = \frac{\sigma \sin \theta}{\rho} (2 \cos \theta - \rho)(2 \cos \theta + \rho), \quad (3.2)$$

где $w = u + iv$.

3.1. Линия нуля якобиана и ее образ

С помощью формул (3.2) находим якобиан

$$J_\rho = \frac{\sigma}{\rho^4} (2 \cos \theta - \rho)(2 \cos \theta + \rho)((1 + \sigma) \cos^2 \theta - 2(1 - \sigma) \sin^2 \theta + \sigma \rho^2) \quad (3.3)$$

отображения $w = P_\sigma(z)$. Этот якобиан обращается в нуль при выполнении равенства

$$\sigma \rho^2 = 2(1 - \sigma) \sin^2 \theta - 2(1 + \sigma) \cos^2 \theta, \quad (3.4)$$

которое задает гиперболическую лемнискату Бута γ (см. сведения о них в [20, стр. 144]). Лепестки этой лемнискаты расположены вертикально при $\sigma > 0$ (см. фиг. 1а) и горизонтально при $\sigma < 0$ (фиг. 1б). Она пересекает единичную окружность $|z| = 1$ в точке $z = 1$, отвечающей значению угла

$$\theta_0 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}},$$

а при $\sigma \geq -1/3$ еще и в точках, отвечающих значениям $\theta = \pm \theta_1$, где

$$\theta_1 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + 3\sigma}{1 - \sigma}},$$

это можно получить подстановкой уравнения окружности $\rho = 2 \cos \theta$ в уравнение лемнискаты (3.4).

Выразим в (3.4) величину ρ через θ и подставим в уравнения (3.2), задающие функцию P_σ . Введя обозначения

$$t = \operatorname{tg} \theta, \quad t_0 = \operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}}, \quad t_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = \sqrt{\frac{1 + 3\sigma}{1 - \sigma}},$$

получим параметрические уравнения

$$u = \frac{2t_0^2}{1 + t^2} \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sigma)}{t^2 - t_0^2}} - (1 - \sigma), \quad v = \frac{t(t_1^2 - t^2)}{1 + t^2} \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sigma)}{t^2 - t_0^2}},$$

задающие образ лемнискаты γ . Обозначим через γ_+ и γ_- образы двух дуг лемнискаты γ , лежащих в единичном круге \mathcal{D} , отвечающие следующим значениям параметра t :

- а) при $\sigma \in (0, 1)$ положим $\gamma_+ : t \in (t_0, t_1)$ и $\gamma_- : t \in (-t_1, -t_0)$, см. фиг. 1а;
- б) при $\sigma \in [-1/3, 0)$ положим $\gamma_+ : t \in (t_1, t_0)$ и $\gamma_- : t \in (-t_0, -t_1)$, см. фиг. 1б;
- в) при $\sigma \in (-1, -1/3)$ положим $\gamma_+ : t \in (0, t_0)$ и $\gamma_- : t \in (-t_0, 0)$, см. фиг. 1в.

Построенные таким образом кривые γ_+ и γ_- симметричны друг другу относительно вещественной оси u и имеют общую предельную точку $w_{\min} = w(t_1) = 0$ при $\sigma \geq -1/3$ или $w_{\min} = w(0) = 2\sqrt{-2\sigma(1 + \sigma)} - (1 - \sigma)$ при $\sigma < -1/3$.

Отметим, что якобиан функции P_σ , рассматриваемой на всей комплексной плоскости, обращается в нуль также при $\rho = \pm 2 \cos \theta$, см. (3.3), что соответствует двум окружностям $|z| = 1$ и $|z - 2| = 1$, расположенным симметрично друг другу относительно прямой $x = 1$. Ввиду такой симметрии мы ограничиваемся рассмотрением функции P_σ только в круге $|z| < 1$.

3.2. Образ единичной окружности

Найдем образ единичной окружности $|z| = 1$ при отображении функцией P_σ . Из выражения (1.3) для функции P_σ видно, что $P_\sigma = 0$ при $|z| = 1$, $z \neq 1$. Нетрудно проверить, что при $z \rightarrow 1$ по некасательным кривым будет $P_\sigma(z) \rightarrow \infty$. Пусть, например, $z \rightarrow 1$ вдоль интервала

$$I_\varphi: (x - 1) \sin \varphi + y \cos \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \theta = \varphi, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

прямой, составляющей угол φ с отрицательным направлением оси x . Тогда при $z \rightarrow 1$ имеем $\rho \rightarrow 0$ и $\cos \theta \neq 0$, так что из (3.2) получаем $P_\sigma(z) \rightarrow \infty$.

