

УДК 519.634

О ВОЗНИКНОВЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ

© 2019 г. В. Н. Говорухин

(344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, Ин-т матем., механ. и компьют. наук ЮФУ, Россия)

e-mail: vngovoruhin@sfnedu.ru

Поступила в редакцию 20.12.2018 г.
Переработанный вариант 20.12.2018 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Численно исследован механизм возникновения автоколебаний при протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал. Задача формулируется в виде уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости в терминах завихренности и функции тока с граничными условиями Юдовича. В качестве бифуркационного параметра рассмотрена интенсивность завихренности жидкости на входе в канал. Для поиска и анализа устойчивости стационарных режимов используются сеточные аппроксимации, а для решения нестационарной задачи метод вихрей в ячейках. Показано, что при малых интенсивностях завихренности на входе в канал устанавливается проточный стационарный режим. При росте интенсивности завихренности втекающей в канал жидкости стационарный режим колебательно теряет устойчивость, и в его окрестности возбуждаются автоколебания. Исследовано развитие автоколебаний при увеличении бифуркационного параметра. При больших надкритичностях в канале реализуется хаотический режим протекания. Библ. 20. Фиг. 6.

Ключевые слова: идеальная жидкость, протекание жидкости через канал, автоколебания, устойчивость.

DOI: 10.1134/S0044466919060073

Работа посвящена исследованию процессов возникновения автоколебаний при протекании идеальной несжимаемой жидкости через плоский прямоугольный канал. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что, как правило, движения идеальной жидкости порождают консервативную динамическую систему, и не допускают возникновения автоколебаний. В некоторых ситуациях в гидродинамической системе может возникать диссипация специального вида и тогда идеальная жидкость демонстрирует явления, присущие диссипативным системам. Одним из таких случаев является протекание жидкости через плоский канал в постановке Н.Е. Кочина [1] и В.И. Юдовича [2], [3].

При протекании жидкость втекает в канал и вытекает из него через части границы, а частицы жидкости могут привносить завихренность и энергию в область течения через вход в канал и выносить их при покидании канала. Этот механизм порождает специфическую диссипацию в исследуемой задаче. Область течения может подразделяться на проточную и застойную зоны. В проточной зоне жидкие частицы находятся конечное время, а застойную частицы никогда не покидают. При этом проточная зона всегда связна, а застойная зона может состоять из нескольких областей, которые могут быть как внутренними, так и граничными.

Изучение диссипативных свойств задачи протекания идеальной жидкости через канал было начато в работе [4], где установлена возможность асимптотической устойчивости стационарных течений, которая означает то, что малые начальные возмущения полностью вымываются из канала за конечное или бесконечное время. Аналитическое исследование устойчивости стационарных течений получило свое развитие в [5], [6]. Численный анализ проблемы показал, что более интенсивные вихри частично запираются в канале и формируют сложные вихревые конфигурации с рециркуляционными зонами [7]–[10]. Явления формирования стационарного спутного вихря также были найдены экспериментально и численно в близких задачах (см. [11]). Были обнаружены нетривиальные стационарные режимы, область течения которых состоит из связной проточной зоны, и нескольких рециркуляционных зон, в которых сохраняется консер-

вативная динамика. В частности, результаты вычислений работ [10], [12] демонстрируют то, что возмущения не нарастают со временем для многих стационарных режимов. Также в вычислительном эксперименте [8], [9] была обнаружена возможность реализации автоколебательных режимов. До настоящего времени сценарии возникновения автоколебаний идеальной жидкости детально не изучались, и природа обнаруженных нестационарных режимов оставалась не до конца ясной.

В представленной статье предпринята попытка численного изучения бифуркаций, приводящих к автоколебаниям в задаче протекания идеальной жидкости сквозь прямоугольный канал с постоянной скоростью на границах и заданным распределением завихренности на входе в канал. В разд. 1 статьи описана математическая формулировка рассматриваемой задачи, изложены свойства некоторых ее решений. Разд. 2 посвящен поиску нетривиальных стационарных режимов и исследованию их характеристик от интенсивности завихренности жидкости на входе в канал. Во втором разделе описаны методы анализа устойчивости найденных стационарных режимов и приведены результаты их применения. В разд. 3 описываются возникающие нестационарные течения. Выводы и возможные направления дальнейших исследований даны в заключении.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается прямоугольный канал $D = [0, a] \times [0, b]$, заполненный жидкостью. Двумерные движения идеальной несжимаемой жидкости описываются уравнениями Эйлера в терминах завихренности течения $\omega(t, x, y)$ и функции тока $\psi(t, x, y)$:

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad (1.1)$$

$$-\Delta \psi \equiv -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \omega. \quad (1.2)$$

Здесь x, y – пространственные переменные, а t – время. Компоненты скорости (u, v) выражаются через функцию тока $u = \psi_y, v = -\psi_x$. Вертикальные стороны $x = 0$ и $x = a$ прямоугольника D соответственно вход S_+ и выход S_- течения, а горизонтальные стороны $y = 0$ и $y = b$ – непроницаемые стенки.

Существует несколько вариантов математически корректной постановки краевых условий для задачи (1.1), (1.2) в канале, см. [13], [14]. В этой статье рассматриваются граничные условия В.И. Юдовича [2], [3].

На S_+ задана завихренность и нормальная к границе компонента скорости втекающей жидкости

$$\omega|_{x=0} = \omega_+(y), \quad u|_{x=0} = \gamma_+(y), \quad (1.3)$$

где γ_+ и ω_+ – заданные функции, причем $\gamma_+(y) > 0$ при $0 < y < b$.

На остальной части границы задается нормальная компонента скорости (нормаль внешняя):

$$u|_{x=a} = \gamma_-(y), \quad v|_{y=0,b} = 0. \quad (1.4)$$

При этом $\gamma_-(y) > 0$ для $y \in (0, b)$.

Условие несжимаемости требует, чтобы заданные функции γ_- и γ_+ удовлетворяли соотношению

$$\int_0^b \gamma_+(y) dy = \int_0^b \gamma_-(y) dy. \quad (1.5)$$

Условия (1.3), (1.4) в терминах функции тока имеют вид

$$\begin{aligned} \psi|_{x=0} = \psi_+(y) &= \int_0^y \gamma_+(y) dy, & \psi|_{x=a} = \psi_-(y) &= \int_0^y \gamma_-(y) dy, \\ \psi|_{y=0} &= 0, & \psi|_{y=b} &= K, & K &= \int_0^b \gamma_-(y) dy, & \omega|_{x=0} &= \omega_+(y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В начальный момент времени $t = 0$ ω задана во всем канале:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y). \quad (1.7)$$

В статьях [2], [3] установлено, что двумерная задача протекания (1.1)–(1.7) глобально разрешима.

Левая часть уравнения (1.1) представляет собой материальную производную $\frac{D\omega}{Dt}$, откуда следует, что завихренность пассивно переносится жидкими частицами. Значение завихренности в частице жидкости сохраняется во времени и является интегралом системы.

