

УДК 532.5

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИСТЕНОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ<sup>1)</sup>

© 2019 г. В. Р. Ефремов<sup>1,\*</sup>, В. В. Курулин<sup>2,\*\*</sup>, А. С. Козелков<sup>2,3,\*\*\*</sup>,  
А. А. Куркин<sup>3,\*\*\*\*</sup>, Д. А. Уткин<sup>2,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>1)</sup> 300001 Тула, ул. Щегловская засека, 59, АО Конструкторское бюро приборостроения, Россия;  
<sup>2)</sup> 607189 Саров, Нижегородская обл., пр-т Мира, 37, ФГУП Российский Федеральный ядерный центр  
Всероссийский НИИ эксперим. физ., Россия;

<sup>3)</sup> 603950 Нижний Новгород, ул. Минина, 24, ФГБОУ высшего образования,  
Нижегородский гос. техн. ун-т, Россия)

\*e-mail: valentin\_e@mail.ru

\*\*e-mail: kurulin@mail.ru

\*\*\*e-mail: askozelkov@mail.ru

\*\*\*\*e-mail: aakurkin@gmail.com

\*\*\*\*\*e-mail: dimitryavich@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.06.2018 г.  
Переработанный вариант 14.09.2018 г.  
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Важной проблемой численного моделирования турбулентного теплообмена в жидкости является точное предсказание гидродинамических характеристик течения в пограничном слое, что требует качественного сеточного разрешения вблизи твердых поверхностей. В практических приложениях соблюдение качественного сеточного разрешения не всегда возможно, а использование более грубого сеточного разрешения приводит к многократной потере точности. Одним из известных подходов увеличения точности результатов моделирования пограничного слоя является использование универсальных пристеночных функций для вычисления трения и теплового потока. В работе рассматриваются существующие пристеночные функции для вычисления теплового потока. Проводится исследование их точности на задачах турбулентного неизотермического течения жидкости: течение в плоском канале, течение Куэтта, течение вдоль нагретой пластины. Каждая из задач решается на сетках с различным пристеночным разрешением. По результатам решения задач делается вывод о точности каждой из рассматриваемых пристеночных функций. Показано, что рассмотренные пристеночные функции дают немонотонную сходимостъ результатов при измельчении расчетной сетки. Библ. 23. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** численное моделирование, турбулентность, пограничный слой, турбулентный теплообмен, пристеночная функция.

**DOI:** 10.1134/S004446691906005X

### ВВЕДЕНИЕ

Большая часть практически важных течений жидкости или газа проходит в турбулентном режиме и содержит участки пограничного слоя вблизи твердой поверхности. Пограничный слой имеет сложную структуру и характеризуется высокими градиентами продольной скорости и температуры. Градиент скорости внутри пограничного слоя напрямую определяет силу трения и, следовательно, общее гидродинамическое сопротивление [1]. Градиент температуры, в свою очередь, определяет тепловой поток, передающийся от жидкости к твердому телу. В связи с этим

<sup>1)</sup> Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.4568.2017/6.7 и задание № 5.1246.2017/4.6) и при финансовой поддержке грантов Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации НШ-2685.2018.5 и молодых российских ученых-докторов наук МД-4874.2018.9, а также при финансовой поддержке РФФИ – проект № 16-01-00267.

точность численного моделирования большинства задач напрямую зависит от точности моделирования пограничного слоя.

Методы численного моделирования пограничного слоя определяются используемыми подходами моделирования турбулентности. Так, при прямом численном моделировании в пограничном слое должны быть численно воспроизведены вихри всех линейных масштабов, вплоть до Колмогоровского [2]. Это требует использования подробных сеточных моделей, что на практике приводит к непомерно высоким ресурсным затратам [3]–[5]. В настоящее время для моделирования задач турбулентного течения жидкости и газа наиболее применимыми на практике являются RANS-модели турбулентности [6], [7]. В рамках RANS-модели вместо мгновенных полей основных величин рассматриваются осредненные поля. Это позволяет существенно сократить количество ячеек в пограничном слое. Однако градиенты осредненных полей скорости и температуры по направлению, перпендикулярному стенке, в пограничном слое остаются высокими и требуют качественного сеточного разрешения в данной области.

Качество сеточного разрешения определяется расстоянием от стенки до первого счетного узла, который, для получения хорошего результата, должен располагаться глубоко внутри ламинарного подслоя, что соответствует значению безразмерного параметра  $y^+ < 1$  (см. [1]). Построение расчетной сетки с подобным пристеночным разрешением для многих задач связано с трудностями, которые заключаются в том, что вдоль одной и той же области твердой поверхности скорость потока может меняться на порядки, что означает изменение на порядки безразмерного параметра  $y^+$ . В таких задачах построение расчетной сетки с условием, что первый пристеночный слой на всем протяжении твердой поверхности будет находиться в ламинарном подслое ( $y^+ < 1$ ), приводит к возрастанию количества расчетных ячеек и наличию зон с избыточным количеством ячеек, которые не приводят к уточнению результатов, а лишь создают дополнительную вычислительную нагрузку. С другой стороны, несоблюдение данного условия даже для малых участков твердой поверхности приводит к неудовлетворительным результатам, поскольку уже при  $y^+ > 10$  прямой метод нахождения силы трения на стенке дает значительную погрешность [8], [9].