Конечными могут быть только пределы по кривым, касающимся единичной окружности. Чтобы вычислить их, заметим, что

$$u \sim \frac{2 \cos \theta - \rho}{\rho} (1 + \sigma \cos 2\theta) \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0,$$

поэтому предел u конечен только если $2 \cos \theta = \text{const} \cdot \rho + o(\rho)$. Таким образом, достаточно рассмотреть пределы функции P_σ вдоль окружностей

$$T_\kappa: (x - (1 - \kappa))^2 + y^2 = \kappa^2, \quad \text{или} \quad \rho = 2\kappa \cos \theta, \quad \kappa \in (0, 1). \quad (3.5)$$

Считая $\rho = 2\kappa \cos \theta$ и $\theta \rightarrow \pm\pi/2$, из (3.2) находим пределы

$$u = (1 - \sigma)(\kappa^{-1} - 1), \quad v = 0,$$

которые при $\kappa \in (0, 1)$ образуют полупрямую $w \in (0, \infty)$. Таким образом, единичная окружность $|z| = 1$ отображается функцией P_σ на полупрямую $[0, \infty)$ в смысле всевозможных пределов вдоль кривых, лежащих в замкнутом круге \mathcal{D} .

3.3. Отображение кривых

Найдем образы окружностей T_κ и интервалов I_φ при отображении функцией P_σ , см. фиг. 2а, 2б.

В случае окружности T_κ выразим $\rho = 2\kappa \cos \theta$ и, подставляя в (3.2), получаем

$$u = \frac{1 - \kappa}{\kappa} (1 + \sigma \kappa) + \frac{\sigma(1 - \kappa^2)}{\kappa} \cos 2\theta, \quad v = \frac{\sigma(1 - \kappa^2)}{\kappa} \sin 2\theta. \quad (3.6)$$

Это параметрические уравнения окружности

$$\mathcal{T}_\lambda: (u - \lambda)^2 + v^2 = R_\lambda^2$$

с центром в точке $\lambda = (\kappa^{-1} - 1)(1 + \sigma \kappa)$ и радиусом $R_\lambda = |\sigma|(1 - \kappa^2)/\kappa$, которая является образом окружности T_κ , причем соответствие между точками этих окружностей взаимно однозначное. Отметим, что абсциссы λ центров окружностей \mathcal{T}_λ и радиусы R_λ монотонно возрастают при уменьшении радиуса κ окружности T_κ . Выражая κ через λ , получаем

$$R_\lambda = \frac{1}{2} \text{sgn}(\sigma) [(1 + \sigma)(\lambda + 1 - \sigma) - (1 - \sigma)\sqrt{(\lambda + 1 - \sigma)^2 + 4\sigma}]. \quad (3.7)$$

Из параметрических уравнений (3.6) окружности \mathcal{T}_λ видно, что если точка z на окружности T_κ имеет угловую координату θ , то образ этой точки $w = P_\sigma(z)$ на окружности \mathcal{T}_λ имеет относительно центра этой окружности угловую координату 2θ , которая отсчитывается от положительного направления вещественной оси u , при $\sigma > 0$ против, а при $\sigma < 0$ по часовой стрелке. Следовательно, образ интервала I_φ , содержащего точки, имеющие угловую координату $\theta = \varphi$, состоит из

всех точек, каждая из которых имеет на проходящей через нее окружности \mathcal{T}_λ угловую координату 2θ . Уравнение образа интервала I_φ можно вывести из (3.2), считая $\theta = \varphi$. Разделим второе уравнение на первое и выразим ρ , а затем подставим во второе уравнение и получим

$$\sigma \sin^2 \psi \cdot u^2 - (1 + \sigma + 2\sigma \cos \psi) \sin \psi \cdot uv + (1 + \cos \psi)(1 + \sigma \cos \psi)v^2 + 2\sigma(1 - \sigma)^2 \sin^2 \psi \cdot u - (1 - \sigma)(1 + \sigma + 2\sigma \cos \psi) \sin \psi \cdot v = 0,$$

где $\psi = 2\varphi$. Записанное уравнение задает гиперболу с асимптотами

$$v = \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \cdot (u + 1 - \sigma), \quad v = \frac{\sigma \sin \psi \cdot (u + 1 - \sigma)}{1 + \sigma \cos \psi}, \quad (3.8)$$

пересекающимися в точке $u = -(1 - \sigma)$, $v = 0$. Дуга h_ψ этой гиперболы, идущая от начала координат ко второй из асимптот (3.8) при $u \rightarrow \infty$, является образом интервала I_φ .