Стационарные решения задачи определяются системой уравнений

$$\psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad -\Delta\psi = \omega \quad (1.8)$$

с граничными условиями (1.6).

Первое уравнение в (1.8) удовлетворяется при существовании функциональной зависимости $\omega = F(\psi)$, т.е. поиск стационарных решений можно свести к решению уравнения

$$-\Delta\psi = F(\psi), \quad (1.9)$$

где $F(\psi)$ – некоторая функция, которую можно разыскивать численно или аналитически. Альтернативным подходом являются задание зависимости $F(\psi)$ и решение уравнения (1.9) относительно ψ .

Если известно некоторое стационарное решение $\hat{\psi}(x, y)$, $\hat{\omega}(x, y)$, то его устойчивость можно изучать, рассматривая динамику малых возмущений $\xi(x, y, t)$ и $\zeta(x, y, t)$. После подстановки $\psi = \hat{\psi} + \xi(x, y, t)$ и $\omega = \hat{\omega} + \zeta(x, y, t)$ в (1.1) и (1.2) получим систему уравнений относительно возмущений:

$$\begin{aligned} \zeta_t + \hat{\omega}_x \xi_y + \zeta_x \hat{\psi}_y - \hat{\omega}_y \xi_x - \zeta_y \hat{\psi}_x + \zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x &= 0, \\ \Delta\xi &= -\zeta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Граничные условия для (1.10) определяются видом предполагаемых возмущений. В этой статье рассматриваются возмущения, удовлетворяющие условиям:

$$\zeta|_{x=0} = \zeta|_{y=0} = \zeta|_{y=b}, \quad \xi|_{x=0} = \xi|_{x=a} = \xi|_{y=0} = \xi|_{y=b}. \quad (1.11)$$

Неустойчивость стационарных режимов можно показать, анализируя линеаризованную задачу (1.10), (1.11). В силу идеальности жидкости можно предположить существование нейтральной части спектра у линеаризованного оператора. Для исследования устойчивости решений в нейтральном случае необходимо решать полную задачу (1.10), (1.11) с ненулевыми начальными условиями.

Динамика частиц жидкости в D описывается уравнениями

$$\dot{x} = \psi_y, \quad \dot{y} = -\psi_x. \quad (1.12)$$

Функция тока ψ является гамильтонианом системы (1.12), ее значение сохраняется для каждой жидкой частицы в области D , а траекториями частиц являются линии постоянного значения ψ . Это свойство во многом определяет динамику идеальной жидкости с граничными условиями (1.3), (1.4).

В стационарном режиме протекания область течения разделяется на проточную зону D_0 и, возможно, застойные. Жидкая частица, входящая в область D_0 , в точке $(0, y_+) \in S_+$, выходит из нее в точке $y_- = R(y_+)$, причем функция R корректно определена на $y \in (0, b)$. При этом в силу того, что вихрь ω и функция тока ψ являются интегралами уравнений движения частиц, должны выполняться равенства

$$\psi_+(y) = \psi_-(R(y)), \quad \omega_+(y) = \omega_-(R^{-1}(y)), \quad y \in [0, b]. \quad (1.13)$$

Полученные соотношения приводят к равенству (см. [10])

$$\omega = F(\psi), \quad (1.14)$$

которое выполняется во всей проточной зоне D_0 даже при наличии застойных зон. Таким образом, в проточной зоне однозначно определяется функция $F(\psi)$, которая задается условиями на

границе (1.6). В каждой из рециркуляционных зон стационарных течений выполняется свое соотношение типа (1.14).

В этой статье расчеты проводились для конкретных функций, определяющих граничные условия (1.6). На входе S_+ и выходе S_- из канала D предполагается постоянная по времени и вертикальной координате нормальная компонента скорости, чему соответствуют функции

$$\psi_+(y) = \psi_-(y) = \psi_{\partial D}(y) = Q_1 y. \quad (1.15)$$

Здесь Q_1 – параметр, в расчетах принималось $Q_1 = 0.05$.

Функция завихренности на входе в канал в условии (1.6) имела вид

$$\omega_+(y) = \frac{A}{1 + \sigma(y - y_c)^2}. \quad (1.16)$$

В расчетах использовались значения параметров $y_c = \frac{b}{2}$, $\sigma = 50$. Параметр A рассматривался в качестве бифуркационного для исследования возникновения автоколебаний.

При $A = 0$ существует тривиальное стационарное решение $\omega = 0$, $\psi = Q_1 y$ задачи (1.8), (1.6). Этому решению соответствует асимптотически устойчивое (см. [9]) проточное течение без застойных зон. При увеличении параметра A при численном решении нестационарной задачи на больших временах устанавливаются стационарные режимы, а при дальнейшем росте A – автоколебания (см. [7], [9]).

Сохранение значения завихренности в частицах жидкости позволяет реализовать эффективный бессеточный метод вихрей в ячейках. Метод детально описан в [8], [15], а его реализация для многопроцессорных вычислительных комплексов приведена в [16]. В основе метода расчета лежат следующие положения: поле завихренности $\omega(x, y)$ задано значениями в N частицах; частицы пассивно переносят завихренность; динамика частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.12), которая решается псевдосимплектическим методом Рунге-Кутты; ψ в каждый момент t приближается отрезком ряда Фурье

$$\psi \approx \sum_{i=1}^{l_x} \sum_{j=1}^{l_y} \psi_{ij}(t) g_{ij}(x, y),$$

где $g_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$; коэффициенты $\psi_{ij}(t)$ находятся в результате применения метода Бубнова-Галеркина к уравнению (1.2); распределение $\omega(x, y)$ приближается двумерной кусочной аппроксимацией кубическими полиномами. Этот метод использовался для решения нестационарной задачи в данной работе.

Для изучения сценария возникновения автоколебаний в канале при росте параметра A необходимо численно решать все перечисленные в этом разделе задачи. Далее описаны используемые методы и полученные с их помощью результаты. Приведены результаты расчетов для канала D со сторонами $a = 3$, $b = 1$.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ

Для поиска стационарных режимов численно решалась задача (1.9) с граничными условиями (1.6). Функциональная зависимость $\omega(\psi)$ в проточной зоне стационарного режима определяется граничными условиями функциями $\omega_+(y)$, $\psi_+(y)$ и $\psi_-(y)$. Для рассматриваемых в статье функций (1.15) и (1.16) эта зависимость имеет вид

$$\omega = F_1(\psi) = \frac{A}{1 + \sigma \left(\frac{\psi}{Q_1} - y_c \right)^2}. \quad (2.17)$$

Стационарные решения с функциональной зависимостью (2.17) являются решениями

$$-\Delta \psi = \frac{A}{1 + \sigma \left(\frac{\psi}{Q_1} - y_c \right)^2}, \quad \psi|_{\partial D} = Q_1 y. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) решалось численно методом конечных разностей. В области D вводилась прямоугольная равномерная сетка размерности $n_x \times n_y$, где n_x, n_y — количество узлов по координатам x и y . Для аппроксимации производных применялись центральные разности второго порядка точности. В результате поиск стационарных режимов сводился к решению нелинейной системы алгебраических уравнений:

$$\frac{\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1}}{h_y^2} = \frac{A}{1 + \sigma\left(\frac{\Psi_{i,j}}{Q_1} - y_c\right)^2}. \quad (2.19)$$

