

УДК 519.635

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ¹⁾

© 2019 г. А. О. Казакова^{1,*}, А. Г. Петров^{2,**}

¹⁾ 428015 Чебоксары, Московский пр-т, 15, Чувашский гос. ун-т, Россия;

²⁾ 117526 Москва, пр-т Вернадского, 101, ИПМех РАН, Россия)

*e-mail: kazakova_anastasia@bk.ru

**e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 11.04.2017 г.
Переработанный вариант 30.01.2019 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Построен алгоритм численного исследования плоской задачи течения вязкой жидкости в приближении Стокса, заключенной между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного поперечного сечения. Математическая модель задачи описывается бигармоническим уравнением, которое с помощью представления Гурса сводится к системе уравнений относительно двух гармонических функций. Система решается численно с применением метода граничных элементов без насыщения, в результате чего определяются искомая бигармоническая функция тока и поле скоростей жидкости. На тестовых примерах проведено сравнение с известными точными решениями для цилиндров кругового сечения. Библ. 36. Фиг. 12. Табл. 5.

Ключевые слова: течение вязкой жидкости, приближение Стокса, функция тока, бигармоническое уравнение, метод граничных элементов.

DOI: 10.1134/S0044466919060097

ВВЕДЕНИЕ

Задача о течении вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами при малом числе Рейнольдса приводится к линейной системе уравнений в частных производных относительно компонент скорости и давления. Эта система уравнений называется системой уравнений Стокса и отличается от уравнений Навье–Стокса отсутствием в ней нелинейных членов. В плоском случае из системы уравнений Стокса для функции тока получается краевая задача для бигармонического уравнения с условиями на границе для функции тока и ее нормальной производной.

В настоящее время в литературе аналитически изучено движение жидкости между двумя круговыми цилиндрами, которые движутся произвольным образом. Можно выделить следующие частные случаи.

1. Первое простейшее решение для течения жидкости между двумя соосно вращающимися цилиндрами известно как течение Куэтта (M. Couette, 1890), (см. [1, с. 85]). Ранее оно было изучено Н.П. Петровым в 1883 г. с приложением к теории трения в подшипниках (см. [2, с. 534–535]).

2. Для течения жидкости между двумя эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами, вращающимися около своих неподвижных осей, решение получено Н.Е. Жуковским в 1887 г. Он привел эту задачу к краевой задаче для бигармонического уравнения и нашел его точное решение методом конформных отображений. Позднее в 1906 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин построили решение для этого случая в биполярных координатах [3]–[5].

3. А. Зоммерфельд в 1904 г. [6] дал упрощенное решение задачи течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя между двумя цилиндрами, которое широко используется в гидродинамической теории смазки. В 1906 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин провели сопоставление

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-19-00373).

приближенного решения Зоммерфельда со своим точным решением, записанным в биполярных координатах [3]–[5].

4. Б. Баллал и Р. Ривлин [7] получили обобщение решения Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, учитывающее вращение не только внутреннего цилиндра, но и внешнего. В [8], [9] изложен метод конформного отображения, позволяющий построить поле скоростей между цилиндрами, когда их центры движутся относительно друг друга. Таким образом, в [7]–[9] представлено исчерпывающее аналитическое исследование течения жидкости между двумя круговыми цилиндрами при их произвольном движении.

В [10] описан алгоритм решения задачи о движении цилиндра произвольного контура внутри неподвижного цилиндра с использованием конформного отображения и приближенного метода коллокации. Во всех указанных работах, как и в данной статье, предполагается малость числа Рейнольдса по сравнению с единицей, и уравнения движения жидкости решаются в линейном приближении Стокса [11]. Искомой является одна бигармоническая функция тока, через которую выражаются скорости.

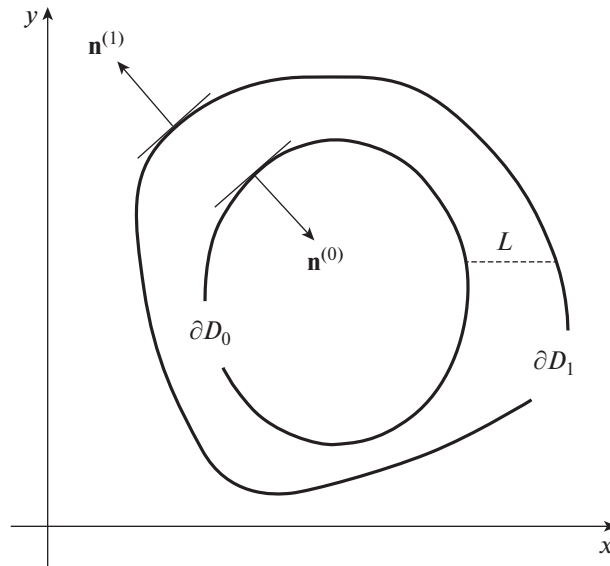
Численные методы решения бигармонических уравнений разработаны в меньшей степени, чем для гармонических уравнений. Большинство работ на эту тему посвящено применению конечно-разностных схем (см., например, [12]–[14] и приведенную в них библиографию): численное решение строится внутри области, и частные производные определяются численно по разностным алгоритмам. Этот метод неизбежно ведет к накоплению ошибок, особенно при вычислении производных высших порядков. Более точные результаты можно получить методами граничных элементов, поскольку дифференциальное уравнение сводится к интегральным уравнениям на границе области. Такой подход широко используется для решения гармонических уравнений при расчете плоских и осесимметричных задач гидродинамики (см., например, [15], [16]). Достаточно полный исторический обзор по методам граничных элементов дан А.М. Линьковым в [17, с. 262–279]. Численное решение бигармонических уравнений на плоскости применительно к задачам механики сплошных сред дано в [18], [19]. В статье [20] метод линейных граничных элементов применяется для решения краевых задач для полигармонического уравнения, при этом используются интегральные представления непосредственно для искомой функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению высокого порядка.

В настоящей статье предложен алгоритм численного исследования плоской задачи течения вязкой жидкости, заключенной между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения. Бигармоническая функция тока представляется с помощью двух гармонических функций, для вычисления которых применяется схема метода граничных элементов. В этой схеме наиболее часто контуры интегрирования, содержащие неинтегрируемые сингулярности, разбивают на конечное число достаточно малых прямолинейных отрезков, на которых искомые функции аппроксимируются константой [15]–[21]. Такой алгоритм имеет второй порядок точности.

В предлагаемой схеме уравнение представлено в таком виде, что подынтегральные функции либо аналитические, либо содержат логарифмическую особенность. Насколько нам известно, такое представление для численного решения гармонического уравнения впервые было использовано в [22]. Новизна предлагаемой работы состоит в следующем: 1) бигармоническое уравнение методом граничных интегральных уравнений решается для двухсвязной области; 2) искомая бигармоническая функция ищется в виде представления Гурса; 3) интегрирование проводится непосредственно по дуге контура с использованием высокоточных квадратурных формул [23]. В работе [24] доказывается, что применяемые квадратурные формулы для интегральных операторов, определенных на замкнутых контурах, являются, по терминологии К.И. Бабенко [25], формулами без насыщения.