3.4. Области однолиственности

Лемниската γ , на которой обращается в нуль якобиан функции P_σ , делит единичный круг \mathcal{D} при $\sigma \geq -1/3$ на три, а при $\sigma < -1/3$ на две области. Эти области \mathcal{D}_k взаимно однозначно отображаются в области \mathcal{W}_k , ограниченные полупрямой $[0, \infty)$, являющейся образом единичной окружности, и двумя кривыми γ_+ и γ_- , являющимися образами двух ветвей γ_1 и γ_2 лемнискаты γ , см. фиг. 1. Кривые γ_+ и γ_- являются огибающими для семейства окружностей \mathcal{T}_λ , являющихся образами тех окружностей T_k , которые пересекаются с кривой γ . Две точки, в которых окружность \mathcal{T}_λ касается кривых γ_+ и γ_- и точка $(1 - \sigma)(\kappa^{-1} - 1)$ на вещественной оси, являющаяся предельной при стремлении $z \rightarrow 1$ вдоль прообраза T_k , делят окружность \mathcal{T}_λ на три дуги, каждая из которых принадлежит одной из областей \mathcal{W}_k .

4. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ КРУГОМ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КОНУСОМ

4.1. Плоские сечения конуса

Рассмотрим эллиптический конус

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0. \quad (4.1)$$

На его образующей

$$X = aZ, \quad Y = 0 \quad (4.2)$$

выберем точку A на расстоянии d от начала координат. Проведем через эту точку плоскость

$$\pi_d: \frac{aX + Z}{\sqrt{a^2 + 1}} - d = 0, \quad (4.3)$$

перпендикулярную к образующей (4.2). Выясним, в каком случае сечение конуса (4.1) этой плоскостью является окружностью.

Радиус-вектор точки A равен

$$\mathbf{r}_A = \frac{d}{\sqrt{a^2 + 1}}(a, 0, 1),$$

а радиус-вектор точки D , в которой противоположная образующая

$$X = -aZ, \quad Y = 0 \quad (4.4)$$

пересекает плоскость π_d , есть

$$\mathbf{r}_D = \frac{d}{\sqrt{a^2 + 1}} \frac{1 + a^2}{1 - a^2} (-a, 0, 1).$$

Точка C , являющаяся серединой отрезка AD , имеет радиус-вектор

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_D) = \frac{d}{(1-a^2)\sqrt{a^2+1}}(-a^3, 0, 1). \quad (4.5)$$

Выберем на кривой, являющейся сечением конуса (4.1) плоскостью π_d , произвольную точку M с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_M = \frac{d}{(1-a^2)\sqrt{a^2+1}}(X, Y, Z).$$

Эта кривая является окружностью, если для любой ее точки M справедливо $|\mathbf{CM}| = \text{const}$, то есть

$$(X + a^3)^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = \text{const}. \quad (4.6)$$

Из уравнения плоскости (4.3), которой принадлежит точка M , выразим

$$Z = 1 - a^4 - aX,$$

а из уравнения конуса (4.1) с учетом последнего равенства выразим

$$Y^2 = b^2(1 - a^4 - aX)^2 - \frac{b^2}{a^2}X^2.$$

Подставляя полученные выражения в (4.6), запишем

$$(a^2 + 1)(X + a^3)^2 + b^2(1 - a^4 - aX)^2 - \frac{b^2}{a^2}X^2 = \text{const}.$$

Раскрывая здесь скобки и приравнявая к нулю множители при X и X^2 , получаем два одинаковых равенства

$$b^2 = \frac{a^2}{1-a^2}.$$

Таким образом, уравнение конуса (4.1) принимает вид

$$X^2 + (1 - a^2)Y^2 - a^2Z^2 = 0, \quad a \in (0, 1). \quad (4.7)$$

Сечение полученного конуса (4.7) плоскостью π_d представляет собой окружность с центром в точке C , имеющей координаты (4.5), и радиусом

$$R = \frac{ad}{1-a^2}. \quad (4.8)$$

4.2. Отображение конуса на круг

Окружность единичного радиуса возникает при сечении конуса (4.7) плоскостью π_d с параметром $d = d_1$, где

$$d_1 = \frac{1-a^2}{a}. \quad (4.9)$$

Центром этой окружности служит точка C_1 с координатами

$$\mathbf{r}_{C_1} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+1}}(-a^3, 0, 1). \quad (4.10)$$

В дальнейшем нам удобно использовать обозначение $\Pi_\kappa = \pi_d$, где $\kappa = d/d_1$.