Здесь $\Psi_{i,j}$ — значения Ψ в узле с номером i, j , а h_x, h_y — шаги сетки. Отметим, что неизвестными являются $\Psi_{i,j}$ для $i = 2, \dots, n_x - 1, j = 2, \dots, n_y - 1$, а остальные задаются граничными условиями. Для решения системы (2.19) применялся итерационный метод Ньютона с аппроксимацией матрицы Якоби конечными разностями. В качестве начального приближения использовалась функция (1.15) при $A \ll 1$ и алгоритм продолжения по параметру A для поиска решений при увеличении A . В результате решения находилось сеточное решение для функции тока $\{\Psi_{i,j} | i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y\}$, а значение завихренности находилось как $\{\omega_{i,j} = F_1(\Psi_{i,j}) | i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y\}$.

Найденные сеточные решения приближались отрезками ряда Фурье по пространственным переменным x и y :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x, y) &= \Psi_{\partial D}(y) + \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \hat{\Psi}_{i,j} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \\ \hat{\omega}(x, y) &= \omega_+(y) + \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \hat{\omega}_{i,j} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Предполагается, что количество членов отрезка ряда (2.20) меньше, чем число узлов в (2.19). В расчетах принималось $k_x = n_x - 1, k_y = n_y - 1$.

Для вычисления коэффициентов $\hat{\Psi}_{i,j}, \hat{\omega}_{i,j}$ отрезков ряда (2.20) использовалась процедура численного интегрирования произведения производения сеточного решения уравнения (2.19) на соответствующую тригонометрическую функцию. Такой способ аппроксимации стационарного режима позволяет вычислять значения $\hat{\Psi}(x, y), \hat{\omega}(x, y)$ и их частных производных в любой точке области D . Это необходимо для вычисления невязки уравнения (1.1) при контроле вычислений, анализа возмущенной задачи (1.10) и формирования начального условия (1.7), соответствующего стационарному режиму, для решения нестационарной задачи методом вихрей в ячейках.

Для контроля корректности найденного режима $\hat{\Psi}(x, y), \hat{\omega}(x, y)$ и проверки стационарности численного решения вычислялись следующие характеристики.

1. Невязка численного решения для (1.1)

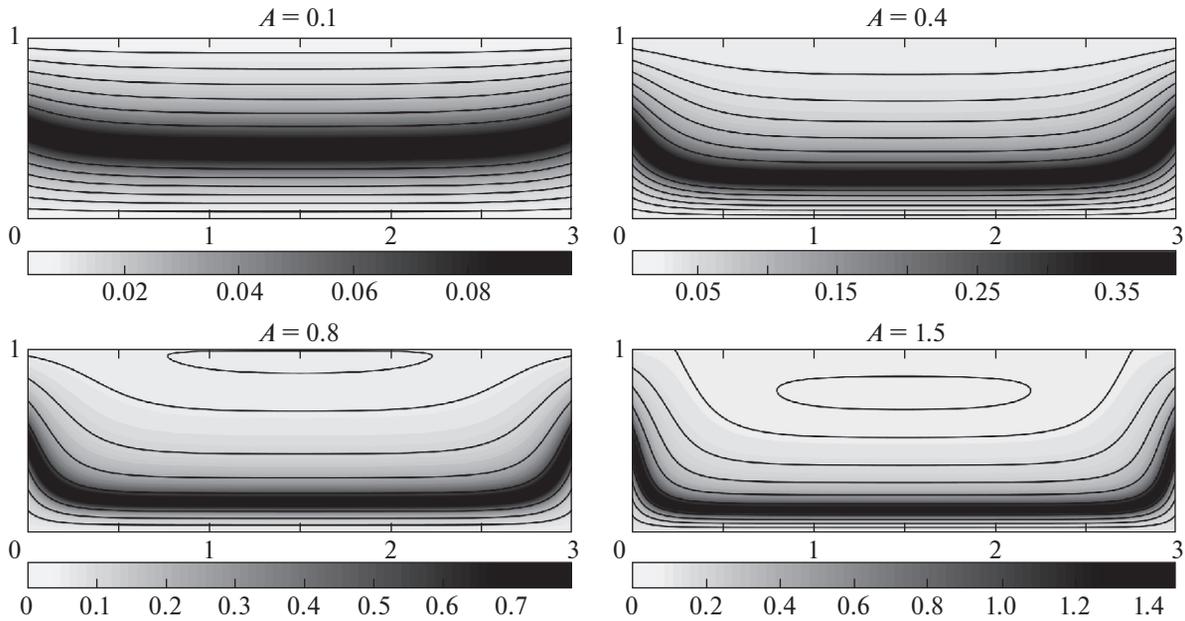
$$\delta_\omega = \int_D |\hat{\Psi}_y \hat{\omega}_x - \hat{\Psi}_x \hat{\omega}_y| dx dy$$

2. Строилась функциональная зависимость $\omega_c(\Psi_c)$, где ω_c, Ψ_c — численные решения нестационарной задачи (1.1)–(1.7), полученные методом вихрей в ячейках с начальным условием $\omega_0 = \hat{\omega}$. Вычислялось значение

$$\delta_f = \max_{D, t \in [0, T_s]} |\omega_c - \Omega_1(\Psi_c)| / A.$$

Отметим, что малость величины δ_f при начальном условии $\omega_0 = \hat{\omega}$ на больших временах T_s говорит о возможной устойчивости стационарного режима. Для неустойчивого решения δ_f может быть малой только на небольших временах T_s и должна расти с ростом T_s .

При расчетах для поиска стационарных режимов при $a = 3, b = 1$ и зависимости (2.17) использовалась сеточная аппроксимация (2.19) с числом узлов $n_x = 180, n_y = 60$. На фиг. 1 представлены режимы для четырех значений параметра A . Величины δ_ω для этих режимов находятся в интер-



Фиг. 1. Стационарные режимы для четырех значений параметра A . Изображены линии тока (линии) и распределение завихренности (оттенки серого).

вале от 3×10^{-6} (для $A = 0.1$) до 3×10^{-3} ($A = 1.5$). Характеристика δ_f для представленных режимов при $T_s = 5$ изменялась в интервале $10^{-3} < a_f < 10^{-2}$.

Результаты вычислений показывают, что при малых A стационарные режимы не имеют застойных зон, т.е. являются проточными (см. фиг. 1) для $A = 0.1, 0.4$. При $A \approx 0.69$ возникает застойная зона, которая увеличивается в размерах при росте A (см. фиг. 1). Для $A = 0.8, 1.4$ у найденных режимов во всей области выполняется зависимость F_1 (см. (2.17)) а распределения завихренности на входе и выходе канала совпадают. Проточная зона включает струю, в центре которой завихренность является максимальной, а течение наиболее интенсивное. При росте A струя приближается к границе $y = 0$ области D .