Замечание. В работе зарубежных авторов [26] для решения бигармонического уравнения в односвязной области также используются граничные интегральные уравнения. Для аппроксимации ядер интегрального уравнения авторы используют быстрое преобразование Фурье. Однако из приведенной в статье [26] таблицы погрешности можно видеть, что схема насыщаема и погрешность является степенной функцией числа узлов n . Подробное сравнение уменьшения погрешности с ростом числа узлов граничной сетки в [26] и в настоящем исследовании проведено в заключении.

В недавней работе [27] предложен способ вывода численных схем без насыщения для линейных интегральных операторов, действующих на периодические функции. Погрешность в таких схемах убывает быстрее любой степени шага сетки. Эти формулы применяются для ряда внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа [28]–[30]. Использование представле-



Фиг. 1. Контуры области и разрез.

ния Гурса позволяет распространить развитые численные схемы без насыщения и на решение бигармонического уравнения.

До настоящего времени схемы без насыщения для решения краевых задач для бигармонического уравнения практически не применялись. Известна одна работа [31], в которой предложена схема без насыщения для решения такой задачи для круга или области, на которую круг конформно отображается аналитической функцией. В круге решение строится с помощью рядов Фурье.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

1.1. Гидродинамическая постановка задачи

Рассматривается задача об исследовании движения ограниченной жидкости, когда инерционными силами можно пренебречь (приближение Стокса [11], [32]). Пусть жидкость заключена между двумя цилиндрическими телами с сечением произвольной формы. Тогда задача сводится к краевой задаче для бигармонического уравнения в плоской двусвязной области D , граница которой ∂D состоит из внутреннего контура ∂D_0 и внешнего ∂D_1 (см. фиг. 1).

Точки границы контура движутся со скоростью $\mathbf{V}(V_x, V_y)$, компоненты которой могут быть выбраны произвольно. Если контуры движутся как твердые тела, то компоненты скорости граничных точек складываются из компонент поступательной (V_x^k, V_y^k) и вращательной угловой скорости ω_k :

$$V_x = V_x^k - \omega_k \rho_y^k, \quad V_y = V_y^k + \omega_k \rho_x^k, \quad k = 0, 1, \quad (1)$$

где ρ_x^k, ρ_y^k – координаты радиус-вектора точки границы с началом в точке, через которую проходит ось вращения.

Уравнения движения несжимаемой жидкости в приближении Стокса [6], [20] имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta v_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v_y, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

где p – гидродинамическое давление, μ – коэффициент вязкости среды.

Для плоской задачи Лагранж ввел функцию тока $\Psi(x, y)$ (см. [24]) и выразил через нее компоненты скорости жидкости, пользуясь условием несжимаемости:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Тогда уравнения движения жидкости (уравнения Стокса) примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Если теперь продифференцировать первое уравнение (3) по y , а второе – по x и записать разность полученных выражений, то видно, что функция тока удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2 \Psi = 0$. Это наблюдение использовалось при построении точных решений самим Стоксом [11], Н.Е. Жуковским и С.А. Чаплыгиным [3]–[5] и в дальнейшем устойчиво вошло в практику и широко применяется в классической литературе по гидродинамике вязкой жидкости [32]–[34].

Граничные условия для определения функции тока получаются из условия прилипания, в соответствии с которым на контурах ∂D_0 и ∂D_1 скорость жидкости совпадает со скоростью точки контуров:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{\partial D} = V_x, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{\partial D} = -V_y. \quad (4)$$

1.2. Граничные условия для функции тока

Общая краевая задача имеет вид

$$\Delta^2 \Psi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|_{\partial D} = V_n, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial D} = -V_s. \quad (5)$$

Для компонент нормали имеем соотношения $n_x = \frac{\partial y}{\partial s}$, $n_y = -\frac{\partial x}{\partial s}$, где $x(s)$, $y(s)$ – параметрические уравнения границ ∂D_k , $k = 0, 1$, s – дуговая координата и меняется от 0 до l_0 на внутреннем контуре и от l_0 до $l_0 + l_1$ на внешнем, l_0, l_1 – длины контуров; обход контура выбирается так, чтобы область D оставалась слева (фиг. 1). С помощью этих соотношений проекции скорости на нормаль V_n и касательную V_s можно выразить через декартовы компоненты скорости

$$V_n = V_x \frac{\partial y}{\partial s} - V_y \frac{\partial x}{\partial s}, \quad V_s = V_x \frac{\partial x}{\partial s} + V_y \frac{\partial y}{\partial s}.$$

От рассматриваемой гидродинамической задачи можно перейти к задаче об определении функции тока Ψ по известным граничным значениям самой функции и ее нормальной производной. Действительно, функция $V_n(s)$ задана на границе. Поэтому первое граничное условие (5) можно проинтегрировать и тогда краевая задача (5) примет вид

$$\Delta^2 \Psi = 0, \quad \Psi|_{\partial D_k} = g^{(k)}(s) = \int V_n(s') ds', \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial D_k} = -V_s = g_n^k(s). \quad (6)$$

В таком виде обычно формулируется общая краевая задача для бигармонического уравнения и для нее доказана теорема единственности решения (см. [28, с. 399–400]). Заметим, что функция $g^{(k)}(s)$ определена с точностью до произвольной постоянной. Поэтому при заданных функциях $g^{(k)}(s)$ и $g_n^k(s)$ решение задачи (6) единственно, а при заданных V_n и V_s функция Ψ из решения задачи (5) определяется с точностью до произвольной постоянной. Аналогично и при заданных V_x и V_y функция Ψ из решения задачи (4) также определяется с точностью до произвольной постоянной.

Особый интерес представляет частный случай движения твердых поверхностей. Найдем краевые условия (5) на поверхностях ∂D_k , $k = 0, 1$, движущихся, как твердые тела. Подставляя в (6) выражения (1), найдем функции $g^{(k)}(s)$ и $g_n^k(s)$, входящие в граничные условия (5):

$$\begin{aligned} V_s &= (V_y^0 + \omega \rho_x) \frac{dy_k}{ds} + (V_x^0 - \omega \rho_y) \frac{dx}{ds}, \\ V_n &= (-V_y^0 - \omega \rho_x) \frac{dx}{ds} + (V_x^0 - \omega \rho_y) \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left[-V_y^0 \rho_x + V_x^0 \rho_y - \frac{\omega}{2} (\rho_x^2 + \rho_y^2) \right], \\ g_k(s) &= \int V_n(s') ds' = -V_y^0 \rho_x + V_x^0 \rho_y - \frac{\omega}{2} (\rho_x^2 + \rho_y^2) + C_k. \end{aligned} \quad (7)$$

1.3. Представление Гурса и определение констант

Справедливо следующее утверждение (теорема Гурса): бигармоническая в плоской области D функция Ψ может быть представлена через две независимые гармонические в этой области функции ϕ и ψ :

$$\Psi = \phi(x, y) + x \cdot \psi(x, y), \quad \Delta \phi = 0, \quad \Delta \psi = 0 \text{ — внутри области } D. \quad (8)$$

Бигармоничность такого представления функции Ψ очевидна. Достаточные условия существования функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ для односвязных областей сформулированы, например, в [28, с. 400–401]. Ниже будет дан алгоритм проверки существования этих функций для рассматриваемых областей D конкретного вида.