Спроецируем конус на плоскость Π_1 , а в ней введем декартову систему координат с центром в точке C_1 ; ось абсцисс x направим по вектору $\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1$, где

$$\mathbf{r}_{A_1} = \frac{1-a^2}{a\sqrt{a^2+1}}(a, 0, 1), \quad (4.11)$$

а ось ординат y – по перпендикулярному к нему вектору C_1B_1 , где B_1 – точка на окружности с положительным значением координаты Y . Координаты точки B_1 находятся как решение системы, составленной из уравнения плоскости (4.3), конуса (4.7) и условия перпендикулярности $C_1B_1 \cdot C_1A_1 = 0$, в котором, согласно (4.10) и (4.11),

$$C_1A_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(1, 0, -a). \quad (4.12)$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$r_{B_1} = \left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}}, 1, \frac{1}{a\sqrt{a^2 + 1}} \right)$$

и

$$C_1B_1 = (0, 1, 0). \quad (4.13)$$

Спроецируем часть конуса (4.7), заключенную между плоскостями $Z = 0$ и Π_1 , на эту последнюю плоскость и поставим в соответствие каждой проецируемой точке конуса декартовы координаты (x, y) ее проекции.

Плоские координаты x, y точки конуса $M(X, Y, Z)$ вычисляются по формулам

$$x = C'M \cdot C_1A_1, \quad y = C'M \cdot C_1B_1, \quad (4.14)$$

где точка C' – это проекция точки C_1 на плоскость Π_k , или π_d , в которой лежит точка M . Проекция C' находится как точка пересечения этой плоскости с прямой, проходящей через точку C_1 параллельно образующей (4.2). Нетрудно получить

$$r_{C'} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(ad - 1, 0, a + d).$$

Запишем $C'M = r_{C'} - r_M$, где $r_M = (X, Y, Z)$, и с помощью формул (4.14) с учетом (4.12) и (4.13) найдем

$$x = 1 + \frac{X - aZ}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad y = Y. \quad (4.15)$$

Эти формулы задают отображение F области \mathcal{K} конуса (4.7), заключенной между плоскостями $Z = 0$ и Π_1 , на круг \mathcal{D} . Такое отображение является взаимно однозначным на $\mathcal{K} \setminus L_{\pi/2}$. Действительно, при заданных значениях x, y из (4.15) и уравнения конуса (4.7) однозначно определяются координаты

$$X = \frac{(1 + a^2)(x - 1)^2 - (1 - a^2)y^2}{2(x - 1)\sqrt{a^2 + 1}}, \quad Y = y, \quad Z = -\frac{(1 + a^2)(x - 1)^2 + (1 - a^2)y^2}{2(x - 1)a\sqrt{a^2 + 1}},$$

и тем самым задается обратное отображение F^{-1} . При этом на образующей $L_{\pi/2}$ взаимная однозначность теряется: $L_{\pi/2}$ отображается функцией F в точку $z = 1$, в которой обратная функция F^{-1} имеет различные пределы вдоль различных кривых.

4.3. Соответствие кривых

Как было установлено в п. 3.1, сечение конуса (4.7) плоскостью π_d при $d \in (0, d_1)$ проецируется на плоскость Π_1 в виде окружности

$$\left(x - \left(1 - \frac{ad}{1 - a^2} \right) \right)^2 + y^2 = \left(\frac{ad}{1 - a^2} \right)^2,$$

или, с учетом формулы (4.9) для d_1 и соотношения $d = \kappa d_1$,

$$T_\kappa: (x - (1 - \kappa))^2 + y^2 = \kappa^2.$$

Все такие сечения содержат по одной точке образующей (4.2), что соответствует тому, что их проекции (4.3) проходят через точку $x = 1, y = 0$, см. фиг. 2в.

Рассмотрим в плоскости z интервал прямой

$$I_\varphi: (x - 1)\sin \varphi + y \cos \varphi = 0, \quad |z| < 1, \quad (4.16)$$

проходящей через точку $z = 1$ под углом $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ относительно отрицательного направления вещественной оси $y = 0$. Выражая x, y с помощью (4.15) и подставляя в (4.16), находим, что образом интервала I_φ на конусе (4.7) служит интервал L_φ его образующей, являющейся линией пересечения конуса с плоскостью

$$\mathcal{P}_\varphi: \frac{X - aZ}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin \varphi + Y \cos \varphi = 0.$$

5. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ ЯДРА ПУАССОНА И ПОВЕРХНОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ

5.1. Отображение круга на поверхность

Как было установлено в разд. 3, каждая окружность T_κ радиуса $\kappa \in (0, 1)$, касающаяся единичной окружности в точке $z = 1$, отображается ядром Пуассона P_σ в окружность \mathcal{T}_λ с центром и радиусом

$$\lambda = \frac{1 - \kappa}{\kappa}(1 + \sigma\kappa), \quad R_\lambda = \frac{|\sigma|(1 - \kappa^2)}{\kappa}. \quad (5.1)$$