Можно предположить, что увеличение параметра A ведет не только к изменению и усложнению топологии стационарных режимов, но и к изменению характера их устойчивости. Анализ устойчивости стационарных режимов проведен в следующем разделе.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ

Для анализа устойчивости найденных стационарных решений $\hat{\psi}(x, y)$, $\hat{\omega}(x, y)$ численно исследовалась задача (1.10). Для дискретизации системы уравнений (1.10) с граничными условиями (1.11) применялся метод прямых. Метод состоял в приближении решения $\xi(x, y, t)$, $\zeta(x, y, t)$ значениями $\xi_{i,j}(t)$ и $\zeta_{i,j}(t)$ в узлах пространственной прямоугольной сетки размерности $m_x \times m_y$ и аппроксимации производных $\xi(x, y, t)$ и $\zeta(x, y, t)$ по x и y конечными разностями второго порядка точности. В результате задача анализа устойчивости стационарных режимов сводится к исследованию устойчивости нулевого равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка.

В каждый момент времени t значения $\xi_{i,j}$ в узлах сетки определяются из дискретного аналога второго уравнения системы (1.10) с граничными условиями (1.11):

$$\frac{\xi_{i-1,j} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i+1,j}}{\tau_x^2} + \frac{\xi_{i,j-1} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i,j+1}}{\tau_y^2} = -\zeta_{i,j}. \tag{3.21}$$

Здесь $\xi_{i,j}$, $\zeta_{i,j}$ — значения ξ и ζ в узле с номером i, j , а τ_x, τ_y — шаги сетки. Неизвестными являются $\zeta_{i,j}$ для $i = 2, \dots, m_x - 1, j = 2, \dots, m_y - 1$, а значения $\zeta_{i,j}$ в граничных узлах равны нулю в силу (1.11).

Для внутренних узлов области D , т.е. при $i = 2, \dots, m_x - 1, j = 2, \dots, m_y - 1$, дискретизированные уравнения динамики возмущения завихренности $\zeta_{i,j}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{i,j} = & \frac{\hat{\omega}_y}{2\tau_x} (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) + \frac{\Psi_x}{2\tau_y} (\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) - \frac{\hat{\omega}_x}{2\tau_y} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) - \frac{\hat{\Psi}_y}{2\tau_x} (\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) + \\ & + \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\tau_y} \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\tau_x} - \frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\tau_x} \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}}{2\tau_y}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для аппроксимации пространственных производных для возмущения завихренности $\zeta_{m_x,j}$ в граничных узлах, соответствующих выходу из канала, применялись разности против потока по переменной x , что обусловлено граничными условиями (1.11). Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{m_x,j} = & \frac{\hat{\omega}_y}{2\tau_x} (3\xi_{m_x,j} - 4\xi_{m_x-1,j} + \xi_{m_x-2,j}) + \frac{\Psi_x}{2\tau_y} (\zeta_{m_x,j+1} - \zeta_{m_x,j-1}) - \\ & - \frac{\hat{\omega}_x}{2\tau_y} (\xi_{m_x,j+1} - \xi_{m_x,j-1}) - \frac{\hat{\Psi}_y}{2\tau_x} (3\zeta_{m_x,j} - 4\zeta_{m_x-1,j} + \zeta_{m_x-2,j}) + \\ & + \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\tau_y} \frac{3\xi_{m_x,j} - 4\xi_{m_x-1,j} + \xi_{m_x-2,j}}{2\tau_x} - \frac{3\zeta_{m_x,j} - 4\zeta_{m_x-1,j} + \zeta_{m_x-2,j}}{2\tau_x} \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}}{2\tau_y}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

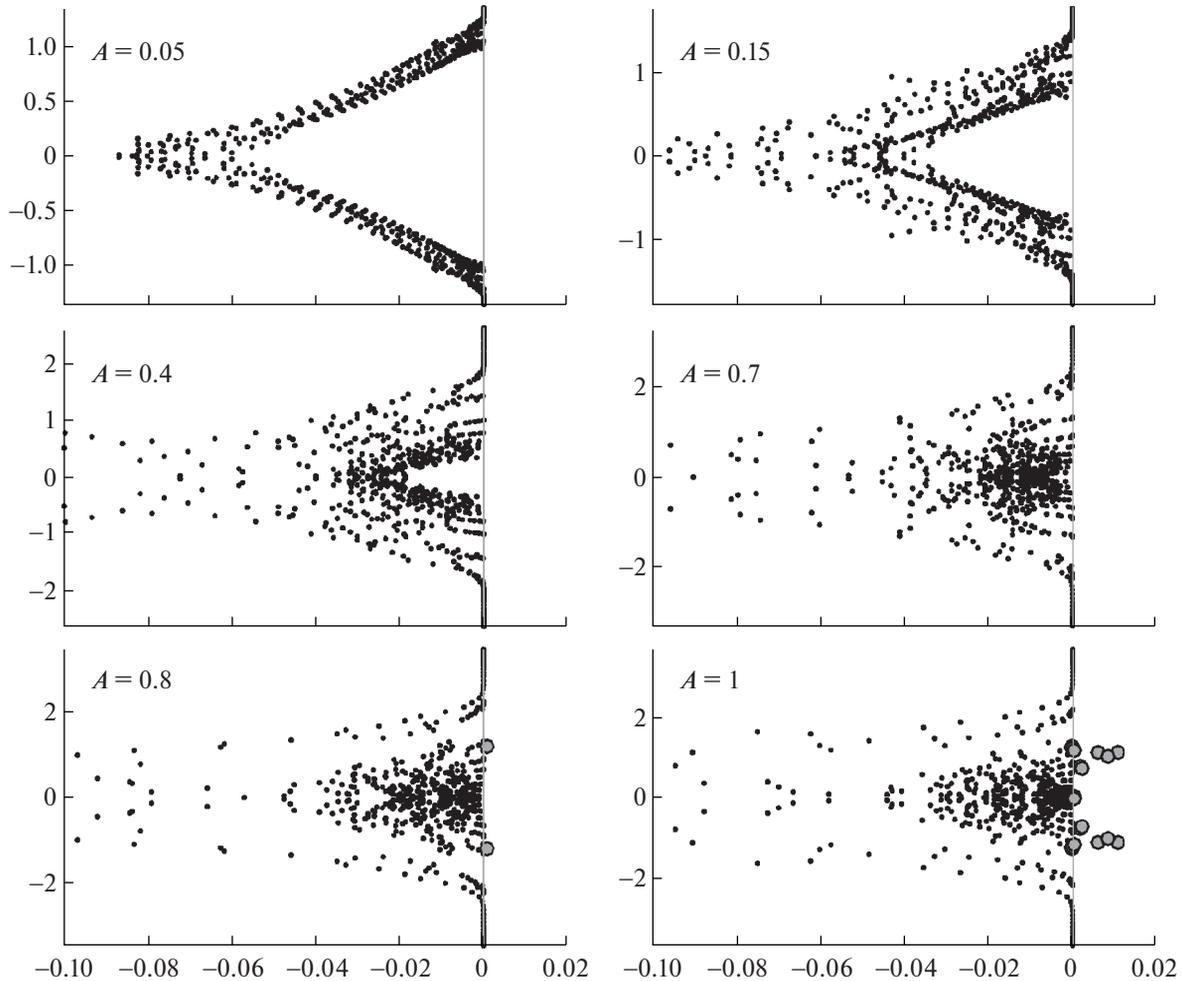
В остальных граничных узлах $\xi_{i,j}(t) = \zeta_{i,j}(t) = 0$ в силу (1.11). Правые части уравнений (3.22) и (3.23) в качестве коэффициентов при переменных содержат значения частных производных $\hat{\psi}(x, y)$, $\hat{\omega}(x, y)$ по x и y в узлах сетки, которые вычисляются аналитически с использованием выражений (2.20).

