УДК 517.9

# СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В БИМАТЕРИАЛЕ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ. Ч. I

**© 2019 г. А. В. Глушко[1,*], А. С. Рябенко[1,**], А. С. Черникова[1,***]**

*([1] 394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский гос. ун-т., Россия)*

**e-mail: kuchp2@math.vsu.ru*

***e-mail: alexr-83@yandex.ru*

****e-mail: chernikova-an@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2018 г.
Переработанный вариант 19.11.2018 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Рассматривается задача сопряжения, описывающая стационарное распределение поля температуры в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными материалами с экспоненциальными коэффициентами внутренней теплопроводности и одной конечной межфазной трещиной. В работе сформулированы условия согласования граничных функций, при которых классическое решение задачи существует и единственно. Построены формулы представления классического решения. Без предположения дополнительных условий изучено обобщенное решение поставленной задачи, построены асимптотические разложения обобщенного решения и его первых производных вблизи концов трещины. Библ. 37.

**Ключевые слова:** задача трансмиссии, классическое решение, краевые условия, уравнение стационарной теплопроводности, трещина, асимптотика.

**DOI:** 10.1134/S0044466919060061

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних нескольких десятилетий довольно актуальным является изучение математических моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами [1]–[5]. Одним из направлений в изучении подобных задач является исследование тепловых процессов в материалах с трещинами [6]–[8]. Количество таких моделей велико и во многом определяется свойствами материалов, геометрией областей, заполненных материалами, количеством трещин и их расположением.

Одними из первых исследований по этой теме были работа [9], посвященная анализу трещины на границе неоднородного слоя, связанного с однородной основой, и работы [10], [11], освещающие влияние механической и тепловой нагрузки на коллинеарные трещины многослойной полуплоскости со ступенчатой границей. Среди работ, посвященных данной теме, отметим [12], [13]. Главным методом исследования большого количества моделей в работах этого типа являются численные расчеты.

Математическим аспектам моделирования материалов с трещинами посвящены работы [14]–[19]. В последнее время также появляются статьи, в которых изучается температурное поле и распределение тепловых потоков в окрестности трещины асимптотическими методами [20]–[30]. К работам такого типа можно отнести работы [20]–[24] о стационарном распределении тепла в функционально-градиентных материалах, заполняющих всю плоскость, с одной конечной трещиной и работу [25] о нестационарном распределении тепла для аналогичной геометрии. К работам, развивающим методы, представленные в статьях [20]–[24], можно отнести статьи [26]–[30], в которых изучается стационарное распределение тепла в функционально-градиентном биматериале с конечной трещиной.

Данная работа является первой из цикла статей, посвященных изучению задачи, моделирующей процесс теплопроводности в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными материалами, что приводит к системе уравнений с классическими условиями трансмиссии. Граничные условия заданы таким образом, что на стыке полуплоскостей моделируется конечная трещина.

В настоящей статье определены условия на граничные функции, при которых задача имеет классическое решение, построено его явное представление и доказана единственность. Показано, что отказ от дополнительных условий приводит к отсутствию классического решения задачи и появлению сингулярных членов в асимптотических представлениях первых производных обобщенного решения рассматриваемой задачи вблизи концов трещины.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Замечание 1.** Через $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ будем обозначать множества точек $\mathbb{R}_+^2 = \{x = (x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}_-^2 = \{x = (x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 < 0\}$, а через $\Delta$ – оператор Лапласа: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Предполагается, что в полуплоскостях $\mathbb{R}_\pm^2$ коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $k(x) = c_{1.5\mp0.5} e^{k_{1.5\mp0.5} x_2}$, где $c_{1.5\mp0.5}$ – произвольные, отличные от нуля константы, а $k_{1.5\mp0.5}$ – произвольные положительные константы. При указанных коэффициентах уравнение стационарной теплопроводности для материала без тепловых источников $\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u(x)) = 0$ может быть записано для каждой из полуплоскостей в виде:

$$\Delta u_p(x) + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1; 2. \tag{1}$$

Граничные условия задаются следующим образом:

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = q_0(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

**Замечание 2.** Условия (2), (3) понимаются в смысле главного значения

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(u_1(x_1, \varepsilon) - u_2(x_1, -\varepsilon)\right),$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{\partial u_1(x_1, \varepsilon)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -\varepsilon)}{\partial x_2}\right).$$

Сначала будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, а носители функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ (см. [31]) содержатся в отрезке $[-1;1]$, то есть $\operatorname{supp} q_0(x_1) \subseteq [-1;1]$, $\operatorname{supp} q_1(x_1) \subseteq [-1;1]$.

Задача (1)–(3) моделирует стационарное распределение тепла в двух связных полуплоскостях $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ с трещиной $l = [-1;1] \times \{0\}$, находящейся на границе этих полуплоскостей, при условии, что в $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ отсутствуют тепловые источники. Условия (2), (3) задают скачки температуры и тепловых потоков на трещине $l$. Предполагается, что на границе полуплоскостей $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ – прямой $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$, вне трещины $l$ температурные поля и тепловые потоки совпадают.

**Определение 1.** Классическим решением задачи (1)–(3) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ и $\overline{\mathbb{R}_-^2}$, таких что

(i) $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$, $u_2(x) \in C^2(\mathbb{R}_-^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_-^2})$ в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1), а также условиям (2) и (3), и такие, что

(ii) функции $e^{0.5k_1x_2} u_1(x)$, $e^{0.5k_1x_2} \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0.5k_1x_2} \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}_+^2$, а функции $e^{0.5k_2x_2} u_2(x)$, $e^{0.5k_2x_2} \dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0.5k_2x_2} \dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}_-^2$;

(iii) функции $e^{0.5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0.5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geq \delta > 0$, а функции $e^{0.5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0.5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \leq -\delta < 0$;

(iv) функция $e^{0.5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, а функция $e^{0.5k_2x_2}u_2(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$;

(v) функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

**Замечание 3.** В указанном определении $\delta$ – произвольная константа.

С помощью замен

$$u_p(x_1,x_2) = e^{-0.5k_px_2}v_p(x_1,x_2), \quad p = 1;2, \quad v_2(x_1,x_2) = z(x_1,-x_2), \tag{4}$$

задача (1)–(3) сводится к задаче

$$\Delta v_1(x) - 0.25k_1^2 v_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{5}$$

$$\Delta z(x) - 0.25k_2^2 z(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{6}$$

$$v_1(x_1,+0) - z(x_1,+0) = q_0(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0) + \frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2}z(x_1,+0) + \frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Из определения 1 получаем следующее определение решения задачи (5)–(8).