Выходом здесь является применение универсальных пристеночных функций, которые позволяют с хорошей точностью предсказывать коэффициент трения и производную скорости на твердой стенке в широком диапазоне значений параметра  $y^+$ . Метод пристеночных функций получил широкое распространение после выхода работы Лаундера и Сполдинга [8] и с тех пор рекомендовал себя как неотъемлемый инструмент для работы с RANS-моделями турбулентности. Метод основан на инициализации граничных условий уравнения сохранения импульса и энергии не на стенке, а на некотором расстоянии от нее, вне области ламинарного подслоя. Граничные условия переносятся в область турбулентного пристеночного слоя, что и позволяет снизить количество счетных ячеек в направлении нормали к стенке. За основополагающие допущения метода пристеночных функций взяты универсальность логарифмического профиля скорости и температуры в пристеночной области и постоянство касательного напряжения, теплового потока и турбулентной энергии [10]. В связи с этим отдельно выделяют пристеночные функции для аппроксимации профиля продольной скорости и тепловые пристеночные функции для аппроксимации профиля температуры. Применение пристеночных функций позволяет успешно моделировать характерные для турбулентности пристеночные явления, однако требует дальнейших усовершенствований, которые позволили бы учитывать низкорейнольдсовы элементы модели турбулентности [8].

Дальнейшее развитие метода пристеночных функций сводится к расширению диапазона их применимости за счет повышения точности в области ламинарного подслоя. Так, в [11] приведена пристеночная тепловая функция, которая автоматически разрешает ламинарный подслой и логарифмическую подобласть пограничного слоя. Показано, что функция дает хорошее согласование с экспериментальными данными для чисел Прандтля  $Pr \gg 1$ . Однако в работе не приводится сравнение тех же результатов, полученных на расчетных сетках другого разрешения.

В [12] приводится аппроксимация, включающая три вида пристеночных функций для разрешения пограничного слоя для ламинарного, буферного и логарифмического подслоя. Данные функции позволяют вычислять тепловой поток при числах Прандтля  $y^+Pr < 1$ ,  $y^+Pr = 1 - 11.7$  и  $y^+Pr > 11.7$  соответственно. Представленные пристеночные функции позволяют моделировать пограничный слой в широком диапазоне чисел Прандтля, однако для решения специальных задач данные функции требуют уточнения, связанного с калибровкой имеющихся формул относительно опорных результатов решения.

В [13] приведены варианты пристеночных функций температуры и скорости для веществ с различным значением числа Прандтля, выведенные из дифференциальных уравнений сохранения энергии и импульса соответственно. Так, для воздуха ( $Pr \sim 0.7$ ) полученная аналитическая зависимость хорошо согласуется с экспериментальными данными, однако аналитическая зависимость для воды ( $Pr \sim 5.9$ ) не способна дать полное совпадение с аналитическими данными в силу того, что толщина теплового пограничного слоя становится меньше толщины динамического слоя, в связи с чем отмечается необходимость уточнения значений значения вихревой вязкости и турбулентного числа Прандтля для жидкостей с  $Pr \gg 1$  при малых  $y^+$ .

В [10] приводится анализ влияния на пристеночные функции таких усложняющих течение факторов, как: течение на непроницаемых поверхностях с ненулевым градиентом давления и проницаемых с нулевым градиентом давления, а также свободная конвекция на непроницаемых и проницаемых поверхностях. В работе обосновывается, что универсальных пристеночных функций не существует, и они должны выбираться исходя из класса рассматриваемого течения.

Одна из недавних работ [11], затрагивающая вопрос влияния пристеночного шага на картину течения, посвящена расчету отрывных течений несжимаемой вязкой жидкости по модифицированной модели переноса сдвиговых напряжений MSST. Проводя исследование осесимметричного обтекания компоновки диск-цилиндра с ультранизким профильным сопротивлением, авторы дали подробный анализ области применения пристеночных функций для некоторых моделей турбулентности, отметив случаи, в которых их использование уместно.