В результате описанной дискретизации устойчивость стационарных режимов $\hat{\psi}(x, y)$, $\hat{\omega}(x, y)$, представленных на фиг. 1, исследовалась с помощью изучения свойств системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.22), (3.23) при изменении параметра A . Стационарному режиму задачи (1.1)–(1.7) соответствует нулевое равновесие системы (3.22), (3.23).

В первую очередь изучалась устойчивость нулевого равновесия системы (3.22), (3.23) по линейному приближению. Для этого вычислялась матрица Якоби системы и находились ее собственные значения λ_i , $i = 1, \dots, (m_x - 1) \times (m_y - 2)$. Результаты вычислений представлены на фиг. 2. При описанных в этом разделе расчетах использовалась сетка с $m_x = 60, m_y = 20$ узлами. Для вычисления спектра матрицы Якоби применялся QR-алгоритм.

При малых значениях A спектр сконцентрирован в окрестности некоторой кривой на плоскости ($\text{Re}\lambda_i, \text{Im}\lambda_i$) и состоит из нейтральной части (чисто-мнимые собственные значения) и устойчивой (собственные значения с отрицательной действительной частью), см. фиг. 2, $A = 0.05$. При росте параметра A структура спектра усложняется, но вплоть до $A \approx 0.8$ он состоит из устойчивой и нейтральной частей, см. фиг. 2 для $A = 0.15, 0.4, 0.7$. Наличие нейтрального спектра не позволяет сделать выводы об устойчивости или неустойчивости стационарного режима. При $A \approx 0.8$ стационарный режим становится неустойчивым, так как пара комплексно-сопряженных собственных значений переходят из левой в правую полуплоскость. Вычисленный спектр устойчивости стационарного режима для $A = 0.8$ изображен на фиг. 2. Это означает, что для возмущений стационарных режимов при $A = 0.8$ возникает неустойчивая колебательная мода, которая может приводить к возникновению автоколебаний.

При дальнейшем увеличении A происходят аналогичные переходы, каждый из которых приводит к возникновению новых неустойчивых колебательных мод. В результате может сформироваться сложный нестационарный режим. Спектр устойчивости стационарного режима при $A \geq 0.8$ состоит уже из устойчивой, нейтральной и неустойчивой частей. Например, при $A = 1$, см. фиг. 2, неустойчивая часть найденного численно спектра состоит из восьми пар комплексно-сопряженных собственных значений с положительной действительной частью.

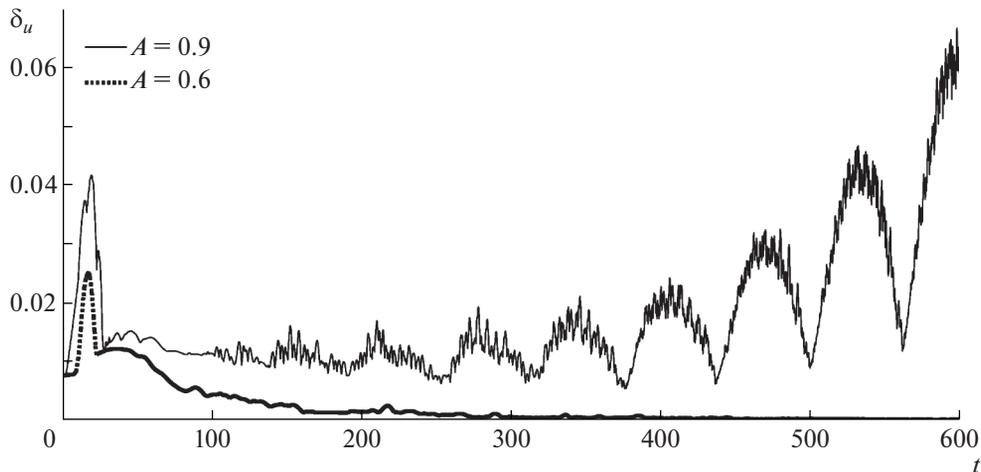


Фиг. 2. Собственные значения для шести значений параметра A . Значения из неустойчивого спектра обозначены кружками, а остальные точками.

Для уточнения вопроса об устойчивости режимов при наличии нейтрального спектра численно решалась задача Коши для системы уравнений (3.22)–(3.23) с различными ненулевыми начальными значениями. Стремление этих решений к нулю является аргументом в пользу асимптотической устойчивости режима, а их рост говорит о неустойчивости. Вычислительные эксперименты проводились с различными начальными данными. Для всех вариантов расчетов при одном значении A результаты качественно совпадали. Для оценки величины возмущения стационарного режима удобно использовать величину $\delta_u = \max_{i,j} |\zeta_{i,j}|$.

Результаты вычислений для двух значений A даны на фиг. 3, на которой изображена динамика величины δ_u . При $A = 0.6$ часть собственных значений линеаризованной системы (3.22), (3.23) лежит на мнимой оси, а остальные имеют отрицательную действительную часть. При этом величина δ_u стремится к нулю, что говорит о затухании возмущений стационарного режима. Такой результат получается как при решении задачи Коши для сеточной аппроксимации (3.22), (3.23), так и при использовании метода вихрей в ячейках. Аналогичные результаты получены для всех рассматриваемых $A < 0.8$. То есть при $A < 0.8$ можно предположить асимптотическую устойчивость стационарных режимов.

Для неустойчивых стационарных режимов решение задачи (3.22)–(3.23) демонстрирует рост возмущений при росте t . При решении нестационарной задачи (1.1)–(1.7) методом вихрей в ячейках с начальными данными $\omega_0 = \hat{\omega}(x, y)$ устанавливался нестационарный режим (см. следующий раздел). Эти расчеты подтверждают результаты численного анализа устойчивости по линейному приближению.



Фиг. 3. График зависимости нормы возмущения δ_u от времени t для двух значений параметра A .