**Определение 2.** Классическим решением задачи (5)–(8) будет пара функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных на $\overline{\mathbb{R}^2_+}$, таких что

(i) $v_1(x)$, $z(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (5), (6), а также условиям (7), (8), и такие, что

(ii) функции $v_1(x)$, $z(x)$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$;

(iii) функции $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geq \delta > 0$;

(iv) функции $v_1(x)$, $z(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$;

(v) функции $v_1(x_1,+0)$, $z(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Одним из основных результатов работы является следующая

**Теорема 1.** *Если при* $p = 0; 1$ *выполнены равенства* $q_p(-1) = q_p(1) = q'_p(-1) = q'_p(1) = 0$, *то задача* (5)–(8) *имеет единственное классическое решение, причем для функций* $v_1(x)$ *и* $z(x)$ *справедливы следующие представления:*

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_1^2}}{|s|^2 + 0.25k_1^2}w_1^0(s_1)\right], \quad z(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_2^2}}{|s|^2 + 0.25k_2^2}w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}}w_1^0(s_1)\right], \quad z(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}}w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = \frac{k_1x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(0.5k_1\sqrt{(x_1-y_1)^2 + x_2^2}\right)((x_1-y_1)^2 + x_2^2)^{-0.5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_1^0(s_1)]dy_1,$$

$$z(x)=\frac{k_2x_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_1\left(0.5k_2\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)((x_1-y_1)^2+x_2^2)^{-0.5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_2^0(s_1)]dy_1,$$

*где* $K_1(z)$ *— функция Макдональда (см.* [33], [34]), $P_p(s_1)=F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)]$ *при* $p=0;1$, *а* $w_p^0(s_1)=$

$$=-\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}$$ *при* $p=1;2$.

Нетрудно видеть, что для построения решения задачи (1)–(3) достаточно воспользоваться формулами (4) и результатами теоремы 1.

Непосредственное доказательство сформулированной теоремы содержится в разд. 3 и состоит из следующих этапов: проводится сведение задачи (5)–(8) к двум независимым дифференциальным уравнениям в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$ и построение решений этих дифференциальных уравнений; проводится доказательство того, что при сформулированных условиях на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ решения обобщенных уравнений задают решение задачи (5)–(8), а также доказательство единственности классического решения задачи (5)–(8).

В разд. 4 повышаются требования гладкости для граничных функций $(q_0(x_1),q_1(x_1)\in C^4([-1;1]))$, но отсутствует предположение обнуления $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ и их первых производных в точках $\pm1$, что приводит к необходимости рассматривать обобщенное решение задачи (1)–(3) и влечет за собой появление сингулярных составляющих в асимптотических представлениях первых производных компонент решения указанной задачи вблизи концов трещины.

В работе [28] доказано, что граничные функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ можно представить в виде

$$q_p(x_1)=q_{p,1}(x_1)+q_{p,2}(x_1),\quad p=0;1 \tag{9}$$

где $q_{p,2}(x_1)$ при $p=0;1$ принадлежат классу $\mathfrak{I}=\{f(x)|\,f(x)\in C^3(\mathbb{R});\ f(x)=0,\ x<-1;\ f^{(k)}(-1)=0,$ $k=\overline{0;3};\ \left|f^{(k)}(x)\right|\le Ce^{-x},\ x\ge-1,\ k=\overline{0;3}\}$ и

$$q_{p,1}(x_1)=\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}e^{-(x_1+(-1)^{n+1})}\theta(x_1+(-1)^{n+1})\sum_{m=0}^{3}(m!)^{-1}(x_1+(-1)^{n+1})^m\sum_{l=0}^{m}C_m^lq_p^{(l)}((-1)^n), \tag{10}$$

где $\theta(z)$ – функция Хэвисайда (см. [31]), $C_m^l=m!\big(l!(m-l)!\big)^{-1}$.

Согласно представлениям (9), компоненты решения $\big(u_1(x),u_2(x)\big)$ задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u_p(x)=u_{p,1}(x)+u_{p,2}(x),\quad p=1;2, \tag{11}$$

где $\big(u_{1,j}(x),u_{2,j}(x)\big)$ – решение задачи

$$\Delta u_{p,j}(x)+k_p\frac{\partial u_{p,j}(x)}{\partial x_2}=0,\quad x\in\mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\quad p=1;2, \tag{12}$$

$$u_{1,j}(x_1,+0)-u_{2,j}(x_1,-0)=q_{0,j}(x_1),\quad x_1\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_{1,j}(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_{2,j}(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_{1,j}(x_1),\quad x_1\in\mathbb{R} \tag{14}$$

при $j=1;2$.

С физической точки зрения задача (12)–(14) при $j=2$ описывает стационарное распределение тепла в биматериале с полуограниченной межфазной трещиной. В работе [26] проводилось ее изучение, и был получен следующий результат.

**Теорема 2.** *Решение задачи* (12)–(14) *при* $j=2$ *и его первые производные являются непрерывными, ограниченными функциями.*

Для задачи (12)–(14) при $j=1$ рассматривается обобщенное решение.

**Определение 3.** *Обобщенным* решением задачи (12)–(14) при $j = 1$ назовем решение обобщенной задачи

$$\Delta V_{p,1}(x) - 0.25k_p^2 V_{p,1}(x) = 2\frac{\partial V_{p,1}(x_1,+0)}{\partial x_2}\delta(x_2), \quad p = 1;2,$$

где

$$V_{1,1}(x) = \begin{cases} v_{1,1}(x_1,x_2), & x_2 > 0, \\ v_{1,1}(x_1,-x_2), & x_2 < 0; \end{cases} \quad V_{2,1}(x) = \begin{cases} z_1(x_1,x_2), & x_2 > 0, \\ z_1(x_1,-x_2), & x_2 < 0; \end{cases}$$

$$u_{p,1}(x_1,x_2) = e^{-0.5k_p x_2} v_{p,1}(x_1,x_2), \quad p = 1;2, \quad v_{2,1}(x_1,x_2) = z_1(x_1,-x_2).$$

Под обобщенным решением задачи (1)–(3) будем понимать пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных с помощью равенств (11), где $(u_{1,2}(x), u_{2,2}(x))$ – классическое решение задачи (12)–(14) при $j = 2$, а $(u_{1,1}(x), u_{2,1}(x))$ – обобщенное решение задачи (12)–(14) при $j = 1$.

В силу специального вида граничных функций задачи (12)–(14) при $j = 1$ удалось выписать ее решение в явном виде и выделить сингулярные компоненты его асимптотических представлений вблизи точек $(\pm 1;0)$. С учетом представлений (11) и теоремы 2 это привело к справедливости следующих теорем.

**Теорема 3.** *Для компонент вектор-функции* $(u_1(x), u_2(x))$, *которая является обобщенным решением задачи* (1)–(3), *справедливы следующие свойства*:

1. *функция* $e^{0.5k_1x_2}u_1(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(\mathbb{R}_+^2)$, *а функция* $e^{0.5k_2x_2}u_2(x)$ *пространству* $L_2(\mathbb{R}_-^2)$;

2. *выполнены равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x_1,\varepsilon) - u_2(x_1,-\varepsilon) - q_0(x_1)\right)^2 dx_1 = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2} - q_1(x_1)\right)^2 dx_1 = 0.$$

**Теорема 4.** *Для компонент вектор-функции* $(u_1(x), u_2(x))$, *которая является обобщенным решением задачи* (1)–(3), *и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек* $(\pm 1;0)$:

$$u_1(x) = R_1(x), \quad u_2(x) = R_2(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} = \frac{e^{-0.5k_p x_2}}{2\pi}\Bigg(\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1) - \left(\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1) + \\ + \ln r_{-1}(x)q_1(-1) - \ln r_{+1}(x)q_1(1)\Bigg) + R_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = \frac{e^{-0.5k_p x_2}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1) + \frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1) - \ln r_{-1}(x)q_0'(-1) + \ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right) + R_{p+4}(x),$$

*где* $p = 1;2$, $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ и $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$, *а функции* $R_j(x)$ *равномерно ограничены на любых компактах* $K_j \subset \overline{\mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}}$ *при* $j = \overline{1;6}$.

