УДК 517.956.227

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ С ПЕРФОРИРОВАННЫМ БАРЬЕРОМ[1)]

© 2019 г. А. Л. Делицын

(127051 Москва, Большой каретный пер., 19, стр. 1, Институт проблем передачи информации, Россия; 119001 Москва, ул. Серегина, 5, Главный НИИспытательный центр робототехники МО РФ, Россия)

e-mail: delitsyn@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2017 г.
Переработанный вариант 12.01.2019 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Доказана локализация собственных функций оператора Лапласа в области, разделенной перфорированным барьером. Локализация имеет место при достаточно малых размерах отверстий в барьере. При этом мера барьера может быть сколь угодно малой. Библ. 8. Фиг. 1.

Ключевые слова: локализация собственных функций, спектральные задачи, перфорированный барьер.

DOI: 10.1134/S0044466919060048

Локализации собственных функций оператора Лапласа в областях различной геометрической формы посвящен ряд работ, различных по своему характеру [1]–[6]. К ним относятся как работы [1]–[3], в которых приводятся главным образом постановка задачи и вычислительные эксперименты, демонстрирующие поведение собственных функций и собственных значений в конкретных областях, так и работы математического характера. Среди последних необходимо отметить работы [4]–[6], в которых получен ряд законченных результатов для областей с "отростками" и "тонкими перемычками" достаточной произвольной формы.

В настоящем сообщении рассматривается вопрос о локализации собственных функций оператора Лапласа в прямоугольной области, разделенной на две подобласти бесконечно тонким перфорированным барьером, параллельным одной из сторон прямоугольника (см. фиг. 1).

Основной результат заключается в том, что несмотря на то, что суммарная длина отрезков, составляющих барьер, может быть сколь угодно малой, при достаточно малых отверстиях в барьере имеет место локализация собственных функций в одной из подобластей, на которые барьер разбивает область.

Рассмотрим задачу на собственные значения

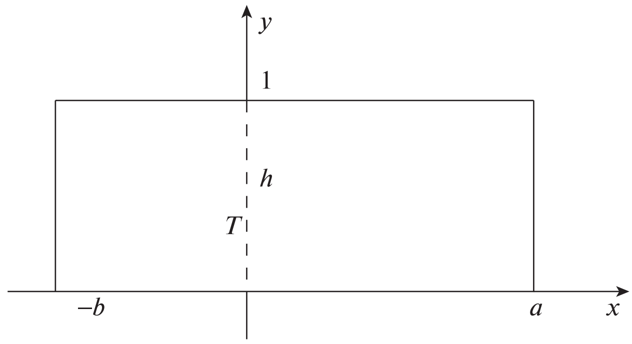
$$-\Delta u = \lambda u, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_T = 0, \\ u \in C_2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \end{gathered} \tag{2}$$

где область $\Omega \backslash T$, в которой рассматривается дифференциальное уравнение, представляет собой прямоугольник Ω с выброшенным барьером T. Прямоугольник Ω определяется условиями $\Omega = \{(x, y) : -b < x < a,\ 0 < y < 1\}$. Прямоугольник Ω разбивается барьером T на две подобласти $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < a\}$ и $\Omega_2 = \{(x, y) : -b < x < 0,\ 0 < y < 1\}$.

Барьер T является объединением непересекающихся отрезков $T_i = \{(x, y) : x = 0,\ c_i \le y \le d_i\}$, где $d_0 = 0 \le c_1 < d_1 < \ldots < c_i < d_i < \ldots < c_N \le 1$, т.е. на границе барьера $T = \bigcup_i T_i$ собственные функции удовлетворяют однородному условию Дирихле.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ А.Л. Делицына в ИППИ РАН (проект 14-50-00150).



Фиг. 1. Прямоугольная область с перфорированным барьером.

Докажем следующие утверждения, которые составляют основное содержание сообщения.

Лемма 1. *Если диаметр максимального отверстия в барьере* $h = \max\limits_i (c_{i+1} - d_i) \to 0$*, то существует собственное значение задачи* (1)*,* (2)*, стремящееся к наименьшему собственному значению* $\frac{\pi^2}{a^2} + \pi^2$ *оператора Лапласа с условиями Дирихле в области* Ω_1.

Пусть $I(x) = \int_0^1 u^2(x, y)dy$. Будем рассматривать отношение $\frac{I(x_1)}{I(x_2)}$, где $0 < x_1 < a$, $-b < x_2 < 0$, в качестве характеристики локализации собственной функции.

Лемма 2. $\frac{I(x_1)}{I(x_2)} \to \infty$ *при* $h \to 0$ *для любых* x_1, x_2*, принадлежащих указанным областям.*

Справедливость леммы 2 означает локализацию собственной функции в подобласти Ω_1. Утверждения, аналогичные лемме 1 и лемме 2, справедливы и для области Ω_2.