Повернем каждую окружность \mathcal{T}_λ вокруг ее вертикальной оси симметрии $u = \lambda$ на 90° . Такое преобразование соответствует отображению единичного круга \mathcal{D} на поверхность \mathcal{H} , которое осуществляется следующим образом. Для произвольной точки $z \in \mathcal{D}$ определяем ее полярные координаты ρ и θ и находим радиус $\kappa = \rho/(2 \cos \theta)$ окружности \mathcal{T}_κ , проходящей через эту точку. Затем точке z ставим в соответствие точку

$$U = u(z) - \lambda, \quad V = v(z), \quad W = \lambda, \quad (5.2)$$

где $u(z) + iv(z) = P_\sigma(z)$, а λ находим из (5.1). В результате получим отображение

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sigma \cos 2\theta}{2\rho \cos \theta} (2 \cos \theta - \rho)(2 \cos \theta + \rho), \\ V &= \frac{\sigma \sin 2\theta}{2\rho \cos \theta} (2 \cos \theta - \rho)(2 \cos \theta + \rho), \\ W &= \frac{2 \cos \theta + \sigma\rho}{2\rho \cos \theta} (2 \cos \theta - \rho), \end{aligned} \quad (5.3)$$

которое является взаимно однозначным. В самом деле, предположим, что существуют две различные точки z_1 и z_2 , которые отображаются в одну точку (U, V, W) . Пусть эти точки лежат на окружностях T_{κ_1} с радиусами κ_1 и κ_2 соответственно, а образами этих окружностей при отображении $w = P_\sigma(z)$ являются окружности \mathcal{T}_λ с абсциссами центров λ_1 и λ_2 . Из равенства координат W их образов следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а поскольку числа κ и λ сопоставлены взаимно однозначно, то $\kappa_1 = \kappa_2$, то есть точки z_1 и z_2 лежат на одной окружности T_κ . Но каждая такая окружность с помощью отображения (5.3) взаимно однозначно переводится в окружность на поверхности: T_κ гомеоморфно отображается в окружность \mathcal{T}_λ , которая затем поворачивается на 90° . Полученное противоречие доказывает взаимную однозначность отображения (5.3).

Из (5.2) сложением первого равенства с последним получаем формулы

$$u = U + W, \quad v = V, \quad (5.4)$$

задающие отображение G поверхности \mathcal{H} на плоскость w . Это отображение не является взаимно однозначным.

Выведем неявное уравнение поверхности \mathcal{H} . Воспользуемся равенством (4.8), в котором положим $\lambda = W$ и запишем

$$R_\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma) [(1 + \sigma)(W + 1 - \sigma) - (1 - \sigma)\sqrt{(W + 1 - \sigma)^2 + 4\sigma}]. \quad (5.5)$$

Поскольку $(u - \lambda)^2 + v^2 = R_\lambda^2$, то $U^2 + V^2 = R_\lambda^2$. Подставляя сюда (5.5) и рассматривая отдельно случаи $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$, приходим к неявному уравнению поверхности

$$R^2 \mp (1 + \sigma)RW + \sigma W^2 \mp (1 - \sigma)(1 + \sigma)R + 2\sigma(1 - \sigma)W = 0, \quad R = \sqrt{U^2 + V^2}, \quad (5.6)$$

в котором верхний знак берется при $\sigma > 0$, а нижний при $\sigma < 0$.

5.2. Образующая гипербола

Структура поверхности \mathcal{H} определяется тем, что она образована, как это видно из (5.6), вращением вокруг оси W гиперболы

$$V^2 \mp (1 + \sigma)VW + \sigma W^2 \mp (1 - \sigma)(1 + \sigma)V + 2\sigma(1 - \sigma)W = 0, \quad (5.7)$$

возникающей при сечении плоскостью $U = 0$, см. фиг. 5. Приведем уравнение (5.7) к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{W} \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sigma - \sqrt{2(1 + \sigma^2)}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sigma + \sqrt{2(1 + \sigma^2)})$$

суть собственные значения квадратичной формы (5.7), причем $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, и

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_1)^2}}, & c_{12} &= \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_2)^2}}, \\ c_{21} &= \frac{2(1 - \lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_1)^2}}, & c_{22} &= \frac{2(1 - \lambda_2)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_2)^2}}. \end{aligned}$$

В новых переменных \tilde{V} , \tilde{W} уравнение гиперболы записывается в виде

$$\left(\frac{\tilde{W} - \tilde{W}_0}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{V} - \tilde{V}_0}{\beta} \right)^2 = \operatorname{sgn}(\sigma),$$