## 3. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (5)–(8)

Обозначим через $V_1(x)$ и $V_2(x)$ четное продолжение решения задачи (5)–(8) – функций $v_1(x)$ и $z(x)$ на нижнюю полуплоскость, то есть

$$V_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & x_2 > 0, \\ v_1(x_1,-x_2), & x_2 < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad V_2(x) = \begin{cases} z(x), & x_2 > 0, \\ z(x_1,-x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \tag{15}$$

тогда

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial v_1(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2 < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial z(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2 < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Из определения классического решения задачи (5)–(8) следует, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются функциями медленного роста (см. [31]). Таким образом, их можно рассматривать как регулярные обобщенные функции в $S'(\mathbb{R}^2)$ (см. [31]).

Вычислив обобщенные производные от функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ (см. [31]), и, учитывая (15), (16), получим, что в $S'(\mathbb{R}^2)$ они являются решениями уравнений

$$\Delta V_p(x) - 0.25k_p^2 V_p(x) = 2\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\delta(x_2), \quad p = 1;2. \tag{17}$$

**Замечание 4.** Пусть $f(x_1)$ и $\tilde{f}(x)$ – обычные функции, такие что $f(x_1) \in L_1(\mathbb{R})$, а $\tilde{f}(x) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Будем использовать следующие обозначения:

$F_{x_1\to s_1}[f(x_1)] = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1s_1} f(x_1)dx_1$ – преобразование Фурье функции $f(x_1)$ по переменной $x_1$; $F^{-1}_{s_1\to x_1}[f(s_1)] = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1s_1} f(s_1)ds_1$ – обратное преобразование Фурье функции $f(s_1)$ по переменной $s_1$; $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[\tilde{f}(x)] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde{f}(x)dx_1dx_2$ – преобразование Фурье функции $\tilde{f}(x)$ по переменным $x_1$, $x_2$; $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\tilde{f}(s)] = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x_1s_1+x_2s_2)}\tilde{f}(s)ds_1ds_2$ – обратное преобразование Фурье функции $\tilde{f}(s)$ по переменным $s_1$, $s_2$.

В дальнейшем, если не оговорено противного, под прямым и обратным преобразованием Фурье будем понимать обычное прямое и обратное преобразование Фурье, то есть преобразование Фурье в смысле замечания 4.

Из (15), (16) и определения классического решения задачи (5)–(8) получаем, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$, а функции $V_1(x_1,+0)$, $V_2(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, от функций $V_p(x)$, $V_p(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p = 1;2$, существует преобразование Фурье в смысле замечания 4, причем $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]$, где $p = 1;2$, можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

Применив к (17) обобщенное преобразование Фурье по переменным $x_1$, $x_2$ и воспользовавшись свойствами обобщенного преобразования Фурье (см. [31]), получим следующие уравнения, эквивалентные уравнениям (17) в $S'(\mathbb{R}^2)$:

$$-(|s|^2 + 0.25k_p^2)F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)] = 2F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right], \quad p = 1;2, \quad |s|^2 = s_1^2 + s_2^2. \tag{18}$$

В [31] доказано, что если функция $V(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье от регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $V(x)$, также будет регулярной обобщенной функцией, которая порождается преобразованием Фурье функции $V(x)$, в смысле замечания 4. Таким образом, равенство (18) можно рассматривать как равенство для функций.

Введем следующие обозначения:

$$w_p^0(s_1) = F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)], \quad w_p^1(s_1) = F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right], \quad \text{где} \quad p = 1;2;$$
$$P_p(s_1) = F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)], \quad \text{где} \quad p = 0;1. \tag{19}$$

Отметим, что из определения решения задачи (5)–(8) и условий на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ следует, что функции $w_p^0(s_1)$, $w_p^1(s_1)$ и $P_p(s_1)$ существуют.

В лемме 1 работы [27] была доказана справедливость следующих равенств

$$w_p^0(s_1) = -(s_1^2 + 0.25k_p^2)^{-0.5} w_p^1(s_1), \quad p = 1; 2. \tag{20}$$

Применим к равенствам (7), (8) преобразование Фурье по переменной $x_1$, тогда, с учетом (15), (16), (19) и равенств (20), получим, что функции $w_p^0(s_1)$ и $w_p^1(s_1)$, где $p = 1; 2$, будут решениями системы

$$-\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2} \cdot w_p^0(s_1) = w_p^1(s_1), \quad p = 1; 2, \tag{21}$$

$$w_1^0(s_1) - w_2^0(s_1) = P_0(s_1), \tag{22}$$

$$-0.5k_1 w_1^0(s_1) + w_1^1(s_1) + 0.5k_2 w_2^0(s_1) + w_2^1(s_1) = P_1(s_1). \tag{23}$$

Решив систему (21)–(23), находим, что при $p = 1;\ 2$

$$w_p^0(s_1) = -\frac{P_1(s_1) + (-1)^p \left(\sqrt{s_1^2 + 0.25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0.5k_{3-p}\right) P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0.25k_1^2} + 0.5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0.25k_2^2} - 0.5k_2}, \tag{24}$$

Из (18), (19), (20) и (24) следует, что при $p = 1;\ 2$

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)] = \frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}}{|s|^2 + 0.25k_p^2} w_p^0(s_1). \tag{25}$$

Применив к последним равенствам обратное преобразование Фурье, получаем, что решениями уравнений (17) будут функции

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[2(s_1^2 + 0.25k_p^2)^{0.5}(|s|^2 + 0.25k_p^2)^{-1} w_p^0(s_1)], \quad p = 1; 2, \tag{26}$$

где функции $w_p^0(s_1)$ задаются равенствами (24).

В равенствах (26) символ $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}$ обозначает обратное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций (см. [31]).

Отметим, что если у функций, стоящих под знаком обратного преобразования Фурье, будет существовать обычное обратное преобразование Фурье (в смысле определения из замечания 4), то решения уравнений (17) будут регулярными обобщенными функциями, заданными этими обратными преобразованиями Фурье.

При помощи интегрирования по частям можно показать, что для функций $P_p(s_1)$, где $p = 0; 1$, заданных в (19), найдется такая положительная константа $c$, что будут справедливы оценки $|P_p(s_1)| + |P_p'(s_1)| + |P_p''(s_1)| \le c(1 + |s_1|)^{-1}$; если при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то $|P_p(s_1)| + |P_p'(s_1)| + |P_p''(s_1)| \le c(1 + |s_1|)^{-2}$; если при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, то $|P_p(s_1)| + |P_p'(s_1)| + |P_p''(s_1)| \le c(1 + |s_1|)^{-3}$.