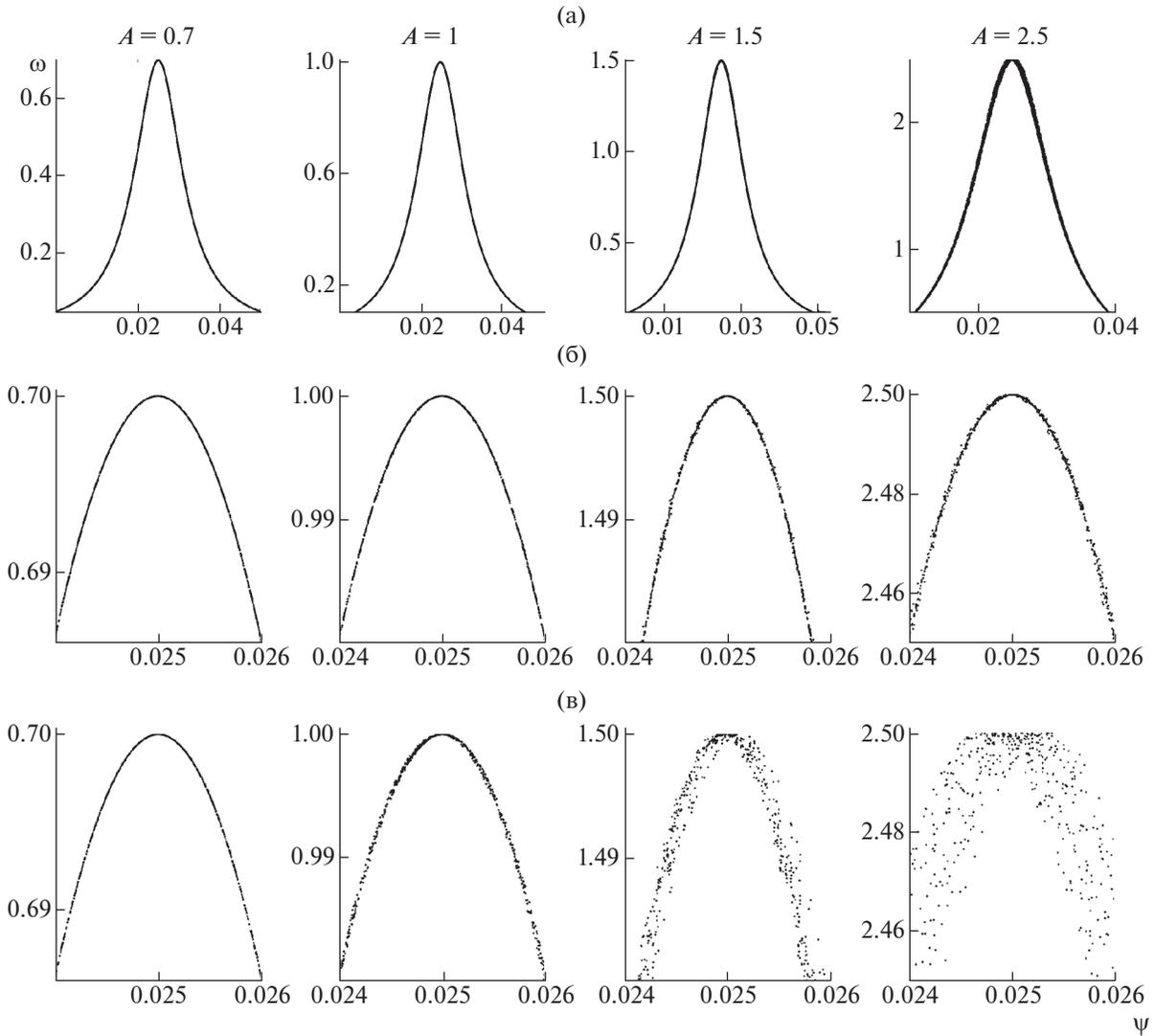
Отметим, что в рассматриваемой в этом разделе задаче устойчивости стационарных режимов возможен непрерывный спектр. Показать это или опровергнуть не представляется возможным, т.к. решения, устойчивость которых анализируется, получены численно. В силу дискретизации и использования численных методов поиска собственных значений матриц непрерывность спектра дифференциального оператора нарушается. Однако это не мешает получать качественно верные численные результаты об устойчивости или неустойчивости решений с непрерывным спектром (см. [17], [18]). Анализ спектра стационарных решений вида (20) с помощью дискретизации (3.22), (3.23) проводился для различных значений $10 < m_x, m_y < 60$ при всех A . При этом бифуркационное значение появления неустойчивого спектра слегка “сдвигалось” по параметру A при изменении количества узлов сетки, но сохранялось возникновение неустойчивых колебательных мод.

4. ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Переход при изменении параметра через мнимую ось пары комплексно-сопряженных собственных значений в спектре устойчивости равновесия конечномерной динамической системы сопровождается бифуркацией Андронова–Хопфа. При этом либо от равновесия ответвляется устойчивый предельный цикл (мягкая потеря устойчивости), либо неустойчивый предельный цикл в момент бифуркации схлопывается в равновесие (жесткая потеря устойчивости). При наличии дополнительного нейтрального спектра при бифуркационном значении параметра разнообразие сценариев возрастает, но во многих случаях в окрестности равновесия возможно возникновение нестационарных режимов [19], [20]. Сказанное справедливо и при проведении численного анализа уравнений в частных производных, так как в этом случае в результате дискретизации возникают конечномерные динамические системы большой размерности.

Таким образом, описанный в разд. 3 сценарий возникновения неустойчивости стационарных режимов, при котором пара комплексно-сопряженных собственных значений переходит в положительную полуплоскость, может сопровождаться бифуркацией ответвления нестационарного режима. В рассматриваемой задаче ситуация сильно усложняется существованием большого числа чисто мнимых собственных значений в спектре устойчивости при бифуркационном значении, см. фиг. 2. Это и большая размерность систем (1.12) или (3.22), (3.23) затрудняет теоретическую интерпретацию происходящих бифуркаций и требует численного описания.

Для поиска и анализа нестационарных режимов численно решалась задача (1.1)–(1.7) с начальными условиями, близкими к стационарным режимам $\omega_0 = \hat{\omega} + 0.001(g_{1,1} + g_{2,3})$ на достаточно большом интервале $t \in [0, 1000]$. Такой временной интервал соответствует 15-кратному прохождению жидкой частицей всего канала при $A = 0$. Для решения использовался метод вихрей в ячейках, который кратко описан в разд. 1, а подробно в [8], [15], [16]. В расчетах использовалось