Такое многообразие пристеночных функций обусловлено попыткой снизить погрешность результатов при их применении для того или иного класса задач. В данной работе проводится исследование точности существующих тепловых пристеночных функций применительно к задачам вынужденной конвекции с тепловым пограничным слоем. Рассмотрены следующие пристеночные функции: из работы [12], использующая интерполяционный коэффициент для плавного переключения между выражением для логарифмической и турбулентной подобластей; работы [14], полученная для расчетов с числами Прандтля для газов; работы [13], использующая отдельное выражение для буферной подобласти теплового пограничного слоя. В качестве тестовых задач рассматриваются: течение в плоском канале с подогреваемыми стенками и объемным тепловыделением [15], течение Куэтта [16], обтекание подогреваемой пластины [17]. Каждая из задач решается на сетках с различным пристеночным разрешением. По результатам решения задач делается вывод о точности каждой из рассматриваемых пристеночных функций. Уделяется вниманию монотонности получаемых результатов при измельчении сетки вблизи пограничного слоя.

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Формулировка пристеночных функций сводится к установлению связи между параметрами  $T^+$  и  $y^+$  с помощью эмпирических формул. Здесь  $T^+$  – температура на стенке, обезразмеренная с помощью величин температуры стенки  $T_w$  и температуры в первом счетном узле  $T_i$ , плотности  $\rho$ , удельной теплоемкости  $C_p$ , динамической скорости  $u_\tau$  и теплового потока на стенке  $q_w$ ,  $y^+ = \frac{\rho u_\tau d}{\mu}$  – безразмерное расстояние до стенки, где  $d$  – кратчайшее расстояние до стенки,  $\mu$  – динамическая вязкость. Величина  $T^+$  используется для вычисления теплового потока на стенке в виде (см. [12])

$$T^+ = \frac{T_w - T_i}{T_\tau} = \frac{(T_w - T_i) \rho C_p u_\tau}{q_w} \Rightarrow q_w = \frac{(T_w - T_i) \rho C_p u_\tau}{T^+},$$

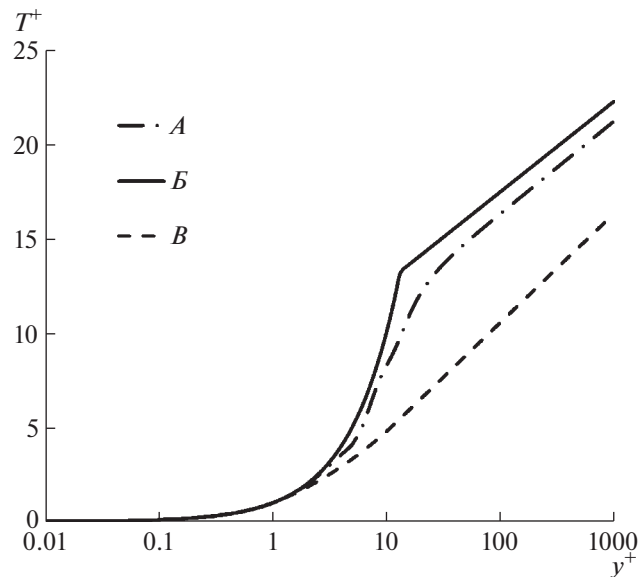
где  $T_\tau = q_w / (\rho C_p u_\tau)$  – температура трения.

Далее рассмотрим наиболее “распространенные” на практике тепловые пристеночные функции.

Такой функцией является функция вида [12] (далее будем обозначать эту как функцию как **функция А**):

$$T^+(y^+) = y^+ Pr e^{(-\Gamma)} + \left\{ 2.12 \ln \left[ (1 + y^+) \frac{2.5 \left( 2 - \frac{y^+}{\delta} \right)}{1 + 4 \left( 1 - \frac{y^+}{\delta} \right)^2} \right] + \beta(Pr) \right\} e^{(-1/\Gamma)},$$

где  $\beta(Pr) = (3.85 Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln(Pr)$ , а  $\Gamma = 0.01 (y^+ Pr)^4 / (1 + 5 y^+ Pr^3)$ .



Фиг. 1. График зависимости  $T^+(y^+)$  для пристеночных функций А, Б и В.

Функция характеризуется наличием интерполяционных коэффициентов  $e^{(-\Gamma)}$  и  $e^{(-1/\Gamma)}$ , для плавного переключения между зависимостями для ламинарного и логарифмического подслоя.

Пристеночная функция для течений с числом Прандтля  $Pr = 0.7 - 1$  была предложена в [14] (далее будем обозначать эту функцию как **функция Б**):

$$T^+(y^+) = \begin{cases} y^+ Pr, & y^+ \leq 13.2, \\ 2.075 \ln(y^+) + 13.2 Pr - 5.34, & y^+ > 13.2. \end{cases}$$

Данная функция отличается от функции А зависимостью  $T^+(y^+)$  в логарифмической части пограничного слоя. В функции выделена точка пересечения пристеночных функций для ламинарного и логарифмического подслоя, в которой наблюдается перелом (см. фиг. 1), что может привести к плохой итеративной сходимости и немонотонности результатов при измельчении расчетной сетки.