Пользуясь оценками на функции $P_p(s_1)$, где $p = 0;1$, можно показать, что для функций $w_1^0(s_1)$ и $w_2^0(s_1)$, заданных равенствами (24), найдется такая положительная константа $c$, что при $s_1 \in \mathbb{R}$ будут выполнены оценки

$$\left|w_p^0(s_1)\right| \le c(1 + |s_1|)^{-1}, \quad p = 1; 2;$$

если при $p = 0;1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то

$$\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \le c\,(1+|s_1|)^{-2}, \quad p = 1;2; \tag{27}$$

если при $p = 0;1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, то

$$\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \le c\,(1+|s_1|)^{-3}, \quad p = 1;2. \tag{28}$$

Из (27) следует, что если при $p = 0;1$ выполнены условия $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (26), являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^2$ функциями, принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ и могут быть вычислены при помощи сведения к повторному интегралу, а функции $V_1(x_1,+0)$ и $V_2(x_1,+0)$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ (см. [27]).

Следовательно, при $x_2 > 0$ и выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0;1$, для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданных равенствами (26), будут справедливы представления

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}(|s|^2 + 0.25k_p^2)^{-1}\right]w_p^0(s_1)\right], \quad p = 1;2.$$

В [32] доказано, что при $x_2 > 0$ и произвольной константе $k > 0$

$$F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[2\sqrt{s_1^2 + 0.25k^2}(|s|^2 + 0.25k^2)^{-1}\right] = e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k^2}}. \tag{29}$$

Таким образом, при $x_2 > 0$ из последних трех равенств получаем, что

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\exp(-x_2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2})w_p^0(s_1)\right], \quad p = 1;2. \tag{30}$$

Заметим, что при $x_2 > 0$ и произвольной константе $k > 0$ выполнена оценка

$$\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2 + 0.25k^2}\right) \le \exp\left(-x_2|s_1|\right).$$

Тогда из (30) следует, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0;1$, функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (26), бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2_+$, а также функции $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_2^2}$, где $p = 1;2$, при $x_2 \ge \delta > 0$ являются ограниченными. Из гладкости функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, их способа построения и леммы дю Буа-Реймона (см. [31]) следует, что они соответственно являются решениями уравнений (5), (6).

Воспользовавшись (30), получаем, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0;1$, функции $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$ в $\mathbb{R}^2_+$ имеют вид

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1 - x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}(-is_1)w_p^0(s_1)ds_1, \quad p = 1;2, \tag{31}$$

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1}\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}\right)\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}\,w_p^0(s_1)ds_1, \quad p = 1;2. \tag{32}$$

Из (28) следует, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, где $p = 0;1$, равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \ge 0$ подынтегральные функции в (31) и (32) мажорируются функцией $c\,(1+|s_1|)^{-2}$, где $c$ — некоторая положительная константа. Таким образом, при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = q'_p(-1) = q'_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$, функции $\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}$ непрерывны и ограничены при $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \geq 0$, причем

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2} = \frac{\partial V_p(x_1,0)}{\partial x_2} = -F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}w_p^0(s_1)\right] = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1}\sqrt{s_1^2 + 0.25k_p^2}\,w_p^0(s_1)ds_1, \quad p = 1; 2.\end{gathered} \tag{33}$$

Воспользовавшись представлениями (33) и оценками (28), можно доказать, что если при $p = 0; 1$ выполнены условия $q_p(-1) = q_p(1) = q'_p(-1) = q'_p(1) = 0$, то функции $\frac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}, \frac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

В работе [27] показано, что если $k$ – положительная константа, тогда при $x$, принадлежащих $\mathbb{R}^2_+$, справедливы следующие равенства:

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25k^2}}{|s|^2 + 0.25k^2}\right] = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k^2}}\right] = \frac{k}{2\pi}K_1\left(0.5k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \tag{34}$$

где $K_1(z)$ – функция Макдональда (см. [33], [34]).

Если воспользоваться свойствами преобразования Фурье, то из (30) и (34) получаем, что если при $p = 0; 1$ выполнены условия $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то при $x_2 > 0$ и при $p = 1; 2$ выполнены равенства.

$$V_p(x) = \frac{k_p x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0.5k_p\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right)((x_1 - y_1)^2 + x_2^2)^{-0.5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_p^0(s_1)]dy_1. \tag{35}$$

В [27] доказано, что для функции $f(x)$ непрерывной на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв I рода, для любого $\delta > 0$ и $k > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{K_1\left(0.5k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon^2}\right)f(y_1)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon^2}}dy_1 = \frac{f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)}{2}, \tag{36}$$

где $f(x_1 - 0)$ и $f(x_1 + 0)$ соответственно пределы слева и справа функции $f(x)$ в точке $x_1$.

Из (35) и (36), (22) и (19) получаем, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_1(x_1,+\varepsilon) - V_2(x_1,+\varepsilon)\right) = F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_1^0(s_1) - w_2^0(s_1)] = F^{-1}_{s_1\to x_1}[P_0(s_1)] = F^{-1}_{s_1\to x_1}[F_{x_1\to s_1}[q_0(x_1)]] = q_0(x_1),$$

то есть выполнено условие (7).

Выполнение условия (8) доказывается аналогичным образом (см. [27]).

Если предположить, что решение задачи (5)–(8) не единственно, то есть существуют две различные вектор-функции $(v_1^1(x), z^1(x))$ и $(v_1^2(x), z^2(x))$, удовлетворяющие равенствам (5)–(8), и ввести обозначения

$$\omega_1(x) = v_1^1(x) - v_1^2(x), \quad \omega_2(x) = z^1(x) - z^2(x),$$

$$W_1(x) = \begin{cases}\omega_1(x_1,x_2), & x_2 > 0,\\ \omega_1(x_1,-x_2), & x_2 < 0;\end{cases} \quad W_2(x) = \begin{cases}\omega_2(x_1,x_2), & x_2 > 0,\\ \omega_2(x_1,-x_2), & x_2 < 0,\end{cases}$$

то, действуя также, как при выводе (25), получаем, что

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[W_p(x)] = 0, \quad p = 1; 2.$$

Из последних равенств следует единственность решения задачи (5)–(8). Подробное доказательство единственности приведено в работе [30].

## 4. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Ранее было отмечено, что решение задачи (1)–(3) представимо в виде (11), где $(u_{1,j}(x), u_{2,j}(x))$ – решения вспомогательных задач (12)–(14) при $j = 1; 2$. Перейдем к изучению первой из них. Рассмотрим функции

$$u_{p,1}(x_1, x_2) = e^{-0.5k_p x_2} v_{p,1}(x_1, x_2), \quad p = 1; 2, \quad v_{2,1}(x_1, x_2) = z_1(x_1, -x_2), \tag{37}$$

$$V_{1,1}(x) = \begin{cases} v_{1,1}(x_1, x_2), & x_2 > 0, \\ v_{1,1}(x_1, -x_2), & x_2 < 0; \end{cases} \quad V_{2,1}(x) = \begin{cases} z_1(x_1, x_2), & x_2 > 0, \\ z_1(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \tag{38}$$

указанные в определении обобщенного решения задачи (12)–(14) при $j = 1$.