Запишем граничные условия (5), (7) для функции вида (8):

$$\phi|_{\partial D_k} + x_k(s) \psi|_{\partial D_k} = g^{(k)}(s), \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial D_k} + x_k(s) \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial D_k} + \psi|_{\partial D_k} \frac{dy_k}{ds} = g_n^{(k)}(s), \quad k = 0, 1. \quad (9)$$

Условия (9) — граничные условия для гармонических функций ϕ и ψ .

Из формулы Гаусса—Остроградского (см., например, [36]) следует, что гармонические в плоской области D функции ϕ и ψ удовлетворяют условиям:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0, \quad \int_{\partial D} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 0, \quad (10)$$

где направление обхода контуров выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Уравнения (10) могут быть использованы как условия для вычисления неопределенных постоянных C_0, C_1 , входящих в граничные условия (7).

2. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ

Ниже предлагается модификация метода граничных элементов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в двухсвязных областях. Она строится на базе подробно описанных в [27]–[30] схем без насыщения, в которых решаются внешние и внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа практически для любых границ плоской области и не требует построения сетки внутри нее. Предлагаемая схема по терминологии К.И. Бабенко [25], также как и схемы [27]–[30], не имеет насыщения и ее погрешность уменьшается экспоненциально по числу элементов сетки на граничных контурах.

2.1. Основное интегральное тождество для гармонической функции

Для некоторой функции $\phi(s)$, гармонической в односвязной области D , ограниченной замкнутым гладким контуром ∂D , справедливо тождество:

$$A\phi_n(s) + B\phi(s) = 0, \quad (s \in \partial D), \quad (11)$$

где A и B – линейные операторы:

$$A\varphi_n(s) = -\int_{\partial D} G(s, s')\varphi_n(s')ds', \quad B\varphi(s) = \int_{\partial D} G_n(s, s')(\varphi(s') - \varphi(s)) ds',$$

$$G(s, s') = \ln(r(s, s')), \quad r(s, s') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Интегральное тождество для гармонической функции в таком виде, насколько нам известно, впервые было использовано в [22]. Его отличительной особенностью является то, что подынтегральные функции оператора B не содержат особенностей.

Тождество (11) распространяется и на двухсвязную область D , ограниченную контурами ∂D_0 и ∂D_1 , изображенную на фиг. 1, если $\varphi(s)$ гармоническая и однозначная в области D функция. Для вывода этого факта можно сделать разрез L , приведенный на фиг. 1 штриховой линией. Тогда область, ограниченная контуром ∂D_0 , правым берегом разреза L , контуром ∂D_1 и противоположным берегом разреза L , становится односвязной. Сумма интегралов $G(s, s')\varphi_n(s')$ и $G_n(s, s')(\varphi(s') - \varphi(s))$ по берегам разреза L равна нулю в силу противоположности нормалей по берегам и однозначности подынтегральных функций.

2.2. Система интегральных уравнений для гармонических функций из представления Гурса

Таким образом, каждая из двух гармонических функций φ и ψ , входящих в (8), удовлетворяет на гладкой границе $\partial D = \partial D_0 \cup \partial D_1$ двухсвязной области D интегральному тождеству

$$A\varphi_n(s) + B\varphi(s) = 0, \quad A\psi_n(s) + B\psi(s) = 0, \quad (12)$$

где s меняется от 0 до l_k , A и B – линейные операторы:

$$A\varphi_n(s) = -\int_{\partial D} G(s, s')\varphi_n(s')ds', \quad B\varphi(s) = \int_{\partial D} G_n(s, s')(\varphi(s') - \varphi(s))ds'. \quad (13)$$

Тогда уравнения (9), (10) и (12) можно рассматривать как систему двух алгебраических и четырех интегральных уравнений для четырех граничных функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$ и двух констант C_1 , C_2 , входящих в (7). Алгоритм вычисления этих функций состоит из следующих процедур.

1. Составляется сетка на граничных контурах, состоящая из N узловых точек.

2. Для каждой из четырех функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$ в узлах сетки определяются N значений $\varphi(s_i)$, $\psi(s_i)$, $\varphi_n(s_i)$, $\psi_n(s_i)$, $i = 1, \dots, N$.

3. Аппроксимируя интегральные уравнения (12), получим две линейные системы $2N$ уравнений, а аппроксимация интегральных условий (10) даст еще 2 уравнения. Равенство соотношений (9) в узлах сетки даст еще $2N$ уравнений. Итого мы получим $4N + 2$ уравнений относительно $4N$ неизвестных значений $\varphi(s_i)$, $\psi(s_i)$, $\varphi_n(s_i)$, $\psi_n(s_i)$, $i = 1, \dots, N$, и двух констант C_1 , C_2 . От точности аппроксимаций зависит точность решения задачи. Ниже будут применяться квадратурные формулы без насыщения, которые обеспечат ненасыщаемость схемы вычисления искомых функций с экспоненциальным уменьшением погрешности.

2.3. Квадратурные формулы и дискретизация системы уравнений

Ранее границы области ∂D_k были заданы параметрически уравнениями $x = x_k(s)$, $y = y_k(s)$ ($k = 0, 1$), имеющими естественный период l_k , где l_k – длина дуги контура ∂D_k . Далее удобно ввести новый параметр ζ и задавать контуры области параметрическими уравнениями:

$$\partial D_0 : \begin{cases} x = x_0(\zeta), \\ y = y_0(\zeta), \end{cases} \quad \partial D_1 : \begin{cases} x = x_1(\zeta), \\ y = y_1(\zeta), \end{cases}$$

где $x_k(\zeta)$, $y_k(\zeta)$ ($k = 0, 1$) – функции параметра ζ с единичным периодом.

Вводится дискретизация контуров конечным числом точек $M_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, N_0}$), $M_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, N_1}$) так, что точке $M_i^{(k)}$ соответствует значение $\zeta_i^{(k)} = \frac{i}{N_k}$. Параметр ζ и координата s на каждом контуре

связаны соотношением $ds = l_k f_k(\zeta) d\zeta$ ($k = 0, 1$), $f_k(\zeta)$ – плотность точек на контуре ∂D_k . В частности, если $f_k(\zeta) \equiv 1$, то точки на соответствующем контуре распределены равномерно.