В [13] приведена функция, уточняющая распределение  $T^+(y^+)$  в области переходного подслоя отдельной формулой (далее будем обозначать эту функцию как **функция В**):

$$T^+(y^+) = \begin{cases} y^+ Pr, & y^+ Pr < 1, \\ 1.87 \ln(y^+ Pr + 1) + 0.065 y^+ Pr - 0.36, & 1 \leq y^+ Pr \leq 11.7, \\ 2.5 \ln(y^+ Pr) - 1, & y^+ Pr > 11.7. \end{cases}$$

У данной функции в профиле  $T^+(y^+)$  отсутствуют значимые переломы (см. фиг. 1). В логарифмической части пограничного слоя функция В занижает значения  $T^+$  по сравнению с функциями А и Б. Это означает, что функция В будет приводить к более высокому тепловому потоку в пограничном слое по сравнению с функциями А и Б (фиг. 1).

Ниже приводятся результаты сравнения перечисленных тепловых функций на задачах моделирования вынужденной конвекции с тепловым пограничным слоем. В качестве пристеночных функций для трения на стенке используются универсальные пристеночные функции вида (см. [18])

$$U^+ = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{U_{\text{vis}}^4} + \frac{1}{U_{\text{log}}^4}}}, \quad U_{\text{vis}} = y^+, \quad U_{\text{log}} = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+),$$

где  $E = 7.3$ ,  $\kappa = 0.41$  – константа Кармана. Значение  $U^+$  используется для вычисления трения  $\tau_w$ :

$$u_\tau = U_1/U^+, \quad \tau_w = \rho u_\tau^2.$$

Кинетическая энергия турбулентности  $k$  и скорость диссипации турбулентной энергии  $\omega$  в приграничных ячейках аппроксимируются выражениями:

$$k_1 = \left( \frac{1}{k_{\text{vis}}} + \frac{1}{k_{\text{log}}} \right)^{-1}, \quad k_{\text{vis}} = 0.002 u_\tau^2 (y^+)^{3.5}, \quad k_{\text{log}} = \frac{u_\tau^2}{0.3},$$

$$\omega_1 = \sqrt{(\alpha_{\text{vis}} \omega_{\text{vis}})^2 + \omega_{\text{log}}}, \quad \omega_{\text{vis}} = \frac{80\nu}{d^2}, \quad \omega_{\text{log}} = \frac{u_\tau}{0.3\kappa d},$$

где  $\alpha_{\text{vis}} = 0.7$ .

Данные формулы совмещают аппроксимацию для ламинарного (вязкого) подслоя (vis) и логарифмической подобласти (log). В зависимости от того, какому по величине  $y^+$  соответствует область пограничного слоя, больший вклад вносит то или иное соответствующее выражение.

Представленные пристеночные функции используются в качестве граничных условий для решения системы гидродинамических уравнений. Для неизотермических течений вязкой несжимаемой жидкости используется система уравнений Навье–Стокса, дополненная соответствующей моделью турбулентности [16]. Практика численного решения такой системы уравнений весьма распространена, и подробное описание представлено в работах [19]–[22].

В настоящей работе для моделирования турбулентности будем использовать модель SST (см. [16]). Для численного решения системы уравнений Навье–Стокса будем использовать метод SIMPLE на основе конечно-объемной аппроксимации. Подробное описание используемого метода можно найти в [16], [19], [20]. Для проведения численных экспериментов будем использовать российский пакет программ ЛОГОС, предназначенный для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [4], [5], [7], [21], [22].

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Исследование точности моделирования турбулентного пограничного слоя методом пристеночных функций проводится путем решения задач турбулентного течения с теплообменом: течение в канале [15], течение с движущейся стенкой (течение Куэтта) [16] и обтекание плоской пластины [17]. Задачи установившегося течения в канале и течения Куэтта являются простейшими равновесными течениями, которые одинаково хорошо считаются как на мелких, так и на грубых сетках. Задача турбулентного обтекания пластины однородным потоком широко применяется для валидации и верификации методик вычислительной гидродинамики и моделей турбулентности. Численные расчеты проводились при числе Прандтля  $Pr = 1$ .

### 2.1. Течение в канале

Рассматривается задача турбулентного течения несжимаемой жидкости в плоском канале с охлаждаемыми стенками. Задача решалась при числе Рейнольдса  $Re_\tau = 900$ , построенного по полувысоте канала и динамической скорости на стенке  $u_\tau$ . На стенках канала задана фиксированная температура  $T = 0$ . В расчетной области задано объемное энерговыделение:

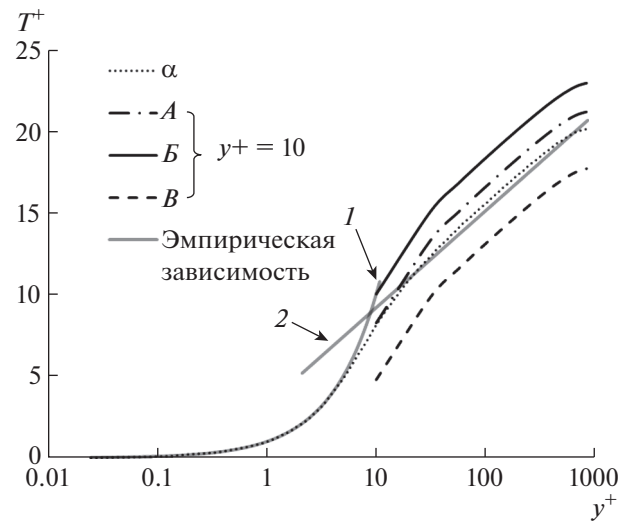
$$Q = \frac{2\rho C_p}{Re_\tau Pr}.$$

Течение жидкости осуществляется с помощью источника в уравнении импульсов

$$I_x = \frac{2\rho u_\tau^2}{h}.$$

На входной и выходной границе заданы периодические граничные условия.

Данная задача решалась на нескольких расчетных сетках, которые соответствовали различным значениям  $y^+$ . Наиболее мелкой сетке значение  $y^+$  соответствовало 0.025, наиболее крупной –  $y^+ = 60$ . Каждая расчетная сетка содержала сгущение к стенкам, размер ячеек в сгущении изменялся по геометрической прогрессии с коэффициентом роста 1.15.



Фиг. 2. Профили температур в канале,  $\alpha$  – расчет на сетке с  $y^+ = 0.025$ .

При установлении стационарного режима течения все тепло, возникающее в результате действия объемного источника, покидает область через тепловой поток на стенках. Неизвестной величиной в задаче является распределение температуры и ее максимальное значение, которое реализуется в центре канала. При недооценке теплового потока  $q_w$  значение максимальной температуры в канале  $T_{\max}^+$  завышается, и, наоборот, при переоценке теплового потока величина максимальной температуры занижается.

На фиг. 2 представлены профили безразмерных температур  $T^+$  на сетках  $y^+ = 10$ , полученные с помощью рассматриваемых тепловых функций.

Профиль температуры, полученный на самой подробной сетке с  $y^+ = 0.025$ , хорошо совпадает с эмпирической зависимостью [23], выражаемой формулами  $T^+ = y^+$  и  $T^+ = 5.91 \lg(y^+) + 3.26$ , которым на фиг. 2 соответствуют кривые 1 и 2. При этом результат наименьшего  $y^+$  не зависит от выбора пристеночной функции, поскольку пограничный слой численно разрешен до ламинарного подслоя, где теплопередача обусловлена, в основном, теплопроводностью. При увеличении  $y^+$  различные пристеночные функции дают отклонение от эмпирического профиля. Для анализа результатов удобнее рассматривать отклонение

$$dT_{\max}^+ = \frac{T_{\max}^+ - T_{\max}^0}{T_{\max}^0},$$

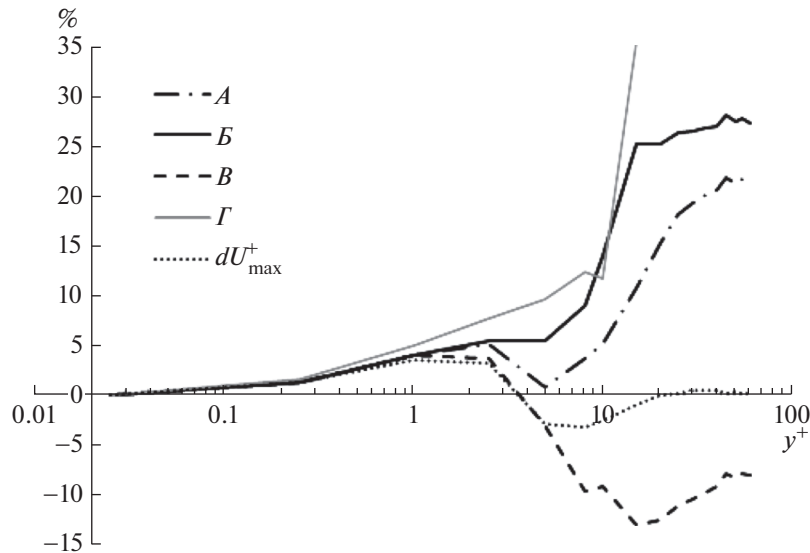
где  $T_{\max}^0$  – максимальная безразмерная температура, полученная на самой подробной сетке  $y^+ = 0.025$ .

На фиг. 3 представлена зависимость отклонения максимальной температуры и максимальной скорости от  $y^+$ : кривые А, Б, В – отклонения максимальной температуры, полученное для функций А, Б и В соответственно; кривая Г – отклонение максимальной температуры, полученные без использования пристеночной функции; кривая  $dU_{\max}^+$  – отклонение максимальной скорости

$$\frac{U_{\max}^+ - U_{\max}^0}{U_{\max}^0},$$

где  $U_{\max}^0$  – максимальная безразмерная скорость, полученная на самой подробной сетке.