Аналогично тому, как сделано в разд. 3, можно получить, что компоненты решения задачи

$$\Delta V_{p,1}(x) - 0.25k_p^2 V_{p,1}(x) = 2\frac{\partial V_{p,1}(x_1, +0)}{\partial x_2}\delta(x_2), \quad p = 1; 2, \tag{39}$$

имеют вид

$$V_{p,1}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2 \to x_1,x_2}[2(s_1^2 + 0.25k_p^2)^{0.5}(|s|^2 + 0.25k_p^2)^{-1} w^0_{p,1}(s_1)], \quad p = 1; 2, \tag{40}$$

где

$$w^0_{p,1}(s_1) = -\frac{P_{1,1}(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0.25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0.5k_{3-p}\right)P_{0,1}(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0.25k_1^2} + 0.5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0.25k_2^2} - 0.5k_2}, \quad p = 1; 2, \tag{41}$$

$$P_{p,1}(s_1) = F_{x_1 \to s_1}[q_{p,1}(x_1)], \quad p = 0; 1. \tag{42}$$

Согласно представлениям (38) и (40), функции $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ при $x_2 > 0$ представимы следующим образом:

$$v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2 \to x_1,x_2}[2(s_1^2 + 0.25k_1^2)^{0.5}(|s|^2 + 0.25k_1^2)^{-1} w^0_{1,1}(s_1)], \tag{43}$$

$$z_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2 \to x_1,x_2}[2(s_1^2 + 0.25k_2^2)^{0.5}(|s|^2 + 0.25k_2^2)^{-1} w^0_{2,1}(s_1)], \tag{44}$$

где функции $w^0_{p,1}(s_1)$ при $p = 1; 2$ заданы равенствами (41).

Сформулируем и докажем лемму о принадлежности вышеуказанных функций $v_{1,1}(x)$ и $z_1(x)$ пространству $L_2(\mathbb{R}^2_+)$.

**Лемма 1.** *Функции* $v_{1,1}(x)$ *и* $z_1(x)$, *заданные равенствами* (43) и (44), *принадлежат пространству* $L_2(\mathbb{R}^2_+)$ *и могут быть вычислены при помощи сведения к повторному интегралу.*

**Доказательство** проведем на примере функции $v_{1,1}(x)$, для функции $z_1(x)$ оно проводится аналогично.

Обозначим $\zeta(s_1, s_2) = 2(s_1^2 + 0.25k_1^2)^{0.5}(|s|^2 + 0.25k_1^2)^{-1} w^0_{1,1}(s_1)$, согласно представлению (43), $v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2 \to x_1,x_2}[\zeta(s_1, s_2)]$ при $x_2 > 0$. Заметим, что функция $\zeta(s_1, s_2)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2_+)$, поэтому ее преобразование Фурье также принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2_+)$ (см. [35]). Рассмотрим последовательность функций $\zeta_k(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2)\eta_k(s_1, s_2)$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R}^2_+) \cap L_1(\mathbb{R}^2_+)$ (см. [36]), где

$$\eta_k(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, & \text{где} \quad -k \le s_1 \le k \quad \text{и} \quad -k \le s_2 \le k; \\ 0, & \text{где} \quad |s_1| \ge k \quad \text{или} \quad |s_2| \ge k \text{ – срезающие функции.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\|\zeta - \zeta_k\|_2 \to 0$ при $k \to 0$.

Преобразование Фурье функции $\zeta(s_1, s_2)$ определяется следующим образом $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta(s_1, s_2)] = \lim\limits_{k\to\infty} F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta_k(s_1, s_2)]$, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left\| F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta(s_1, s_2)] - F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta_k(s_1, s_2)]\right\| = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta_k(s_1, s_2)] = (2\pi)^{-2}\int\limits_{-k\le s_1\le k,-k\le s_2\le k} \zeta_k(s_1, s_2)e^{-i(x,s)}ds =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\zeta_k(s_1, s_2)e^{-ix_1s_1}ds_1\right)e^{-ix_2s_2}ds_2 = F^{-1}_{s_2\to x_2}[F^{-1}_{s_1\to x_1}[\zeta_k(s_1, s_2)]] =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int_{-k}^{k}\zeta_k(s_1, s_2)e^{-ix_2s_2}ds_2\right)e^{-ix_1s_1}ds_1 = F^{-1}_{s_1\to x_1}[F^{-1}_{s_2\to x_2}[\zeta_k(s_1, s_2)]].$$

Таким образом, справедливы равенства

$$v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta(s_1, s_2)] = F^{-1}_{s_2\to x_2}[F^{-1}_{s_1\to x_1}[\zeta(s_1, s_2)]] = F^{-1}_{s_1\to x_1}[F^{-1}_{s_2\to x_2}[\zeta(s_1, s_2)]]. \tag{45}$$

Используя равенство (29) и представление (45), получаем, что

$$v_{1,1}(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}}w^0_{1,1}(s_1)\right]. \tag{46}$$

Аналогично можно доказать, что для $z_1(x)$ справедливо представление $z_1(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}}w^0_{2,1}(s_1)\right]$. Лемма доказана.

**Замечание 5.** Аналогично тому, как показано в лемме 1, можно доказать, что функции $e^{0.5k_1x_2}u_{1,2}(x)$ и $e^{0.5k_2x_2}u_{2,2}(x)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^2_+)$ и $L_2(\mathbb{R}^2_-)$ соответственно, где $(u_{1,2}(x), u_{2,2}(x))$ – решение задачи (12)–(14) при $j = 2$. Следовательно, вернувшись обратно к исходной задаче (1)–(3) с помощью замен (37) и (11), получаем, что функция $e^{0.5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2_+)$, а функция $e^{0.5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_2(\mathbb{R}^2_-)$, где $(u_1(x), u_2(x))$ – решение задачи (1)–(3).

Отказ от условий $q_p(-1) = q_p(1) = q'_p(-1) = q'_p(1) = 0$ при $p = 0; 1$ не позволяет доказать выполнение условий (2) и (3) по непрерывности аналогично тому, как это было сделано в разд. 3 и работах [26], [27], однако, можно доказать, что они выполнены в $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $I$ – конечный или бесконечный интервал, а функция $g(x)$ определена на $I$. В дальнейшем через $O(g(x))$ при $x \in I$ будем обозначать всякую функцию $f(x)$, для которой существует положительная константа $c$ такая, что при $x \in I$ выполнена оценка $|f(x)| \le c|g(x)|$. Легко заметить, что $O((1 - is_1)^{-1}) = O((1 + |s_1|)^{-1})$ при $s_1 \in \mathbb{R}$.

Докажем вспомогательную лемму.