Значения функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $x(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$, $x_n(s) = \partial x / \partial n = \partial y / \partial s$ в точках $M_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, N_0}$), $M_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, N_1}$) обозначим через Φ_q , Ψ_q , X_q , Φ_q^n , Ψ_q^n , X_q^n , $q = \overline{1, N_0 + N_1}$. Первые N_0 индексов относятся к точкам $M_i^{(0)}$ на контуре ∂D_0 , а вторые N_1 индексов – к точкам $M_i^{(1)}$ на контуре ∂D_1 .

Запишем алгебраическую систему уравнений (9) после дискретизации

$$\Phi_q + X_q \Psi_q = g_q, \quad \Phi_q^n + X_q \Psi_q^n + X_q^n \Psi_q = g_q^n, \quad q = \overline{1, N_0 + N_1}. \tag{14}$$

Для аппроксимации интегралов используем квадратурные формулы

$$\int_0^l f(x) dx = h \sum_{j=1}^N f(x_j), \quad h = l/N, \tag{15}$$

$$\int_0^l f(x) \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{l} (x - x_i) \right) \right| dx = h \sum_{j=1}^N \alpha(|i - j|) f(x_j), \tag{16}$$

$$\alpha(m) = - \left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi km}{N} \right).$$

В статьях [24], [27] доказано, что эти формулы для аналитических функций $f(x)$ периода l являются квадратурными формулами без насыщения и имеют порядок погрешности выше любой степени по шагу сетки h . Формула (15) применяется для оператора B и интегралов (10), подынтегральные функции которых не содержат особенностей. Формула (16) применяется для оператора A , который содержит логарифмическую особенность.

Система интегральных уравнений (10) с помощью квадратурной формулы без насыщения (15) запишется в виде

$$\sum_{q=1}^{N_0+N_1} F_q \Phi_q^n = 0, \quad \sum_{q=1}^{N_0+N_1} F_q \Psi_q^n = 0, \tag{17}$$

где

$$F_q = \left\{ \frac{l_0}{N_0} f_0(\zeta_q^{(0)}), q = \overline{1, N_0}; \frac{l_1}{N_1} f_1(\zeta_{q-N_0}^{(1)}), q = \overline{N_0 + 1, N_0 + N_1} \right\}.$$

Наконец, запишем систему уравнений, аппроксимирующую уравнения (12):

$$\sum_{q=1}^{N_0+N_1} (A_{jq} \Phi_q^n + B_{jq} \Phi_q) = 0, \quad \sum_{q=1}^{N_0+N_1} (A_{jq} \Psi_q^n + B_{jq} \Psi_q) = 0, \quad j = \overline{1, N_0 + N_1}, \tag{18}$$

где элементы блочных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} выражаются через значения функции Грина и ее производной по квадратурным формулам без насыщения (15) и (16).

Таким образом, имеем $4(N_0 + N_1)$ значений Φ_q , Ψ_q , Φ_q^n , Ψ_q^n , $q = \overline{1, N_0 + N_1}$, и две константы C_0 , C_1 . Для их определения получена система линейных уравнений из $4(N_0 + N_1) + 2$ уравнений. В нее входят $2(N_0 + N_1)$ уравнений (14), 2 уравнения (17) и $2(N_0 + N_1)$ уравнений (18).

Окончательно систему линейных алгебраических уравнений (14), (17), (18) можно записать в самом общем матричном виде:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{g}, \tag{19}$$

где \mathbf{Z} – столбец неизвестных значений функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$ и констант C_0 , C_1 , \mathbf{g} – столбец правых частей уравнений, а матрица \mathbf{P} определяется только формой области D и не зависит от вида граничных условий задачи.

2.4. Определение функции тока и скорости жидкости внутри области

Решив систему уравнений (19), определим неизвестные дискретные значения функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi_n(s)$, $\psi_n(s)$ на границах ∂D_0 и ∂D_1 области D , зная которые можно приближенно определить значение искомой бигармонической функции тока Ψ в любой точке, лежащей внутри области D .

Для гармонических функций φ и ψ во внутренней точке области D справедливы интегральные выражения:

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(M) &= \int_{\partial D} \left(-G(M, M') \frac{\partial\varphi(M')}{\partial n} + \frac{\partial G(M, M')}{\partial n} \varphi(M') \right) ds', \\ 2\pi\psi(M) &= \int_{\partial D} \left(-G(M, M') \frac{\partial\psi(M')}{\partial n} + \frac{\partial G(M, M')}{\partial n} \psi(M') \right) ds', \quad M \in D. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегралы (20) не имеют особенностей, и для функций φ и ψ внутри области D с помощью квадратурной формулы без насыщения (15) получаются следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{N_0+N_1} \left(-F_q G_q(x, y) \Phi_q^n + \frac{1}{N_{0,1}} G_q^n(x, y) \Phi_q \right), \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{N_0+N_1} \left(-F_q G_q(x, y) \Psi_q^n + \frac{1}{N_{0,1}} G_q^n(x, y) \Psi_q \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где $N_{0,1} = N_0$ при $q = 1, 2, \dots, N_0$ и $N_{0,1} = N_1$ при $q > N_0$.

$$G_q(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left((x - X_q)^2 + (y - Y_q)^2 \right), \quad G_q^n(x, y) = \frac{(X_q - x)X_q^n + (Y_q - y)Y_q^n}{(x - X_q)^2 + (y - Y_q)^2}.$$

Тогда окончательное выражение для искомой бигармонической функции тока Ψ внутри области D примет вид

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{N_0+N_1} \left(-F_q G_q(x, y) (\Phi_q^n + x\Psi_q^n) + \frac{1}{N_{0,1}} G_q^n(x, y) (\Phi_q + x\Psi_q) \right). \quad (22)$$

Для полного решения необходимо также определить поле скоростей вязкой жидкости внутри области D по формулам (2), т.е. следует найти частные производные найденной функции тока (22). Поскольку эти функции заданы явно как функции переменных x и y , то дифференцирование можно провести аналитически. Тогда для компонент скорости произвольной внутренней точки (x, y) двусвязной области D получим

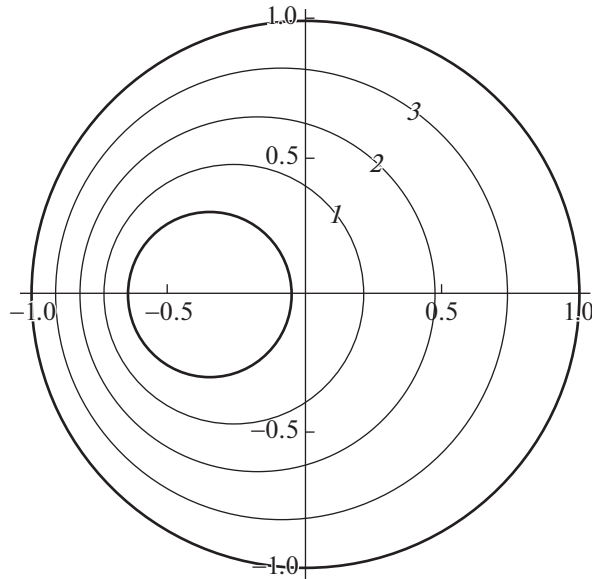
$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \psi - x \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Гармонические функции, которые вычисляются по квадратурным формулам (21), имеют высокую точность, если точка находится на расстоянии, большем, чем расстояние между двумя ближайшими граничными маркерами. Чтобы вычислять значения гармонических функций ближе к границе, надо в суммах (21) удвоить число граничных точек. Также может быть использовано неравномерное распределение точек на границе. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе.

3. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

3.1. Проверка существования представления Гурса и сходимости расчетной схемы

Пусть бигармоническая в двусвязной области D функция Ψ имеет представление Гурса $\Psi = \varphi(x, y) + x \cdot \psi(x, y)$ через 2 гармонические функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Тогда, как показано выше, \mathbf{Z} – столбец размером $N_0 + N_1 + 2$, в который входят неизвестные значения функций



Фиг. 2. Область решения задачи.

$\varphi(s), \psi(s), \varphi_n(s), \psi_n(s)$ на контурах ∂D_0 и ∂D_1 и две константы C_0, C_1 , находятся из системы линейных алгебраических уравнений (19)

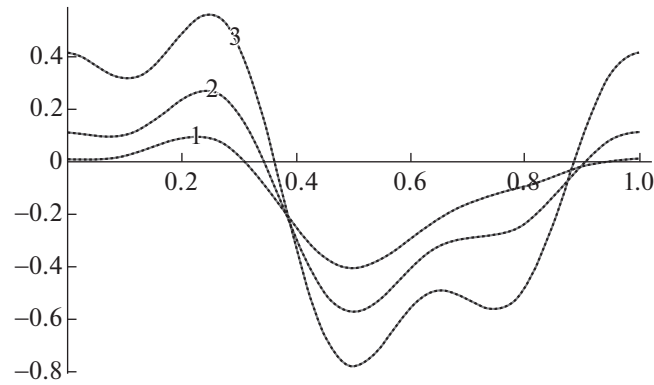
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{g},$$

где \mathbf{g} – заданный столбец правых частей уравнений размером $N_0 + N_1 + 2$, а матрица \mathbf{P} , размером $(N_0 + N_1 + 2) \times (N_0 + N_1 + 2)$, определяется только формой области D и не зависит от вида граничных условий задачи. Столбец \mathbf{Z} можно найти, обращая матрицу \mathbf{P} в виде $\mathbf{Z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{g}$, где обратная матрица \mathbf{P}^{-1} тоже не зависит от вида граничных условий задачи. Если существует обратная матрица \mathbf{P}^{-1} , то это означает существование столбца \mathbf{Z} и значений гармонических функций $\varphi(s), \psi(s), \varphi_n(s), \psi_n(s)$ на контурах ∂D_0 и ∂D_1 . Следовательно, для существования представления Гурса нужно доказать существование обратной матрицы \mathbf{P}^{-1} , что можно выполнить вычислительным путем.

Проверить сходимость схемы без насыщения для любой двухсвязной области D можно с помощью построения краевой задачи (6) с точным аналитическим решением. Для этого можно выбрать бигармоническую функцию $u(x, y)$, например в виде кубического полинома от переменных x, y , вычислить ее граничные значения $u|_{\partial D_k} = g^{(k)}(s)$ и ее нормальное производное $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D_k} = g_n^k(s)$. Функция $\Psi(x, y)$ будет очевидно являться точным решением для этой задачи. После этого вычисляем по предложенной выше численной схеме граничные значения $\Phi_q, \Psi_q, \Phi_q^n, \Psi_q^n, X_q$, $q = \overline{1, N_0 + N_1}$ и проверяем сходимость численных значений $\Phi_q + X_q \Psi_q$ к их точным граничным значениям $u(X_q, Y_q)$. В любой внутренней точке $(x, y) \in D$ приближенное значение решения вычисляется по формуле (22). Его можно сравнить с точным значением $u(x, y)$ и найти погрешность.

Пусть рассматривается тестовая функция $u(x, y) = x^3 + y^3$ – бигармоническая в двухсвязной области, ограниченной окружностями радиусов $\rho_1 = 1$ и $\rho_0 = 0.3$, расстояние между центрами которых $\Delta x = 0.35$ (фиг. 2).

Результаты численного решения задачи при $N_0 = 32, N_1 = 64$ представлены на фиг. 3: серыми сплошными линиями изображены графики значений тестовой функции $u_1(\zeta), u_2(\zeta), u_3(\zeta)$, $\zeta \in (0, 1)$ на трех окружностях 1, 2 и 3, показанных на фиг. 2; черными штриховыми линиями –



Фиг. 3. Результаты численного решения.

соответствующие графики значений приближенной функции $\tilde{u}_1(\zeta)$, $\tilde{u}_2(\zeta)$, $\tilde{u}_3(\zeta)$, найденной численно с помощью формул (21) и (22). В табл. 1 приведены значения относительной погрешности функции u на этих окружностях для различных значений N_0 ($N_1 = 2N_0$). Указанная погрешность вычисляется по формуле

$$\delta(u_i) = \frac{\max |u_i - \tilde{u}_i|}{\max |u_i|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (23)$$

где u_i – точное значение исследуемой величины (соответствует аналитическому решению), а \tilde{u}_i – приближенное ее значение, полученное численно.

Из табл. 1 видно, что при возрастании числа точек на контурах по арифметической прогрессии относительная погрешность уменьшается по геометрической прогрессии, что характерно для методов без насыщения.