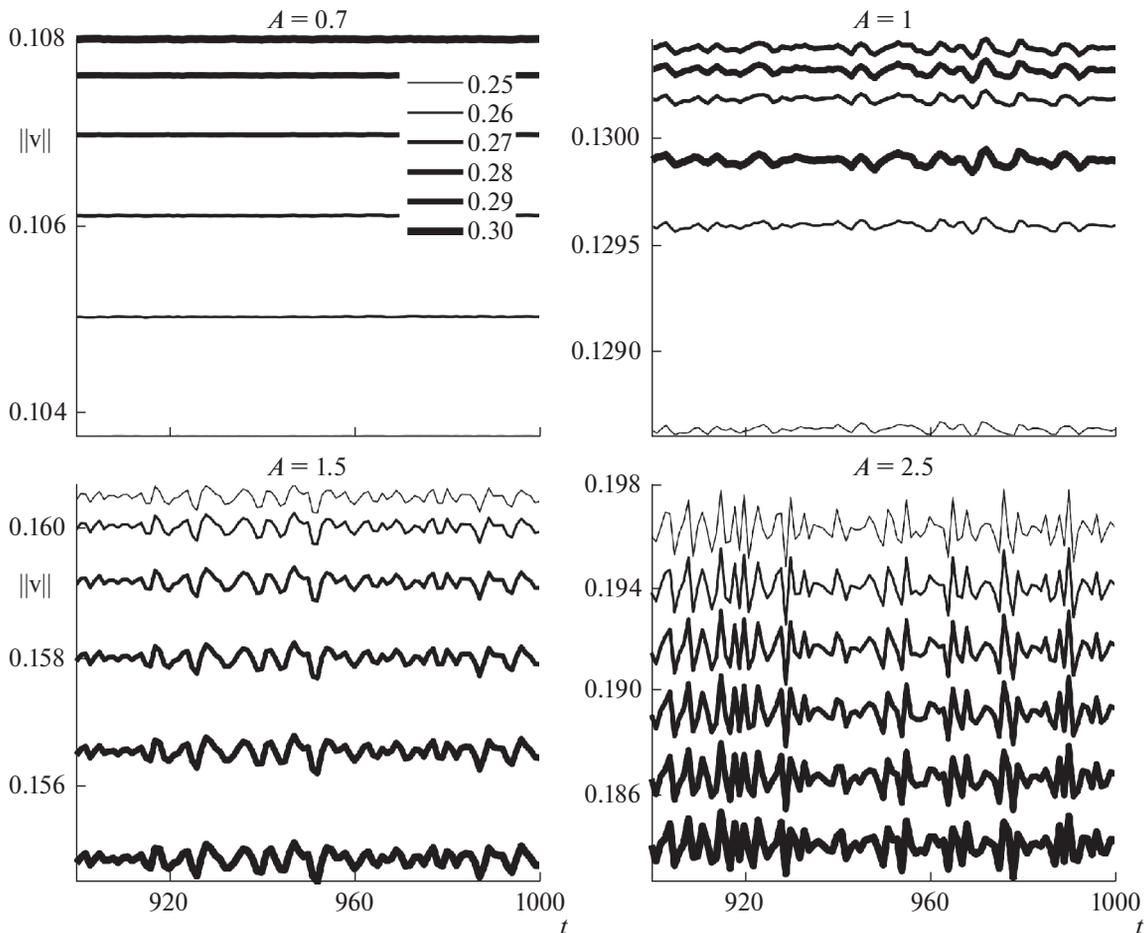


Фиг. 4. Графики зависимости $\omega(\psi)$ режимов для четырех значений A при $t = 1000$. Ряд (а) графиков соответствует всей области D . Ряд (б) – для подобласти D при $x < \frac{2}{3}a$, а (в) – для $x > \frac{2}{3}a$.

$N = 100\,000$ частиц, 60×60 членов отрезка ряда Фурье, шаг по времени $h = 1/200$ в методе Рунге–Кутты. Вычисления проводились для $0.05 \leq A \leq 5$.

В качестве критерия возникновения автоколебаний использовалось нарушение функциональной зависимости $\omega(\psi)$, нестационарность нормы $\|v\|$ скорости жидкости в точках вблизи выхода из канала D с координатами $x = 295/300a$, $y \in [0.25b, 0.3b]$ и интеграла завихренности $\Omega = \int_D \omega(x, y) dx dy$. Результаты представлены на фиг. 4 и фиг. 5. На фиг. 4 для каждого значения A приведены три фрагмента. Ряд (а) изображает $\omega(\psi)$ во всей области D , ряд (б) в увеличенном масштабе для окрестности значения $\omega = A$ вблизи входа в канал ($x < 1/3$), а (в) – для $x > 2a/3$, т.е. вблизи выхода из D .

При значениях $A < 0.8$ начальные возмущения затухают со временем и при $t = 1000$ устанавливается стационарный режим. На фиг. 4 изображена численно построенная функция $\psi(\omega)$ для $A = 0.7$ и $t = 1000$. Четко прослеживается строгая функциональная зависимость $\psi(\omega)$, что говорит о стационарности установившегося режима. Это подтверждают и построенные графики зависимости $\|v\|$ от $t \in [900, 1000]$ для шести точек, изображенные на фиг. 5, которые иллюстрируют

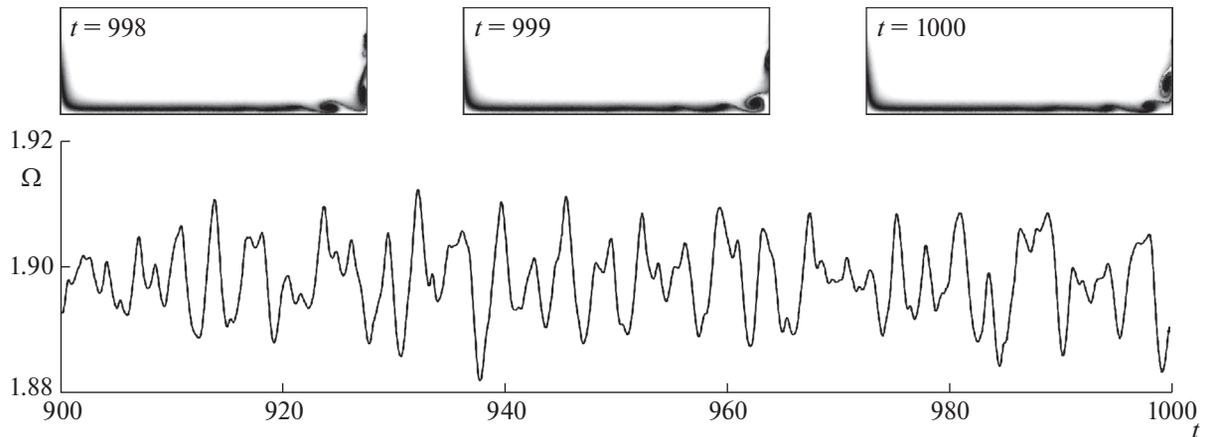


Фиг. 5. График зависимости $\|v(x, y, t)\|$ от t для шести точек с координатами $x = 295/300a$ и $y \in [0.25b, 0.3b]$ и четырех значений A .

постоянство во времени $\|v\|$. Данные вычисления подтверждают результаты анализа устойчивости стационарных режимов разд. 2 для $A < 0.8$, где предполагалась их асимптотическая устойчивость.