**Лемма 2.** *Для функций* $v_{1,1}(x)$ *и* $z_1(x)$, *заданных равенствами* (43) и (44), *справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_{1,1}(x_1,\varepsilon) - z_1(x_1,\varepsilon) - q_{0,1}(x_1)\right)^2dx_1 = 0, \tag{47}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{k_1}{2}v_{1,1}(x_1,\varepsilon) + \frac{\partial v_{1,1}(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2}z_1(x_1,\varepsilon) + \frac{\partial z_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} - q_{1,1}(x_1)\right)^2dx_1 = 0. \tag{48}$$

**Доказательство.** Согласно равенству Парсеваля (см. [37]) и представлениям (42)–(44), левая часть равенства (47) примет вид

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_{1,1}(x_1,\varepsilon)-z_1(x_1,\varepsilon)-q_{0,1}(x_1)\right)^2dx_1=$$
$$=(2\pi)^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F_{x_1\to s_1}[v_{1,1}(x_1,\varepsilon)]-F_{x_1\to s_1}[z_1(x_1,\varepsilon)]-F_{x_1\to s_1}[q_{0,1}(x_1)]\right|^2ds_1=$$
$$=(2\pi)^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}}w_{1,1}^0(s_1)-e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}}w_{2,1}^0(s_1)-P_{0,1}(s_1)\right|^2ds_1.$$

Применив равенство Парсеваля также к равенству (48), получаем, что доказательство равенств (47) и (48) равносильно доказательству равенств

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|J_p(s_1,\varepsilon)\right|^2ds_1=0,\quad p=1;2,\tag{49}$$

где $J_1(s_1,\varepsilon)$ и $J_2(s_1,\varepsilon)$ имеют вид

$$J_1(s_1,\varepsilon)=e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}}w_{1,1}^0(s_1)-e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}}w_{2,1}^0(s_1)-P_{0,1}(s_1),$$
$$J_2(s_1,\varepsilon)=-\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1\right)\exp\left(-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}\right)w_{1,1}^0(s_1)-$$
$$-\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)\exp\left(-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}\right)w_{2,1}^0(s_1)-P_{1,1}(s_1).$$

Заметим, что при $p=1;\,2$

$$\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}=0.25k_p^2\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}+|s_1|\right)^{-1}+|s_1|.\tag{50}$$

Из (50) следует, что $e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}$, $p=1;\,2$ можно представить в виде

$$e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}=e^{-\varepsilon|s_1|}\times e^{-0.25\varepsilon k_p^2(\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}+|s_1|)^{-1}},\quad p=1;2.\tag{51}$$

Согласно формуле Тейлора легко видеть, что

$$e^{-0{,}25\varepsilon k_p^2(\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}+|s_1|)^{-1}}=1+O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}),$$

где $p=1;\,2$. Тогда из представлений (51) и последних равенств получаем, что

$$e^{-\varepsilon\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}=e^{-\varepsilon|s_1|}+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}),\quad\text{где}\quad p=1;2.\tag{52}$$

С учетом представлений (41) и (52), $J_1(s_1,\varepsilon)$ и $J_2(s_1,\varepsilon)$ примут вид

$$J_1(s_1,\varepsilon)=(w_{1,1}^0(s_1)-w_{2,1}^0(s_1))(e^{-\varepsilon|s_1|}+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}))-P_{0,1}(s_1)=$$
$$=(e^{-\varepsilon|s_1|}-1+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}))P_{0,1}(s_1),$$
$$J_2(s_1,\varepsilon)=-\left(\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1\right)w_{1,1}^0(s_1)+\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)w_{2,1}^0(s_1)\right)\times$$
$$\times(e^{-\varepsilon|s_1|}+e^{-\varepsilon|s_1|}O(x_2(1+|s_1|)^{-1}))-P_{1,1}(s_1)=(e^{-\varepsilon|s_1|}-1+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}))P_{1,1}(s_1),$$

то есть $J_{p+1}(s_1,\varepsilon)=(e^{-\varepsilon|s_1|}-1+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}))P_{p,1}(s_1)$, где $p=0;1$.

Перейдем к оценкам $\left|J_{p+1}(s_1,\varepsilon)\right|$, $p=0;1$. Согласно последним представлениям, справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\begin{gathered}\left|J_{p+1}(s_1,\varepsilon)\right|=\left|(e^{-\varepsilon|s_1|}-1+e^{-\varepsilon|s_1|}O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1}))P_{p,1}(s_1)\right|\le\\ \le\left(\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|+\left|O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1})\right|\right)\left|P_{p,1}(s_1)\right|,\quad\text{где}\quad p=0;1.\end{gathered}\tag{53}$$

Оценим $\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|$ при $\varepsilon \to +0$. Заметим, что справедливо равенство

$$e^{-\varepsilon|s_1|}-1=-\varepsilon|s_1|\int_0^1 e^{-\varepsilon|s_1|\xi}d\xi,$$

тогда $\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|^{\delta} \le \varepsilon^{\delta}|s_1|^{\delta}$ при некотором положительном $\delta$.

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|=\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|^{\delta}\left|e^{-\varepsilon|s_1|}-1\right|^{1-\delta} \le \varepsilon^{\delta}|s_1|^{\delta}(e^{-\varepsilon|s_1|}+1)^{1-\delta} \le 2^{1-\delta}\varepsilon^{\delta}|s_1|^{\delta}. \tag{54}$$

С учетом оценки (54), неравенства (53) можно продолжить следующим образом: $|J_{p+1}(s_1,\varepsilon)| \le$ $\le \left(2^{1-\delta}\varepsilon^{\delta}|s_1|^{\delta}+\left|O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1})\right|\right)|P_{p,1}(s_1)|$, где $p=0;1$. Легко заметить, что $2^{1-\delta}\varepsilon^{\delta}|s_1|^{\delta}+\left|O(\varepsilon(1+|s_1|)^{-1})\right|=$ $=\left|O(\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta})\right|$, следовательно, для $|J_{p+1}(s_1,\varepsilon)|$, где $p=0;1$, справедливы неравенства

$$|J_{p+1}(s_1,\varepsilon)| \le \left|O(\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta})\right||P_{p,1}(s_1)|, \quad p=0;1. \tag{55}$$

Из (10) и (42), имеем

$$P_{p,1}(s_1)=\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m}C_m^l q_p^{(l)}((-1)^n)\right)e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-m-1}, \quad p=0;1, \tag{56}$$

следовательно, что $P_{p,1}(s_1)=O((1+|s_1|)^{-1})$, $p=0;1$. Из (55), а также из последних представлений получаем, что справедливы оценки

$$|J_p(s_1,\varepsilon)| \le \left|O(\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta-1})\right|, \quad p=1;2. \tag{57}$$

Таким образом, воспользовавшись оценками (57) и определением $O(\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta-1})$, имеем

$$|J_p(s_1,\varepsilon)| \le c\left|\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta-1}\right|=c\varepsilon^{\delta}(1+|s_1|)^{\delta-1}, \quad p=1;2, \tag{58}$$

где $c$ — некоторая положительная константа. В последних оценках будем считать $\delta<0.5$. Из неравенств (58), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}|J_p(s_1,\varepsilon)|^2\,ds_1 \le c^2\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{2\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|s_1|)^{2\delta-2}\,ds_1.$$

Заметим, что степень $s_1$ последнего подынтегрального выражения меньше $-1$, тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{2\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|s_1|)^{2\delta-2}\,ds_1=0$, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. [31]), а из этого следует справедливость равенств (49). Лемма доказана.