На фиг. 3 можно увидеть, что до  $y^+ = 1$  пристеночные функции дают сравнительно одинаковое отклонение, причем оно совпадает с отклонением максимальной скорости, которая реализуется в центре канала. Это указывает на то, что погрешность в работе тепловых пристеночных функций, возможно, обусловлена погрешностью в работе пристеночной функции для трения. После  $y^+ = 1$  наблюдаются отклонения, имеющие неодинаковый характер. Погрешность решения, по-



Фиг. 3. Отклонение максимальной температуры и максимальной скорости в зависимости от  $y^+$ .

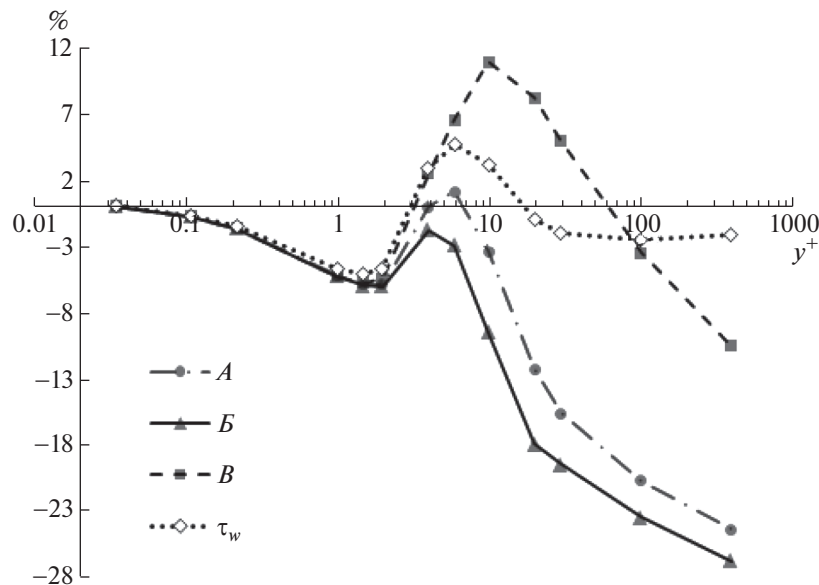
лучаемого без пристеночных функций, как и ожидалось, стремительно возрастает при  $y^+ > 10$ . Максимальная погрешность функций А, Б и В составляет 20%, 28% и 13% соответственно. Однако функция Б обеспечивает стабильно возрастающую погрешность, в то время как другие две функции демонстрируют немонокотное изменение полученного результата. Так, для функций А и В в областях  $y^+ \approx 5$  и  $y^+ \approx 3$ , соответственно, наблюдаемое отклонение оказывается ниже, чем на сетках более высокого разрешения при меньших  $y^+$ . На практике это означает, что при измельчении расчетной сетки данные функции могут приводить к ухудшению результата.

## 2.2. Канал с движущейся стенкой

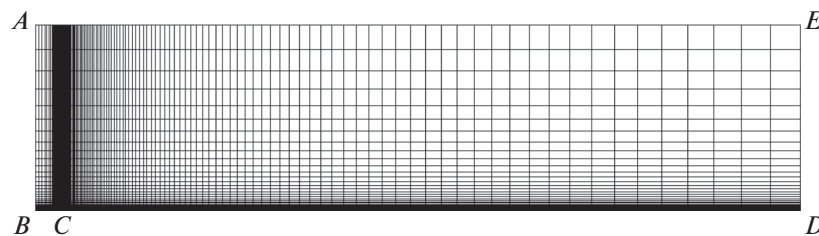
Рассматривается задача турбулентного установившегося течения несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся нагретой стенкой – течение Куэтта. Задача решалась с числом Рейнольдса  $Re = u_w h / \nu = 10^6$ , где  $u_w$  – скорость движения стенки,  $h$  – высота канала. На движущейся стенке задана фиксированная температура  $T = 1$ , на неподвижной стенке  $T = 0$ . На входной и выходной границе канала заданы периодические граничные условия. Задача решалась на нескольких расчетных сетках, где самой мелкой сетке соответствовало  $y^+ = 0.035$ , а самой крупной –  $y^+ = 400$ . Сгущение сетки производится с использованием геометрической прогрессии с коэффициентом роста 1.15.

При установлении стационарного режима течения профиль температуры относительно центра канала становится центрально-симметричным, а величина теплового потока  $q_w$  на движущейся и фиксированной стенке выравнивается. На фиг. 4 представлены результаты отклонения величины теплового потока на стенке от решения, полученного на самой подробной сетке с  $y^+ = 0.035$ .