Увеличение A до 0.8 приводит к неустойчивости стационарного режима по линейному приближению. При $A = 0.8$ значение инкремента положительной действительной части собственных значений мало (см. фиг. 3), что обуславливает медленную и плохо обнаруживаемую в численном эксперименте нестационарную динамику. При росте A нестационарные процессы нарастают вместе с увеличением количества положительных собственных значений в спектре устойчивости стационарного режима и их инкремента. Эти явления иллюстрируют результаты расчетов, представленные на фиг. 4 и фиг. 5 для $A = 1, 1.5, 2.5$. При $A = 1$ функциональная зависимость $\omega(\psi)$ незначительно нарушается вблизи выхода из канала D , см. нижний рисунок для $A = 1$, но сохраняется вблизи входа в канал (средний рисунок). При увеличении A нарушение возрастет у выхода из канала и распространяется к зоне входа в канал, см. фиг. 4 для $A = 1.5$. Для $A = 2.5$ эти процессы проявляются еще сильнее. Во всех описанных случаях разрушение $\omega(\psi)$ наиболее сильно в окрестности максимального значения $\omega = A$ завихренности, что соответствует центру “струи” в проточной области течения.

Построенные численно графики зависимости нормы вектора скорости $\|v\|$ в шести точках вблизи выхода из D , см. фиг. 5, также иллюстрируют возникновение и развитие нестационарных режимов. Видно, что с ростом A увеличивается амплитуда колебаний и усложняется характер динамики. Сложность динамики $\|v\|$, которая является квазипериодической или хаотической, объ-



Фиг. 6. Нестационарный режим при $A = 5$. В верхнем ряду распределение завихренности в три момента времени $t = 998, 999, 1000$. Внизу график зависимости Ω от t .

ясняется тем, что для значений параметров, при которых проводились расчеты в спектре устойчивости стационарного режима, существует несколько пар комплексно-сопряженных собственных значений, см. фиг. 2. Комбинацией соответствующих им неустойчивых колебательных мод может объясняться неперIODичность динамики.

При достаточно больших значениях A автоколебания хорошо демонстрируют не только величина $\|v\|(t)$, но и поле завихренности, линии тока и значение интеграла завихренности $\Omega(t)$. На фиг. 6 для $A = 5$ в верхнем ряду изображено изменение поля ω во времени, а на нижнем графике сложная динамика $\Omega(t)$. Видно, что вблизи входа в канал распределение ω близко к стационарному и нарастает к выходу из D . Для $\Omega(t)$ проводился фурье-анализ сигнала с применением алгоритма БПФ, который демонстрирует непрерывный спектр, что говорит о хаотичности нестационарного режима при $A = 5$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описаны расчеты для протекания жидкости сквозь плоский канал D со сторонами $a = 3$, $b = 1$, но качественно аналогичные результаты получаются и для более длинных и коротких каналов. Во всех случаях наблюдалось не типичное для идеальной жидкости явление — возникновение автоколебаний при росте бифуркационного параметра с одинаковым сценарием. В качестве бифуркационного параметра в вычислительных экспериментах использовалась интенсивность завихренности жидкости на входе в канал, но аналогичные результаты могут быть получены и для других параметров, например, длины канала D .

На основе проведенного в работе численного анализа можно сделать следующие выводы и гипотезы о сценарии возникновения автоколебаний в рассматриваемой задаче.

Автоколебания возникают в результате мягкой потери устойчивости стационарным режимом при росте интенсивности завихренности на входе в канал (параметр A).

В докритической области A (до потери устойчивости) можно предположить асимптотическую устойчивость стационарных режимов.

Неустойчивость возникает в результате перехода пары комплексно-сопряженных собственных значений из отрицательной в положительную полуплоскость. При этом в докритической и сверхкритической областях значений параметра A в спектре устойчивости существуют дополнительные собственные значения на мнимой оси.

Потеря устойчивости стационарного режима, возможно, связана с возникновением застойной зоны в течении.

Характер автоколебаний усложняется при росте надкритичности, что, видимо, связано с возникновением дополнительных неустойчивых мод у стационарного режима.

При росте надкритичности амплитуда автоколебаний растет медленно, что объясняется малостью инкремента неустойчивых собственных значений. Возмущения стационарного режима малы у входа в канал и возрастают к его выходу.

При больших надкритичностях реализуется развитый нестационарный режим с хаотической динамикой.

Отметим, что данные выводы не являются строгими, так как основаны на вычислениях, но результаты получены с использованием принципиально различных методов и подходов и полностью согласуются друг с другом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кочин М.Е.* Об одной теореме существования гидродинамики // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 20. № 10. С. 5–20.
2. *Юдович В.И.* О задаче протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. № 3. С. 561–564.
3. *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64. № 4. С. 562–588.
4. *Алексеев Г.* О стабилизации решений двумерных уравнений динамики идеальной жидкости // Прикл. механ. и техн. физ. 1977. № 2. С. 85–92.
5. *Моргулис А.Б., Юдович В.И.* Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. матем. ж. 2002. Т. 43. № 4. С. 840–857.
6. *Трошкин О.* О теории устойчивости в плоском канале // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1331–1346.
7. *Говорухин В.Н., Моргулис А.Б., Юдович В.И.* Расчет двумерных режимов протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал // Докл. АН. 2007. Т. 412. № 4. С. 480–484.
8. *Govorukhin V.N., Pin K.I.* Numerical study of an inviscid incompressible flow through a channel of finite length // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2009. V. 60. № 12. P. 1315–1333.
9. *Govorukhin V.N., Morgulis A.B., Vladimirov V.A.* Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // J. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 420–472.
10. *Говорухин В.Н.* Стационарные вихревые структуры при протекании идеальной жидкости через канал // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2012. № 2. С. 11–22.
11. *Белоцерковский О.М., Белоцерковская М.С., Денисенко В.В. и др.* Об установлении спутного вихря в потоке идеальной среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 164–169.
12. *Govorukhin V., Zhdanov I.* Steady-state flows of inviscid incompressible fluid and related particle dynamics in rectangular channels // European Journal of Mechanics, B: Fluids. 2018. V. 67. P. 280–290.
13. *Кажихов А.В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. матем. и механ. 1980. Т. 44. № 5. С. 947–949.
14. *Moshkin N., Mounnamprang P.* Numerical simulation of vortical ideal fluid flow through curved channel // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 41. № 11. P. 1173–1189.
15. *Говорухин В.Н.* Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1133–1147.
16. *Говорухин В.Н.* Параллельная реализация бессеточного метода расчета течений идеальной несжимаемой жидкости // Вычисл. методы и программирование. 2017. Т. 18. № 2. С. 175–186.
17. *Guba O., Lorenz J.* Continuous spectra and numerical eigenvalues // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 54. № 11–12. P. 2616–2622.
18. *Gerecht D., Rannacher R., Wöllner W.* Computational aspects of pseudospectra in hydrodynamic stability analysis // J. Mathematical Fluid Mechanics. 2012. V. 14. № 4. P. 661–692.
19. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Динамические системы – 5. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5 из Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. С. 5–218.
20. *Kuznetsov Y.A.* Elements of applied bifurcation theory. 3rd ed. N.Y.: Springer, 2004.