Прежде, чем дать доказательство леммы 1, приведем некоторые поясняющие выкладки, которым не будем придавать характер математически строгих утверждений, и которые не будут использоваться в дальнейших доказательствах.

Задача (1), (2) имеет бесконечное число собственных функций. Собственные функции задачи (1), (2) являются элементами пространства $H^1(\Omega \backslash T)$. Пусть $\Gamma = [0,1] \backslash T$. Собственные функции имеют след из пространства $H^{1/2}(\Gamma)$. Считаем, что собственное значение удовлетворяет условиям $\pi^2 < \lambda < 4\pi^2$. Разложим собственную функцию в ряд Фурье слева и справа от сечения $x = 0$ по функциям $\sin \pi n y$.

$$u = \sum_n X_n(x) \sin \pi n y.$$

Учитывая, что u удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (2), представим u в виде ряда

$$u = c_1 \sin \gamma_1 (x - a) \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sinh \gamma_n (x - a) \sin \pi n y, \quad 0 < x < a, \quad \gamma_1 = \sqrt{\lambda - \pi^2},$$

$$u = d_1 \sin \gamma_1 (x + b) \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} d_n \sinh \gamma_n (x + b) \sin \pi n y, \quad -b < x < 0, \quad \gamma_n = \sqrt{\pi^2 n^2 - \lambda}.$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_1 c_1 \cos \gamma_1 (x - a) \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n c_n \cosh_n \gamma_n (x - a) \sin \pi n y, \quad 0 < x < a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_1 d_1 \cos \gamma_1 (x + b) \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n d_n \cosh_n \gamma_n (x + b) \sin \pi n y, \quad -b < x < 0.$$

Коэффициенты c_i, d_i, $i = 1, \ldots, \infty$, выражаются через значения функции u на объединении отверстий Γ в барьере при $x = 0$

$$c_1 = -\frac{2(u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)}}{\sin \gamma_1 a},$$

$$c_n = -\frac{2(u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)}}{\sinh \gamma_n a},$$

$$d_1 = \frac{2(u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)}}{\sin \gamma_1 b},$$

$$d_n = \frac{2(u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)}}{\sinh \gamma_n b}.$$

Для интегралов по объединению отверстий в барьере мы используем обозначение

$$(f, g)_{L_2(\Gamma)} = \sum_i \int_{d_i}^{c_{i+1}} f(0, y) g(0, y) dy.$$

Приравнивая предельные значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ на отверстиях в барьере при $x \to +0$ и $x \to -0$, получаем

$$\begin{gathered} -\gamma_1 \cot \gamma_1 a (u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi y - \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \coth \gamma_n a (u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi n y = \\ = \gamma_1 \cot \gamma_1 (u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \coth \gamma_n b (u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi n y. \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнение (3) будет основным предметом нашего исследования. Доказав существование решения уравнения (3), при значении параметра λ, близкого к $\frac{\pi^2}{a^2} + \pi^2$, мы докажем существование решения исходной задачи. Перейдем к строгим математическим рассуждениям.

Будем понимать уравнение (3) в следующем смысле. Умножая равнство (3) на достаточно гладкую функцию v, обращающуюся в нуль на отрезках барьера $[c_i, d_i]$, и интегрируя по частям, придем к равенству

$$\begin{gathered} \gamma_1 (\cot \gamma_1 a + \cot \gamma_1 b)(u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} (v, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} (v, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Мы можем не использовать больше предыдущие наводящие соображения. Обратимся к строгому рассмотрению непосредственно уравнения (4). Уравнение (4) будем рассматривать в пространстве $H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ u \in L_2(\Gamma) : \sum_{n=1}^{\infty} n (u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)} < \infty \right\}$, понимая его в следующем смысле. Требуется найти ненулевое $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, удовлетворяющее уравнению (4) при любом $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Билинейная форма $a(u, v) = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} (v, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)}$ определена для элементов пространства $H^{1/2}(\Gamma)$, поскольку $\gamma_n \leq \pi n$, $n \geq 2$. Для доказательства достаточно применить неравенство Коши–Буняковского к форме $a(u, v)$, где u и v являются элементами $H^{1/2}(\Gamma)$.

Утверждение 1. *Если уравнение* (4) *имеет решение* $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ *при некотором вещественном* λ, *то оно определяет слабое решение задачи* (1), (2) *в области* $\Omega \backslash T$.