где

$$\tilde{V}_0 = -\frac{1 - \sigma}{2\lambda_1} \frac{2\sigma\sqrt{2(1 + \sigma^2)} - (1 + 3\sigma^2)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_1)^2}}, \quad \tilde{W}_0 = \frac{1 - \sigma}{2\lambda_2} \frac{2\sigma\sqrt{2(1 + \sigma^2)} + (1 + 3\sigma^2)}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4(1 - \lambda_2)^2}}$$

и

$$\alpha = \sqrt{\left| \frac{\lambda_1 \tilde{V}_0^2 + \lambda_2 \tilde{W}_0^2}{\lambda_2} \right|}, \quad \beta = \sqrt{\left| \frac{\lambda_1 \tilde{V}_0^2 + \lambda_2 \tilde{W}_0^2}{\lambda_1} \right|}.$$

Рассматриваемая гипербола имеет асимптоты

$$V = \operatorname{sgn}(\sigma)(W + 1 - \sigma), \quad V = |\sigma|(W + 1 - \sigma),$$

пересекающиеся в точке $V = 0$, $W = -(1 - \sigma)$. Отметим, что ось вращения W не совпадает с осью симметрии гиперболы (5.7).

5.3. Отображение кривых

Из результатов п. 3.3 следует, что отображение G переводит каждую окружность \mathcal{C}_λ при $\lambda \in (0, \infty)$ в окружность \mathcal{T}_λ , а дугу гиперболы H_ψ в дугу гиперболы h_ψ . Семейство кривых h_ψ включает образующую гиперболу (5.7), которая соответствует значению угла $\psi = \pi/2$ при $\sigma > 0$ и $\psi = -\pi/2$ при $\sigma < 0$.

5.4. Предельные значения параметра σ

Рассмотрим три выделяющихся значения параметра σ : это 0, 1 и -1 , причем последние два относятся к уравнению (1.2), не являющемуся эллиптическим.

При $\sigma = 0$, как уже было отмечено во введении, функция P_σ – это ядро Пуассона для уравнения Лапласа. Эта функция является вещественнозначной, поэтому ее якобиан обращается в нуль во всем единичном круге. При этом каждая окружность $\rho = 2\kappa \cos \theta$, касающаяся единичной в точке $z = 1$, отображается точку $w = \kappa^{-1} - 1$. Таким образом, поверхность \mathcal{H} при $\sigma \rightarrow 0$, сужаясь, вырождается в полупрямую $[0, \infty)$. Образующая гипербола (5.7) в этом случае вырождается в пару прямых.

При $\sigma = 1$ из (5.6) получаем $R = W$, так что поверхностью вращения является конус.

Наконец, при $\sigma = -1$ уравнение (5.7) приобретает вид

$$\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \left(\frac{W+2}{2}\right)^2 = -1,$$

задающий гиперболу, у которой одна из вершин расположена в начале координат. Следовательно, поверхностью вращения ее правой ветви вокруг оси $W = 0$ является половина двухполостного гиперboloида, ограничивающая одну его полость.

Заметим, что при значениях параметра $\sigma = \pm 1$ линия нуля якобиана вырождается в одну точку $z = 1$ и соответствующее отображение P_σ становится однолиственным.

6. ОТОБРАЖЕНИЕ КОНУСА НА ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ

6.1. Отображение поверхностей

Отобразим коническую область \mathcal{K} с помощью функции F , заданной формулами (4.15), на единичный круг \mathcal{D} , а его, в свою очередь, на поверхность вращения гиперболы \mathcal{H} с помощью (5.3). В результате получим взаимно однозначное отображение $f_\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, которое задается по формулам

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sigma\sqrt{a^2+1}}{ad_1} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} + d_1 \right) \frac{X+a^3Z}{(aX+Z)^2}, \\ V &= \frac{\sigma}{d_1} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} + d_1 \right) \frac{X-aZ}{aX+Z}, \\ W &= -\frac{\sqrt{a^2+1}}{aX+Z} \left(\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} - d_1 \right) \left(1 + \frac{\sigma}{d_1} \frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} \right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

и продолжается на замыкание области \mathcal{K} , причем $f_\sigma : \bar{\mathcal{K}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$, где $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \mathcal{C}_1 \cup \{0\}$, $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{0\}$.