По графикам видно, что, как и в случае предыдущей задачи, отклонения теплового потока при  $y^+ \leq 2$  подобны отклонению коэффициента трения. Функция В показала наименее приемлемый результат на сетках с  $y^+ > 6$ , где погрешность достигает почти 26%. Функция А при  $y^+ > 10$  дала погрешность до 24%, однако в интервале  $2 < y^+ < 10$  функция дает более удовлетворительные результаты, чем функция А. Функция В демонстрирует высокий процент погрешности на участке  $2 < y^+ < 30$ , который достигает 11%. Все функции показывают немонокотное изменение результата при измельчении расчетной сетки.



Фиг. 4. Отклонение теплового потока и напряжения трения на стенке в зависимости от  $y^+$ .



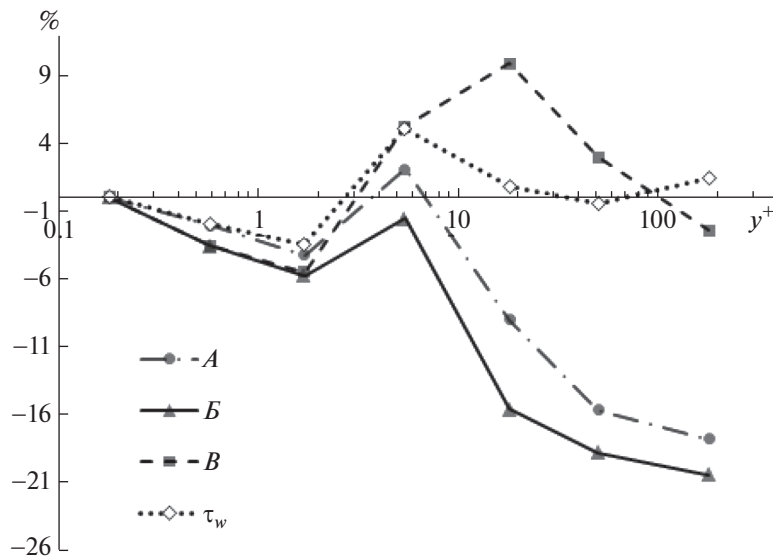
Фиг. 5. Пример расчетной сетки для задачи обтекания пластины.

### 2.3. Обтекание пластины

Рассматривается задача о турбулентном обтекании нагретой плоской пластины однородным потоком в двумерной постановке. Задача решалась относительно числа Рейнольдса на конце пластины  $Re = u_\infty L/\nu = 10^7$ , где  $u_\infty$  – скорость набегающего потока,  $L = 1$  – длина пластины. На фиг. 5 приведен пример расчетной сетки рассматриваемой задачи. Высота расчетной области  $h = 0.25$ . На границе  $AB$  задан втекающий поток с фиксированной скоростью  $u_\infty$  и температурой  $T = 0$ . Граница  $CD$  представляет собой поверхность пластины с фиксированной температурой  $T = 1$ . Граница  $BC$  представляет собой отступ длиной  $0.03L$  и вместе с границей  $AE$  относится к граничным условиям симметрии. Выходная граница  $ED$  – граничное условие с нулевым статическим давлением. Задача решалась на нескольких расчетных сетках, соответствующих параметру  $y^+ = 0.18 - 180$  для задней кромки пластины. Рост высоты счетных ячеек от поверхности пластины к верхней границе подчинялся геометрической прогрессии с коэффициентом роста 1.15. Число ячеек вдоль направления  $x$  для всех сеток было одинаковым, и ширина ячеек менялась по геометрической прогрессии с коэффициентом роста 1.15: минимальный шаг сетки составлял 0.0005, максимальный – 0.04.

При установлении стационарного режима течения касательное напряжение трения на пластине и тепловой поток распределяются по убыванию от передней кромки пластины. Тепловой поток измерялся на пластине в точке, отстоящей от передней кромки на расстоянии  $x$ , соответствующее локальному числу Рейнольдса  $Re_x = xu_\infty/\nu \approx 8.7 \times 10^6$ . На фиг. 6 приведен график значений тепловых потоков  $q_w$  на сетках с разными  $y^+$ .





Фиг. 6. Процентное отклонение от предельного решения теплового потока и напряжения трения на стенке.

Результаты, представленные на фиг. 6, подобны результатам предыдущей задачи. Функция В демонстрирует немонотонность результатов и высокое отклонение в промежуточных значениях  $y^+$ . Функция А демонстрирует отклонение на крупных сетках до 18%. По функции Б погрешность имеет максимальное отклонение, которое составляет 20%.