Под слабым решением задачи (1), (2) мы понимаем $u \in \dot{H}^1(\Omega \backslash T)$, являющееся решением задачи на собственные значения

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega \backslash T)} = \lambda (u, v)_{L_2(\Omega \backslash T)} \quad \forall v \in \dot{H}^1(\Omega \backslash \Gamma). \tag{5}$$

В самом деле, если $u(0, y) \in H^{1/2}(\Gamma)$ является при некотором λ ненулевым решением уравнения (4), то его продолжение $u(x, y)$ в области $x < 0,\ x > 0$, определяемое как

$$u = -\frac{\sin \gamma_1 (x - a)}{\sin \gamma_1 a} (u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sinh \gamma_n (x - a)}{\sinh \gamma_n a} (u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi n y, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$u = \frac{\sin \gamma_1 (x + b)}{\sin \gamma_1 b} (u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sinh \gamma_n (x + b)}{\sinh \gamma_n b} (u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} \sin \pi n y, \quad x < 0, \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (5). Слабое решение задачи (1)–(2) из пространства $\dot{H}^1(\Omega \backslash \Gamma)$ является классическим.

Докажем теперь существование решения уравнения (4). Для доказательства будем использовать метод, основанный на введении дополнительного спектрального параметра. Подобный метод широко применяется при доказательстве существования собственных значений [7].

Рассмотрим задачу на собственные значения относительно нового спектрального параметра μ, зависящего параметрически от λ. Будем искать ненулевое $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ и вещественное λ, удовлетворяющие уравнению

$$\begin{gathered} \gamma_1 (\cot \gamma_1 a + \cot \gamma_1 b)(u, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} (v, \sin \pi y)_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b) \times \\ \times (u, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} (v, \sin \pi n y)_{L_2(\Gamma)} = \mu(\lambda)(u, v)_{L_2(\Gamma)} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma). \end{gathered} \tag{8}$$

Если при некотором λ существует нулевое собственное значение $\mu(\lambda)$, то это λ является собственным значением задачи (4), а соответствующее u собственной функцией.

Поскольку пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ вложено в L_2 компактно, то наименьшее собственное значение задачи (8) может быть определено посредством равенства

$$\mu_1 = \inf_{u \in H^{1/2, u \neq 0}(\Gamma)} \frac{\gamma_1 (\cot \gamma_1 a + \cot \gamma_1 b)(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)}}{(u, u)_{L_2(\Gamma)}}. \tag{9}$$

Пусть параметры барьера фиксированы. Поскольку $\cot \gamma_1 a \to -\infty$ при $\gamma_1 a \to \pi - 0$, то $\mu_1(\lambda) < 0$ при λ, близком к $\frac{\pi^2}{a^2} + \pi^2$, что эквивалентно $\gamma_1 a$, близкому к π. Покажем, что, уменьшая с другой стороны максимальный из диаметров отверстий барьера, мы получим положительное значение $\mu_1(\lambda)$. Рассмотрим

$$\begin{gathered} \inf_{u \in H^{1/2, u \neq 0}(\Gamma)} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)}}{(u, u)_{L_2(\Gamma)}} = \\ = \inf_{u \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\sum_i \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma_i)}}{\sum_i (u, u)_{L_2(\Gamma_i)}}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\Gamma_i = [d_i, c_{i+1}]$. Поскольку элемент u можно считать равным нулю на отрезках барьера, то можно заменить $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ набором $u_1, \ldots, u_N$ элементов пространств $H^{1/2}(\Gamma_i)$, и записать (10) в виде

$$\inf_{\substack{u_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \ldots, u_N \in H^{1/2}(\Gamma_i), \\ u_1 \neq 0, \ldots, u_N \neq 0}} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u_i, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma_i)}}{\sum_i (u_i, u_i)_{L_2(\Gamma_i)}}.$$

Элементы u_i рассматриваем как независимые. Увеличим отрезки Γ_i, если это необходимо, таким образом, чтобы из системы функций $\sin \pi n x$ можно было выбрать полную ортогональную подсистему. Например, если в систему отверстий входит отверстие $\left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N}\right]$, то выбираем подсистему $\sin Nk\pi x$. Поскольку inf только уменьшится при увеличении отверстий, которые могут перекрываться, то получим, что

$$\inf_{\substack{u_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \ldots, u_N \in H^{1/2}(\Gamma_i), \\ u_1 \neq 0, \ldots, u_N \neq 0}} \frac{\sum_{i} \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u_i, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma_i)}}{\sum_i (u_i, u_i)_{L_2(\Gamma_i)}} >$$

$$> N \inf_{\substack{u_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \ldots, u_N \in H^{1/2}(\Gamma_i), \\ u_1 \neq 0, \ldots, u_N \neq 0}} \frac{\sum_{i} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n (\coth \gamma_n a + \coth \gamma_n b)(u_i, \sin \pi N k y)^2_{L_2(\Gamma_i)}}{\sum_i (u_i, u_i)_{L_2(\Gamma_i)}} \geq 1.$$

Отсюда вытекает справедливость доказываемого утверждения.