**Замечание 6.** Для компонентов решения задачи (12)–(14) при $j=2$ функций $u_{1,2}(x)$ и $u_{2,2}(x)$ справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_{1,2}(x_1,\varepsilon)-u_{2,2}(x_1,-\varepsilon)-q_{0,2}(x_1)\right)^2dx_1=0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_{1,2}(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_{2,2}(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}-q_{1,2}(x_1)\right)^2dx_1=0.$$

Таким образом, с учетом леммы 2 и равенств (37) и (11), получаем, что компоненты вектор-функции $(u_1(x),u_2(x))$, являющейся решением задачи (1)–(3), удовлетворяют следующим равенствам:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x_1,\varepsilon)-u_2(x_1,-\varepsilon)-q_0(x_1)\right)^2dx_1=0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}-q_1(x_1)\right)^2dx_1=0.$$

Результаты, указанные в замечаниях 5 и 6, доказывают справедливость теоремы 3.

Перейдем к изучению асимптотических свойств компонент решения задачи (12)–(14) при $j=1$ (а следовательно, с учетом теоремы 2, компонент решения исходной задачи (1)–(3)).

Воспользовавшись результатами леммы 1 (представлением функции $v_{1,1}(x)$ в виде (46), и аналогичным для функции $z_1(x)$) и равенствами (41), (56) и (38), выражения $V_{p,1}(x)$, $\dfrac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_2}$, где $p = 1;\, 2$, при $x_2 > 0$ примут вид

$$\begin{aligned} V_{p,1}(x) = \sum_{n=1}^{2}(-1)^n \sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m} C_m^l q_1^{(l)}((-1)^n)\right) F^{-1}_{s_1\to x_1}[M_{1,p,n,m}(s_1,x_2)] + \\ + (-1)^p \sum_{n=1}^{2}(-1)^n \sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m} C_m^l q_0^{(l)}((-1)^n)\right) F^{-1}_{s_1\to x_1}[M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)], \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{p,1}(x)}{\partial x_j} = \sum_{n=1}^{2}(-1)^n \sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m} C_m^l q_1^{(l)}((-1)^n)\right) F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)^{2-j}(s_1^2+0.25k_p^2)^{\frac{j-1}{2}} M_{1,p,n,m}(s_1,x_2)\right] + \\ + (-1)^p \sum_{n=1}^{2}(-1)^n \sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{l=0}^{m} C_m^l q_0^{(l)}((-1)^n)\right) F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-(is_1)^{2-j}(s_1^2+0.25k_p^2)^{\frac{j-1}{2}} M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right], \end{aligned} \tag{60}$$

где $p, j = 1;\, 2$, а $M_{\gamma,p,n,m}(s_1,x_2)$ при $\gamma, p, n = 1;\, 2$, $m = \overline{0;3}$ заданы равенствами

$$M_{\gamma,p,n,m}(s_1,x_2) = \frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}} e^{(-1)^n is_1}(1-is_1)^{-m-1}\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0.5k_{3-p}\right)^{\gamma-1}}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}.$$

**Замечание 7.** Выражения

$$M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \quad \text{при} \quad p,n = 1;2, \quad m = \overline{0;3};$$

$$M_{2,p,n,m}(s_1,x_2), \quad -(is_1)M_{1,p,n,m}(s_1,x_2), \quad -\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \quad \text{при} \quad p,n=1;2,\ m = \overline{1;3};$$

$$-(is_1)M_{2,p,n,m}(s_1,x_2), \quad -\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}M_{1,p,n,m}(s_1,x_2) \quad \text{при} \quad p,n = 1;2, \quad m = 2;3$$

равномерно по $s_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 > 0$ мажорируются функцией $c(1+|s_1|)^{-2}$, где $c$ — некоторая положительная константа, следовательно, является непрерывными и равномерно ограниченными любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ функциями.

Приведем вспомогательную лемму, доказательство которой аналогично доказательству леммы 3 работы [28].

**Лемма 3.** *Пусть* $x_2 > 0$ *и*

$$\Lambda_p^n(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right] = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}ds_1,$$

$$J_\tau^*(x) = \int_{+0}^{+\infty} e^{(-1)^{\tau+1}((-1)^\tau x_2 + i(x_1+(-1)^{n+1}))s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1,$$

*где* $n, p, \tau = 1;\, 2$, *тогда справедливы асимптотические разложения интеграла* $J_\tau^*(x)$ *в окрестности точек* $(\pm 1; 0)$

$$J_\tau^*(x) = -\ln\sqrt{(x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2} + Jh_\tau^*(x), \quad \tau = 1;2,$$

*где функции* $\Lambda_p^n(x)$ *и* $Jh_\tau^*(x)$ *непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте* $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ *при* $n, p, \tau = 1;2$.

Следующая лемма позволяет выписать асимптотики каждого из слагаемых представлений (59), (60), то есть асимптотические разложения в окрестности точек $(\pm 1; 0)$ функций $V_{1,1}(x)$ и $V_{2,1}(x)$ и их первых производных.

**Лемма 4.** *Пусть* $x_2 > 0$ *и*

$$D_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],$$

$$\Psi_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}(-is_1)}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],$$

$$\Phi_p^{n,\tau}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(-is_1)\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)(1-is_1)^\tau}\right],$$

$$T_p^{n,\tau}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}\frac{e^{(-1)^n is_1}}{(1-is_1)^\tau}\right],$$

$$N_p^{n,1}(x) = F_{s_1\to x_1}^{-1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}}{\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2}\frac{e^{(-1)^n is_1}}{1-is_1}\right],$$

*где* $n, p, \tau = 1;\, 2$, *тогда справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$D_p^{n,1}(x) = Dh_p^{n,1}(x), \quad \Psi_p^{n,1}(x) = -(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{(x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2}+\Psi h_p^{n,1}(x),$$

$$\Phi_p^{n,1}(x) = \frac{x_2}{2\pi((x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2)}+(-1)^{p+1}\frac{k_1+k_2}{8\pi}\ln\sqrt{(x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2}+\Phi h_p^{n,1}(x),$$

$$\Phi_p^{n,2}(x) = \Phi h_p^{n,2}(x),$$

$$T_p^{n,1}(x) = -\frac{x_1+(-1)^{n+1}}{2\pi((x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2)}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2}+\mathrm{T}h_p^{n,1}(x),$$

$$T_p^{n,2}(x) = -(2\pi)^{-1}\ln\sqrt{(x_1+(-1)^{n+1})^2+x_2^2}+\mathrm{T}h_p^{n,2}(x), \quad N_p^{n,1}(x) = Nh_p^{n,1}(x),$$

*в окрестности точек* $(\pm 1; 0)$, *где* $n, p, \tau = 1; 2$, *функции* $Dh_p^{n,1}(x)$, $\Psi h_p^{n,1}(x)$, $\Phi h_p^{n,\tau}(x)$, $\mathrm{T}h_p^{n,\tau}(x)$, $Nh_p^{n,1}(x)$ *непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте* $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$ *при* $n, p, \tau = 1; 2$.

**Доказательство** всех указанных в лемме асимптотических разложений основывается на применении леммы 3, использовании асимптотических разложений при $|s_1| \to +\infty$

$$\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)^{-1} = 0.5(1+|s_1|)^{-1}+O(1+|s_1|)^{-2},$$

$$\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)^{-1} =$$
$$= 0.5+0.125(-1)^p(k_1+k_2)(1+|s_1|)^{-1}+O((1+|s_1|)^{-2}),$$

$$\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)^{-1} = 0.5+O((1+|s_1|)^{-1}),$$

$$\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_{3-p}^2}+(-1)^p0.5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0.25k_1^2}+0.5k_1+\sqrt{s_1^2+0.25k_2^2}-0.5k_2\right)^{-1}\times$$
$$\times\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2} = 0.5|s_1|+0.125(-1)^p(k_1+k_2)|s_1|(1+|s_1|)^{-1}+O((1+|s_1|)^{-1}),$$

где $p = 1; 2$, и выявлении непрерывности и равномерной ограниченности функций при $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \geq 0$.