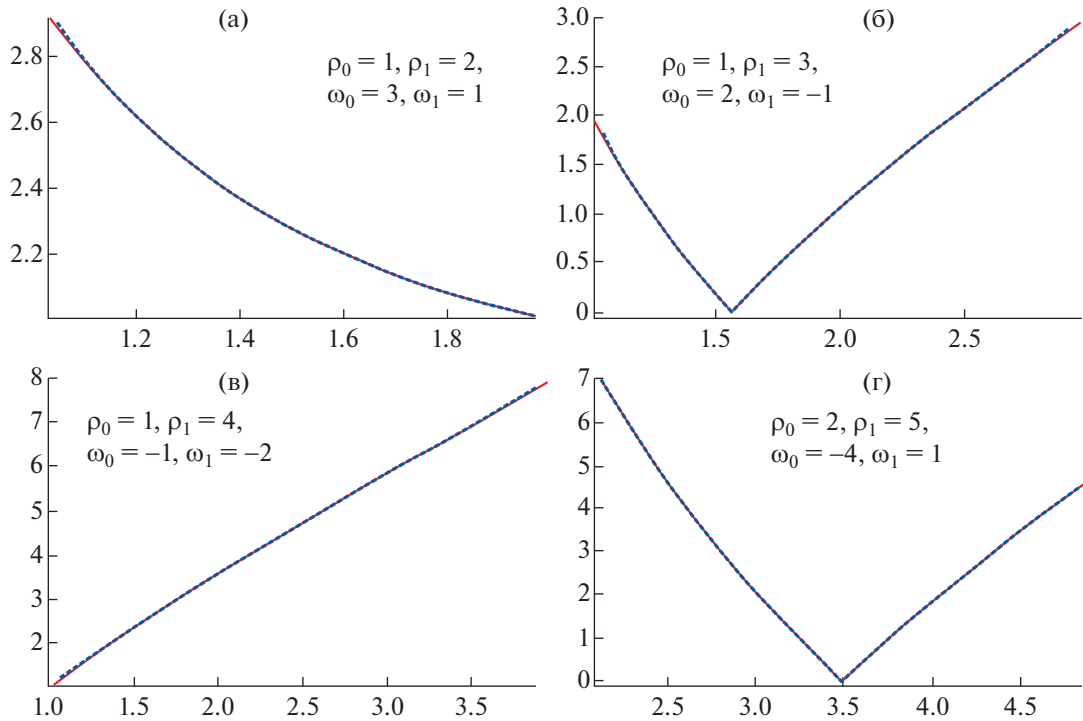
Таким образом, вопрос о существовании представления Гурса (8) может быть решен для каждой конкретной области с помощью составления матрицы \mathbf{P} . Если матрица \mathbf{P} имеет обратную, то для любой правой части \mathbf{g} системы (19) в данной области могут быть определены гармонические функции φ и ψ . Это будет доказывать и существование представления Гурса для данной области и экспоненциальную сходимость указанного метода. В частности, для всех рассмотренных в данной статье областей указанное условие выполняется.

3.2. Движение вязкой жидкости между двумя вращающимися концентрическими круговыми цилиндрами

Рассматривается задача о движении вязкой жидкости между двумя вращающимися концентрично расположенными круговыми цилиндрами. Пусть ρ_0 – радиус внутреннего цилиндра

Таблица 1. Относительные погрешности тестовой функции

N_0	$\delta(u_1)$	$\delta(u_2)$	$\delta(u_3)$
16	1.18×10^{-2}	2.34×10^{-3}	3.17×10^{-2}
24	2.12×10^{-3}	5.38×10^{-4}	3.97×10^{-3}
32	7.21×10^{-4}	4.28×10^{-6}	2.50×10^{-4}
40	2.61×10^{-5}	2.45×10^{-7}	3.26×10^{-5}



Фиг. 4. Графики зависимости модуля скорости жидкости от полярного радиуса.

(вращается с угловой скоростью ω_0), ρ_1 – радиус ω_0 внешнего цилиндра (вращается с угловой скоростью ω_1). Задача рассматривается в полярных координатах (ρ, θ) . Граничные условия:

$$V|_{\rho=\rho_0} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} = \omega_0\rho_0, \quad V|_{\rho=\rho_1} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_1} = \omega_1\rho_1, \quad (24)$$

где V – алгебраическое значение линейной скорости точек жидкости.

Решение такой задачи описано, например, в [22], где показано, что скорость V зависит только от ρ и имеет вид

$$V = a\rho + \frac{b}{\rho},$$

где следующие коэффициенты:

$$a = \frac{\omega_1\rho_1^2 - \omega_0\rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2}, \quad b = \frac{(\omega_0 - \omega_1)\rho_0^2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2}.$$

Для численного решения задачи от граничных условий (24) необходимо перейти к граничным условиям для функции тока. В случае такой постановки, если оси вращения цилиндров проходят через начало координат, то граничные условия (5), (7) для функции тока, с учетом неопределенности констант C_k , запишутся в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\rho=\rho_k} = g_n^{(k)}(s) = (-1)^k \omega_k\rho_k, \quad \Psi|_{\rho=\rho_k} = g^{(k)}(s) = C_k, \quad k = 0, 1.$$

Результаты численного решения задачи для некоторых различных значений входных параметров представлены на фиг. 4: красной сплошной линией изображены графики точного значения модуля скорости в зависимости от ρ , а синей штриховой линией – графики соответствующего модуля скорости, найденного численно при $N_0 = 200$ и $N_1 = 400$. В табл. 2 для каждого случая, представленного на графиках фиг. 2, для различных N_0 ($N_1 = 2N_0$) приведены значения

Таблица 2. Относительные погрешности модуля скорости

N_0	(а)	(б)	(в)	(г)
80	2.95×10^{-3}	6.07×10^{-2}	1.08×10^{-2}	2.39×10^{-2}
120	6.56×10^{-4}	4.66×10^{-3}	3.35×10^{-3}	1.38×10^{-3}
160	1.87×10^{-5}	3.63×10^{-4}	1.19×10^{-4}	3.95×10^{-4}
200	4.29×10^{-7}	3.32×10^{-5}	6.27×10^{-5}	2.37×10^{-5}

относительной погрешности модуля скорости, которая вычисляется по формуле, аналогичной формуле (23).

Следует также заметить, что на серединной окружности рассматриваемых областей ($\rho = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}$) относительная погрешность практически нулевая (в зависимости от параметров области и числа граничных элементов она принимает значения порядка $10^{-12} - 10^{-16}$). Из-за того, что потенциал двойного слоя имеет скачок на границе, то при приближении к ней на расстояние, сравнимое с расстоянием между выбранными точками границы, наблюдается увеличение погрешности. С увеличением количества точек на границе область расхождения уменьшается. Для снижения погрешности в “узких” участках области удобно применять сгущение точек, что достигается за счет функции $f_k(\zeta)$ ($k = 0, 1$). Этот прием проиллюстрирован ниже на тестовой задаче.

3.3. Движение вязкой жидкости между двумя вращающимися эксцентрическими круговыми цилиндрами

Рассмотрим теперь течение вязкой жидкости между двумя вращающимися эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами. Пусть ρ_0 – радиус внутреннего цилиндра (вращается с угловой скоростью ω_0), ρ_1 – радиус внешнего цилиндра (вращается с угловой скоростью ω_1), расстояние между центрами цилиндров Δx . Положительным является направление вращения против часовой стрелки.

По аналогии с результатами, полученными в [1] для случая вращения только внутреннего цилиндра, в [5] получено аналитическое решение рассматриваемой задачи.