Таким образом, при любом фиксированном λ при достаточно малом диаметре максимального отверстия, $\mu_1(\lambda)$ положительно. Учитывая, что $\mu_1(\lambda)$, очевидно, непрерывно зависит от λ, существует значение λ, при котором $\mu_1(\lambda) = 0$. Доказательство непрерывной зависимости собственного значения μ_1 от λ полностью аналогично приведенному в [8].

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 о поведении собственного значения при стремлении диаметра максимального отверстия в барьере к нулю к собственному значению оператора Лапласа в подобласти вытекает локализация собственной функции в одной из подобластей.

Доказательство леммы 2.

Рассмотрим

$$\frac{I(x_1)}{I(x_2)} = \frac{\dfrac{\sin^2 \gamma_1 (x_1 - a)}{\sin^2 \gamma_1 a}(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sinh^2 \gamma_n (x_1 - a)}{\sinh^2 \gamma_n a}(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)}}{\dfrac{\sin^2 \gamma_1 (x_2 + b)}{\sin^2 \gamma_2 b}(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sinh^2 \gamma_n (x_2 + b)}{\sinh^2 \gamma_n b}(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)}}.$$

Оценивая $I(x_1)$ снизу, имеем

$$I(x_1) = \frac{\sin^2 \gamma_1 (x_1 - a)}{\sin^2 \gamma_1 a}(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sinh^2 \gamma_n (x_1 - a)}{\sinh^2 \gamma_n a}(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)} >$$

$$> \frac{\sin^2 \gamma_1 (x_1 - a)}{\sin^2 \gamma_1 a}(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Оценим $I(x_2)$ сверху:

$$I(x_2) \frac{\sin^2 \gamma_1 (x_2 + b)}{\sin^2 \gamma_2 b}(u, \sin \pi y)^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sinh^2 \gamma_n (x_2 + b)}{\sinh^2 \gamma_n b}(u, \sin \pi n y)^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Оценим

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sinh^2\gamma_n(x_2+b)}{\sinh^2\gamma_n b}(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)}$$

учитывая, что

$$\frac{\sinh^2\gamma_n(x_2+b)}{\sinh^2\gamma_n b}<1,\quad -b<x<0.$$

Имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sinh^2\gamma_n(x_2+b)}{\sinh^2\gamma_n b}(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)}<\sum_{n=2}^{\infty}(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)}<\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n(\coth\gamma_n a+\coth\gamma_n b)(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Воспользуемся далее равенством 3

$$-\gamma_1(\cot\gamma_1 a+\cot\gamma_1 b)(u,\sin\pi y)^2_{L_2(\Gamma)}=\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n(\coth\gamma_n a\coth\gamma_n b)(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)},$$

из которого получим оценку

$$I(x_2)=\sum_{n=2}^{\infty}(u,\sin\pi ny)^2_{L_2(\Gamma)}<-\gamma_1(\cot\gamma_1 a+\cot\gamma_1 b)(u,\sin\pi y)^2_{L_2(\Gamma)}.$$

В результате получаем оценку

$$\frac{I(x_1)}{I(x_2)}>\frac{\sin^2\gamma_1(x-a)\sin^2\gamma_1 a(u,\sin\pi y)^2_{L_2(\Gamma)}}{\left(\frac{\sin^2\gamma_1(x+b)}{\sin^2\gamma_1 b}+\gamma_1(\cot\gamma_1 a+\cot\gamma_1 b)\right)(u,\sin\pi y)^2_{L_2(\Gamma)}}>C\frac{1}{\sin\gamma_1 a},\tag{11}$$

где C – константа, не зависящая от λ.

Учитывая, что $\sin\gamma_1 a\to$, получаем, что $\dfrac{I(x_1)}{I(x_2)}\to\infty$ при $h\to 0$. Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heilman S.M., Strichartz R.S.* Localized Eigenfunctions: Here You See Them, There You Don't // Notices Amer. Math. Soc. 2010. V. 57. P. 624–629.
2. *Sapoval B., Gobron T., Margolina A.* Vibrations of fractal drums // Phys. Rev. Lett. 1991 V. 67. № 1. P. 2974–2977.
3. *Grebenkov D.S., Nguyen B.-T.* Geometrical structure of Laplacian eigen-functions // SIAM Rev. 2013. V. 55. P. 601–667.
4. *Гадыльшин Р.Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
5. *Гадыльшин Р.Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Матем. заметки. 1994. Т. 54. № 1. С. 20–34.
6. *Гадыльшин Р.Р.* О собственных значениях "гантели с тонкой ручкой" // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 2. С. 45–110.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
8. *Делицын А.Л.* О дискретном спектре оператора Лапласа в цилиндре с локально возмущенной границей // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 40. № 2. С. 198–207.