6.2. Отображение кривых

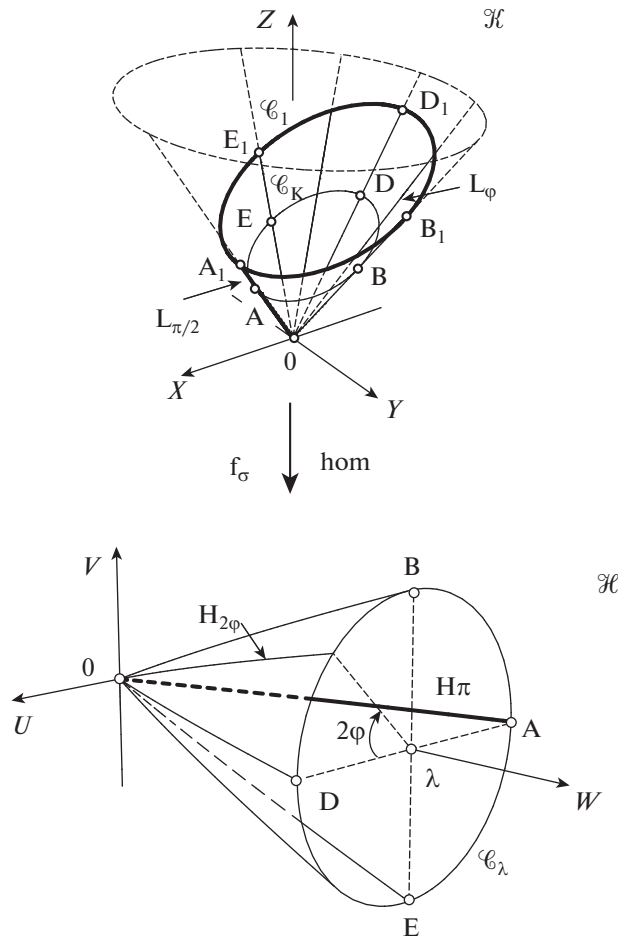
Найдем образы окружностей \mathcal{C}_κ , $\kappa \in (0, 1]$, и образующих конуса L_φ , $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, на поверхности \mathcal{H} .

Окружность \mathcal{C}_κ является сечением поверхности \mathcal{H} плоскостью Π_κ , на которой выполняется соотношение

$$\frac{aX+Z}{\sqrt{a^2+1}} = \kappa d_1.$$

Подставляя его в последнее равенство из (6.1), получаем $W = \lambda$, где $\lambda = (\kappa^{-1} - 1)(1 + \sigma\kappa)$. Но сечение поверхности вращения \mathcal{H} плоскостью $\tilde{\Pi}_\lambda$, заданной равенством $W = \lambda$, представляет собой окружность

$$\mathcal{C}_\lambda : U^2 + V^2 = R^2, \quad W = \lambda,$$



Фиг. 7. Отображение конической области \mathcal{K} на поверхность вращения гиперболы \mathcal{H} при $\sigma > 0$.

радиус которой можно найти с помощью (5.5):

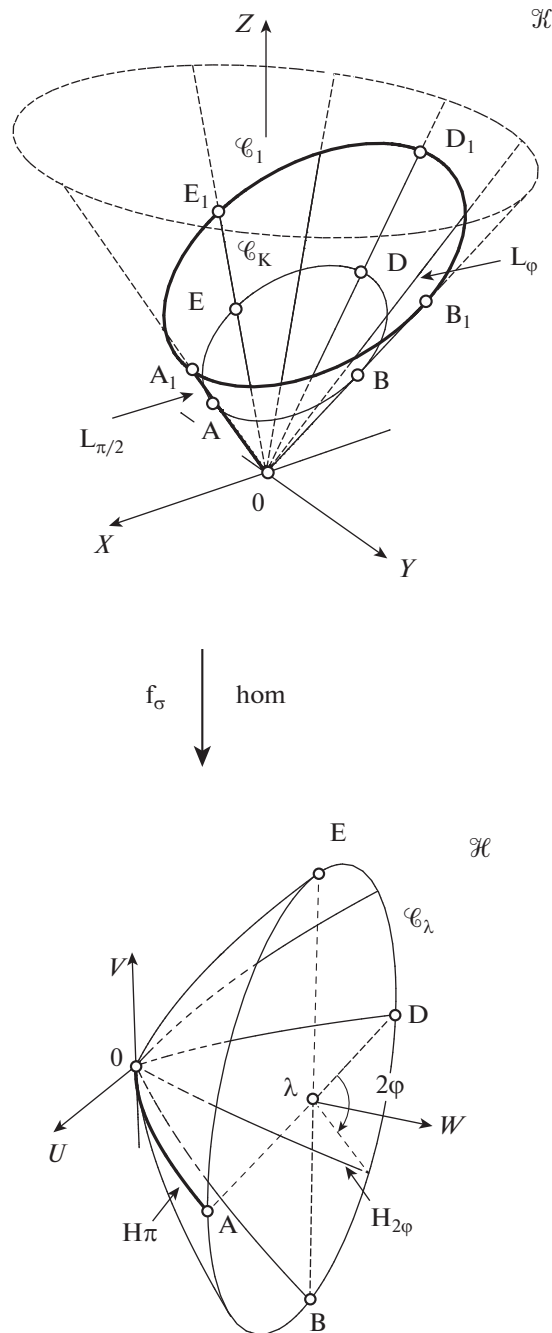
$$R = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma) [(1 + \sigma)(\lambda + 1 - \sigma) - (1 - \sigma)\sqrt{(\lambda + 1 - \sigma)^2 + 4\sigma}].$$