Численное решение задачи проведено по описанному в данной статье алгоритму. При этом применено неравномерное распределение точек на контурах, что позволяет улучшить точность без увеличения количества точек на границах. В качестве функций $f_k(\zeta)$, которые характеризуют плотность распределения точек на контуре ∂D_k ($k = 0, 1$), используются функции

$$f_k(\zeta) = 1 + \frac{\Delta x}{\rho_1 - \rho_0} \cos 2\pi\zeta.$$

В частности, при $\rho_1 = 1$, $\rho_0 = 4$ для различных значений Δx получаются следующие картины распределения точек на контурах ($N_0 = 20$, $N_1 = 48$), представленные на фиг. 5.

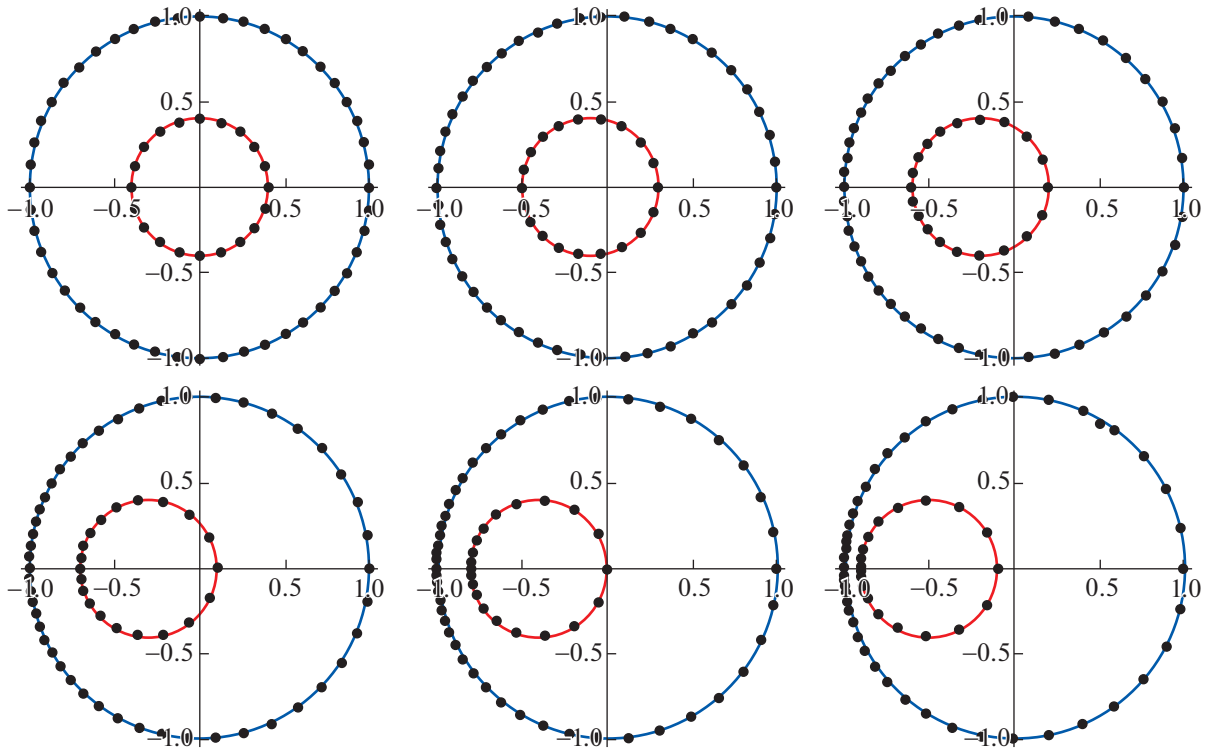
Если ось вращения внешнего цилиндра проходит через начало координат, граничные условия (5), (7) для функции Ψ примут вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\partial D_k} = g_n^{(k)}(s) = (-1)^k \omega_k \rho_k, \quad \Psi \Big|_{\partial D_k} = g^{(k)}(s) = C_k, \quad k = 0, 1.$$

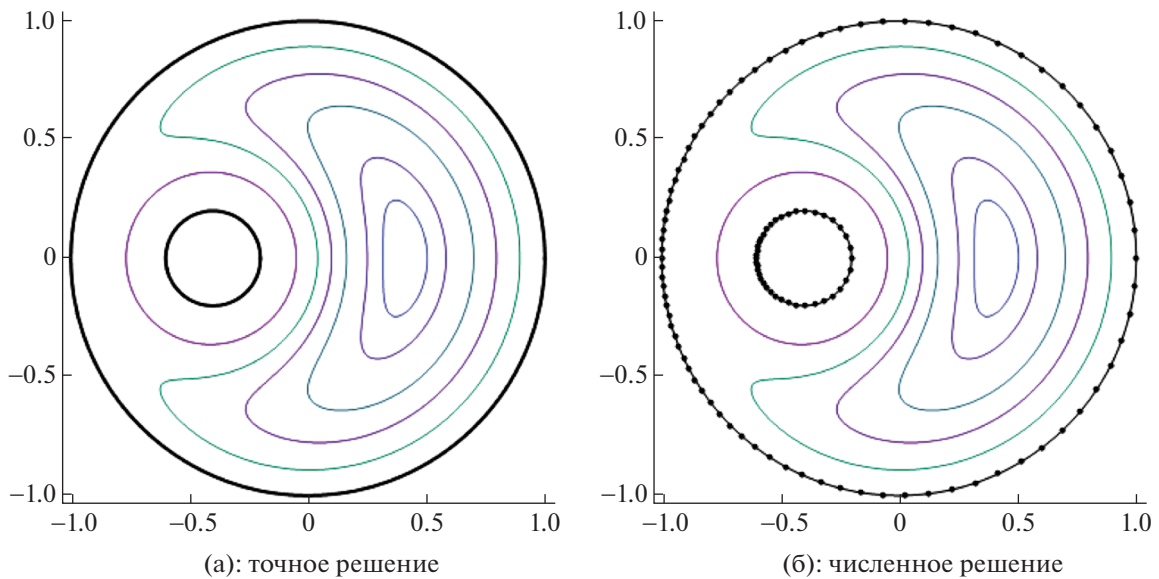
На фиг. 6, 7 показано сравнение результатов численного и аналитического решения для различных значений параметров ρ_0 , ρ_1 , ω_0 , ω_1 , Δx ($N_0 = 40$, $N_1 = 100$).

При наложении фигур 6а и 6б и фигур 7а и 7б линии тока совпадают, что говорит о достаточной точности численного решения.