В результате решения рассмотренных задач с помощью трех тепловых пристеночных функций выяснилось, что ни одна из рассмотренных аппроксимаций не дает минимально-приемлемой погрешности. Пристеночная функция А лучше всего работает при  $y^+ < 10$ , но на крупных сетках отклонение тепловых характеристик возрастает. Функция Б дает большое отклонение результатов в логарифмическом подслое, в котором склонна завышать значение  $T^+$ . Функция В в интервале  $1 \leq y^+ Pr \leq 11,7$ , дает наиболее высокое отклонение результатов. Также недостатком рассмотренных функций является немонотонная сходимость результатов при измельчении расчетной сетки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование точности моделирования турбулентного теплового пограничного слоя на сетках с различным разрешением внутри пограничного слоя и различных тепловых пристеночных функциях, представленных в [12]–[14]. Данные пристеночные функции были использованы для проведения серий расчетов турбулентного неизотермического течения жидкости в каналах и вдоль пластины с числом Прандтля  $Pr = 1$ .

Получено, что при использовании функции [13] погрешность в оценке безразмерной температуры на крупных сетках оказывается наименьшей по сравнению с другими функциями. Однако на участке промежуточной области эта функция дает большое отклонение. Функции [12] и [14] дают отклонение результатов, нарастающее до 20% при увеличении  $y^+$ . Исследование также показало, что все рассмотренные функции могут давать немонотонную сходимость результатов при измельчении расчетной сетки. На практике это может давать ухудшение результатов моделирования при измельчении расчетной сетки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Перев. с немецкого. М.: Наука, 1974.
2. Снегирев А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в физике. Численное моделирование турбулентных течений. СПб.: Изд-во Политехнического Ун-та, 2009.
3. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Heat Fluid Flow. 2000. V. 21. P. 252–263.

4. Козелков А.С., Курулин В.В., Крутякова О.Л., Тятюшкина Е.С. Применение численных схем с выделением пограничного слоя для расчета турбулентных течений с использованием вихреразрешающих подходов на неструктурированных расчетных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 6. С. 1048–1060.
5. Козелков А.С., Курулин В.В., Лашкин С.В., Шагалиев Р.М., Ялозо А.В. Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 8. С. 1524–1535.
6. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Уч. пособие. СПб.: Изд-во БГТУ, 2001.
7. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Циберева Ю.А., Корнев А.В., Денисова О.В., Стрелец Д.Ю., Куркин А.А., Курулин В.В., Шарипова И.Л., Рубцова Д.П., Легчанов М.А., Тятюшкина Е.С., Лашкин С.В., Ялозо А.В., Яцевич С.В., Тарасова Н.В., Гиниятуллин Р.Р., Сизова М.А., Крутякова О.Л. Минимальный базис задач для валидации методов численного моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2014. № 4 (106). С. 21–69.
8. Launder B.E., Spalding D.B. The Numerical Computation of Turbulent Flows // Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engng. 1974. V. 3. P. 269–289.
9. Козелков А.С., Курулин В.В., Пучкова О.Л., Лашкин С.В. Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // Вычисл. механ. сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 40–51.
10. Зайчик Л.И. Пристеночные функции для моделирования турбулентного течения и теплообмена // ТВТ. 1997. Т. 35. Вып. 3. С. 391–396.
11. Исаев С.А., Баранов П.А., Судаков А.Г., Попов И.А. Верификация стандартных и модифицированных с учетом кривизны линий тока MSST и оценка приемлемости комбинированных по Ментеру граничных условий при расчете ультранизкого профильного сопротивления оптимальной компоновки цилиндра с соосным диском // Ж. техн. физ. 2016. Т. 86. № 8. С. 32–41.
12. Kader B.A. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 1981. V. 24. Iss. 9. P. 1541–1544.
13. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по теплогидравлическим расчетам (Ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). М.: Энергоатомиздат, 1990. 360 с.
14. Kays W.M., Crawford M.E. Convective Heat and Mass Transfer. New York: McGraw-Hill, 1994.
15. Kim J., Moin P. Transport of Passive Scalars in a Turbulent Channel Flow. v. VI. Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 85–96.
16. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Experience with the SST Turbulent Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers, Begell House Inc, 2003.
17. Wieghardt K., Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure // NACA TM-1314. 1951. 48 p.
18. Smirnov E.M., Zaitsev D.K. Modification of wall boundary conditions for Low-Re  $k$ - $w$  turbulence models aimed at grid sensitivity reduction // Proc. of the Europ. Conf. for Aerospace Scie., July 4–7th 2005, Moscow (EUCASS 2005), ID 2.09.06, 7 p.
19. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.
20. Козелков А.С. Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // ВАНТ, сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2013. Вып. 4.
21. Волков К.Н., Козелков А.С., Лашкин С.В., Тарасова Н.В., Ялозо А.В. Параллельная реализация алгебраического многосеточного метода для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2079–2097.
22. Козелков А.С., Куркин А.А., Курулин В.В., Легчанов М.А., Тятюшкина Е.С., Циберева Ю.А. Исследование применения RANS-моделей турбулентности для расчета неизотермических течений с низкими числами Прандтля // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2015. № 4. С. 44–58.
23. Репик Е.У., Соседко Ю.П. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований. М.: Физматлит, 2007. 312 с.