При $\kappa = 1$ имеем $\lambda = 0$ и, следовательно, $R = 0$, так что окружность \mathcal{C}_1 отображается в начало координат, см. фиг. 7, 8.

Образующая L_φ конуса \mathcal{K} отображается функцией F по формулам (4.15) на интервал прямой I_φ , для которого $\theta = \varphi$. Найдем образ такого интервала на поверхности \mathcal{H} . Из (5.3), учитывая, что $0 < \rho < 2 \cos \theta$, получаем соотношения

$$U \sin 2\varphi - V \cos 2\varphi = 0, \quad \sigma U \cos 2\varphi \geq 0,$$

которые задают полуплоскость $\tilde{P}_{2\varphi}$, дающую при сечении поверхности \mathcal{H} дугу гиперболы $H_{2\varphi}$. Полуплоскость $\tilde{P}_{2\varphi}$ составляет угол 2φ при $\sigma > 0$ с положительным, а при $\sigma < 0$ с отрицательным направлением оси U , отсчитываемый от соответствующего направления этой оси, см. фиг. 7, 8 соответственно. В обоих случаях угол между плоскостями, в которых лежат гиперболы H_0 и $H_{2\varphi}$, отсчитываемый от первой ко второй, равен 2φ , т.е. вдвое больше, чем угол между плоскостями, содержащими прообразы этих гипербол на конической области \mathcal{K} . Поскольку



Фиг. 8. Отображение конической области \mathcal{H} на поверхность вращения гиперболы \mathcal{H} при $\sigma < 0$.

$\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, то угол 2φ пробегает значения от $-\pi$ до π , так что гиперболы, возникающие в плоских сечениях, осуществляют полный оборот вокруг оси W .

Автор выражает большую благодарность В.И. Власову за плодотворные обсуждения и ценные советы при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
2. Hua Loo-Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian. Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.

3. Багани А.О., Федоровский К.Ю. C^1 -аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в \mathbb{R}^2 // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 42–57.
4. Петровский И.Г. Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными // Матем. сб. 1939. Т. 5. С. 3–70.
5. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 29. № 3. С. 615–676.
6. Багани А.О. Функция Грина и интеграл Пуассона в круге для сильно эллиптических систем с постоянными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. № 6. С. 4–18.
7. Duren P. Harmonic mappings in the plane. Cambridge Tracts in Mathematics, 156. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
8. Rado T. Aufgabe 41. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1926. V. 35. P. 49.
9. Kneser H. Lösung der Aufgabe 41. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1926. V. 35. P. 123–124.
10. Clunie J.G., Sheil-Small T. Harmonic univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. 1984. № 9. P. 3–25.
11. Hengartner W., Schober G. Univalent harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 299. P. 1–31.
12. Bshouty D., Hengartner W., Hossian O. Harmonic typically real mappings // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1996. № 119. P. 673–6800.
13. Duren P., Hengartner W., Laugesen R.S. The argument principle for harmonic functions // Amer. Math. Monthly. 1996. № 103. P. 411–415.
14. Безродных С.И., Власов В.И. Об одной проблеме конструктивной теории гармонических отображений // Совр. матем. Фунд. направления. 2012. Т. 46. С. 5–30.
15. Bshouty D., Joshi S.S., Joshi S.B. On close-to-convex harmonic mappings // Compl. Var. Ellipt. Eq. 2013. V. 58. № 9. С. 1195–1199.
16. Kalaj D., Ponnusamy S., Vuorinen M. Radius of close-to-convexity and fully starlikeness of harmonic mappings. Complex variables and elliptic equations. 2014. V. 59. № 4. P. 539–552.
17. Alessandrini G., Nesi V. Elliptic systems and material interpenetration // Funct. Approx. Comment. Math. 2009. V. 40. № 1. P. 105–115.
18. Зайцев А.Б. Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 5. С. 718–733.
19. Зайцев А.Б. О взаимной однозначности решений эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге на плоскости // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 434. С. 91–100.
20. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Физматлит, 1960.