Согласно обозначениям леммы 4, имеем при $p,n = 1;2$ и $m = 0;1$

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[M_{2,p,n,0}(s_1,x_2)\right] = D^{n,1}_p(x); \tag{61}$$

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}[-(is_1)M_{1,p,n,0}(s_1,x_2)] = \Psi^{n,1}_p(x), \quad F^{-1}_{s_1\to x_1}[-(is_1)M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)] = \Phi^{n,m+1}_p(x); \tag{62}$$

$$\begin{gathered} F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}M_{1,p,n,0}(s_1,x_2)\right] = N^{n,1}_p(x), \\ F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[-\sqrt{s_1^2+0.25k_p^2}M_{2,p,n,m}(s_1,x_2)\right] = T^{n,m+1}_p(x). \end{gathered} \tag{63}$$

Воспользовавшись замечанием 7, равенствами (61)–(63), леммой 4, представлениями (59), (60), (38) и (37) получаем следующие асимптотические разложения функций $u_{p,1}(x)$, $\dfrac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_2}$ вблизи точек $(\pm 1;0)$, где $p = 1;2$

$$u_{p,1}(x) = R_{p,1}(x), \tag{64}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_{p,1}(x)}{\partial x_1} = \frac{e^{-0.5k_px_2}}{2\pi}\left(\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1) - \right. \\ \left. -\left(\frac{x_2}{r_{+1}^2(x)} + \frac{k_1+k_2}{4}\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1) + \ln r_{-1}(x)q_1(-1) - \ln r_{+1}(x)q_1(1)\right) + R_{p+2,1}(x), \end{gathered} \tag{65}$$

$$\frac{\partial u_{p,2}(x)}{\partial x_2} = \frac{e^{-0.5k_px_2}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1) + \frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1) - \ln r_{-1}(x)q_0'(-1) + \ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right) + R_{p+4,1}(x), \tag{66}$$

где $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ и $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$, а функции $R_j(x)$ являются равномерно ограниченными на любых компактах $K_{j,1} \subset \overline{\mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}}$ при $j = \overline{1;6}$.

Из теоремы 2, представлений (64)–(66) следует справедливость теоремы 4.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Kuo A.Y.* Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity. Open crack // Trans. ASME J. 1990. Appl. Mech. 57. P. 359–364.
2. *Lee K.Y., Shul C.W.* Determination of the thermal stress intensity factors for an interface crack under vertical uniform heat flow // Eng. Fract. 1991. Mech. V. 40. № 6. P. 1067–1074.
3. *Wang X.D., Meguid S.A.* The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading // Int. J. Fracture. 1996. V. 76. P. 263–278.
4. *Shbeeb N., Binienda W.K., Kreider K.* Analysis of the driving force for a generally oriented crack in a functionally graded strip sandwiched between two homogeneous half planes // Int. J. Fracture. 2000. V. 104. P. 23–50.
5. *Li Y.-D., Lee K.Y.* An antiplane crack perpendicular to the weak/microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities // Int. J. Fracture. 2007. V. 146. P. 203–211.
6. *Lee K.Y., Park S.-J.* Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow // Engng. Fract. 1995. Mech. 50. № 4. P. 475–482.
7. *Petrova V., Schmauder S.* Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. V. 55. P. 148–157.
8. *Chiu Tz-Cheng, Tsai Shang-Wu, Chue Ching-Hwei.* Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2013. V. 67. P. 514–522.
9. *Chen Y.F., Erdogan F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V.44. P. 771–787.
10. *Choi H.J., Lee K.Y., Jin T.E.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded non-homogeneous interfacial zone // Part A: Mechanical Response. Int. J. Fract. 1998. V. 94. № 2. P. 103–122.
11. *Choi H.J., Jin T.E., Lee K.Y.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone // Part B: Thermal Shock Response. Int. J. Fract. 1998. V. 94. № 2. P. 123–135.
12. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // ASME Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60. P. 195–216.

13. *Martin P.A., Richardson J.D., Gray L.J., Berger J.* On Green's function for a three-dimensional exponentially graded elastic solid // Proc. R. Soc. Lond. A. 2002. V. 458. P. 1931–1947.

14. *Mikhailov S.E.* Localized boundary-domain integral formulations for problems with variable coefficients // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2002. V. 26. P. 681–690.

15. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* Analysis of some localized boundary-domain integral equations // J. Integral Equations and Applications. 2009. V. 21. № 3. P. 405–445.

16. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* On analysis of segregated boundary-domain integral equations for mixed variable-coefficient BVPs in exterior domains // Integral Methods in Sci. and Engng: Comput. and Analytic Aspects. 2011. P. 109–128.

17. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* Analysis of some localized boundary-domain integral equations for transmission problems with variable coefficients // Integral Methods in Sci. and Engng: Comput. and Analytic Aspects. 2011. P. 91–108.

18. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* Localized direct segregated boundary-domain integral equations for variable crack // Memoirs on Differential Eqs and Mathem Phys. 2011. V. 52. P. 17–64.

19. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* Analysis of direct segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient mixed BVPs in exterior domains // Analysis and Applications. 2011. P. 1–32.

20. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. матем. 2010. № 2. С. 47–50.

21. *Логинова Е.А.* Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. матем. 2012. № 1. С. 157–161.

22. *Рябенко А.С.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. матем. 2012. № 1. С. 187–194.

23. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Логинова Е.А., Петрова В.Е.* Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 4. С. 695–703.

24. *Glushko A.V., Ryabenko A.S., Petrova V.E., Loginova E.A.* Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity // Asymptotic Analysis. 2016. V. 98. № 4. P. 285–307.

25. *Логинова Е.А.* Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Матем., механ, астроном. 2012. Вып. 1. С. 40–47.

26. *Черникова А.С.* Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2014. Вып. 3. С. 66–81.

27. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. матем. 2015. № 1. С. 111–134.

28. *Черникова А.С.* Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. матем. 2015. № 1. С. 188–206.

29. *Черникова А.С.* Свойства решения задачи о распределении тепла в биматериале с межфазной трещиной // Науч.-практич. журнал "Аспирант". 2015. № 3. С. 5–9.

30. *Рябенко А.С., Черникова А.С.* О единственности решения задачи, моделирующей распределение тепла в плоскости с трещиной на стыке двух материалов // Вестн. Воронеж. Гос. ун-та сер. Физ. матем. 2017. № 4. С. 124–133.

31. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.

32. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: Физматлит, 2004. 572 с.

33. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.

34. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Физматлит 1977. 456 с.

35. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: учеб. для студ. вузов: в 3 т. Т. 2. М.: Дрофа, 2006. 720 с.

36. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: в 5 т. Т. 4 ч. 1. 6-е изд. М.: Физматлит, 1974. 336 с.

37. *Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982. 256 с.