Для более точной количественной оценки погрешности проведем детальный анализ для еще одного случая: $\rho_0 = 0.3$, $\rho_1 = 1$, $\omega_0 = -8$, $\omega_1 = 4$, $\Delta x = 0.35$ (параметры области такие же, как в п. 3.1). На фиг. 8 представлены результаты численного решения задачи для указанных значений



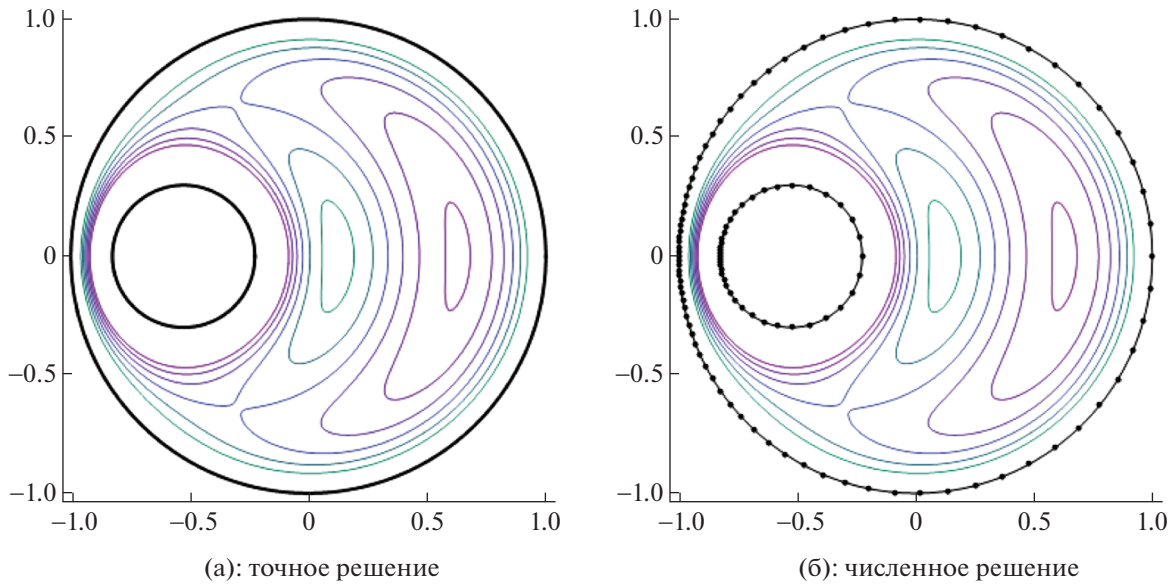
Фиг. 5. Ступение точек в “узких” участках границы.



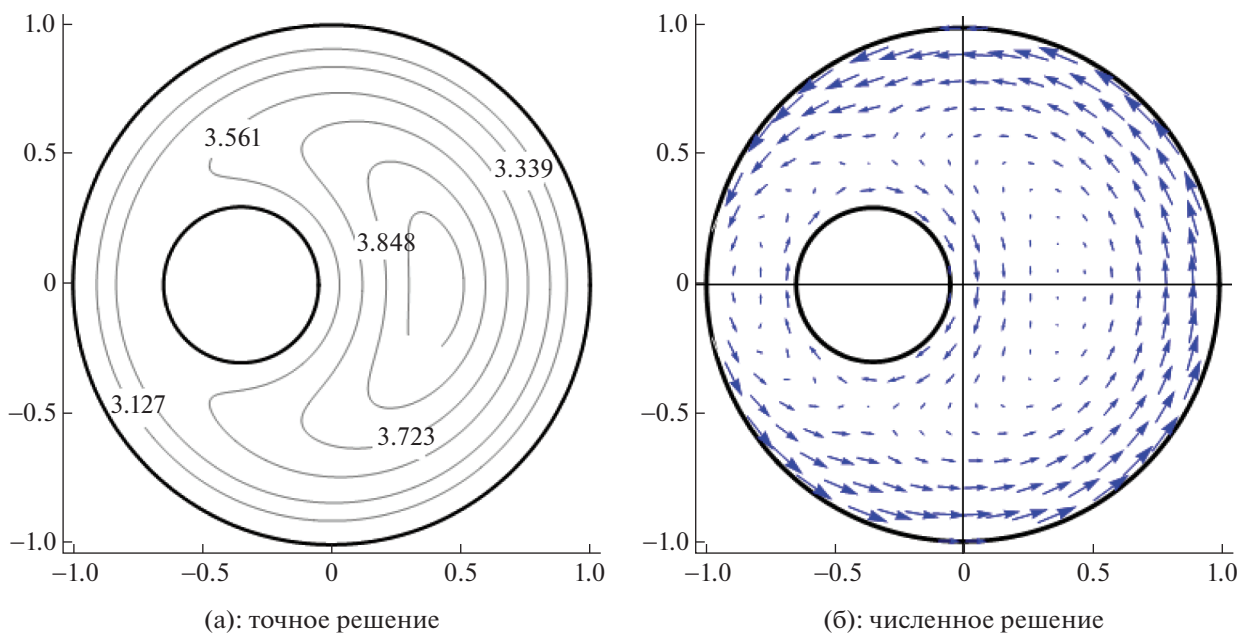
Фиг. 6. Линии тока $\Psi = \text{const}$ для $\rho_0 = 0.2$, $\rho_1 = 1$, $\omega_0 = 5$, $\omega_1 = -0.2$, $\Delta x = 0.4$.

входных параметров при $N_0 = 60$, $N_1 = 120$: на фиг. 8а приведены линии тока $\Psi = \text{const}$ и для каждой линии указано числовое значение функции тока, которому она соответствует; на фиг. 8б представлено векторное поле скоростей точек жидкости (длина вектора соответствует его величине).

Для оценки погрешности полученного решения проведем сначала сравнение функции тока, полученной численно и аналитически. Из точного решения может быть найдена точная функ-



Фиг. 7. Линии тока $\Psi = \text{const}$ для $\rho_0 = 0.3, \rho_1 = 1, \omega_0 = 12, \omega_1 = 1, \Delta x = 0.525$.



Фиг. 8. Результаты численного решения при $\rho_0 = 0.3, \rho_1 = 1, \omega_0 = -8, \omega_1 = 4, \Delta x = 0.35$.

ция тока $\Psi(x)$ в зависимости от координаты x при $y = 0$. Соответствующая функция $\tilde{\Psi}(x)$ находится из приближенного решения с помощью (22). В табл. 3 приведены значения относительной погрешности $\delta(\Psi(x)) = \frac{\max |\Psi(x) - \tilde{\Psi}(x)|}{\max |\Psi(x)|}$ для различных значений N_0 ($N_1 = 2N_0$) на интервале $x \in [-0.95, -0.7] \cup [0, 0.95]$.

Далее выясним вопрос о распределении погрешности модуля скорости внутри области течения. На фиг. 9 приведены графики относительной погрешности модуля скорости на внутренней окружности 2, изображенной на фиг. 2:

$$\delta_2(\zeta) = \frac{|v_2(\zeta) - \tilde{v}_2(\zeta)|}{|v_2(\zeta)|},$$

Таблица 3. Относительные погрешности для функции тока на оси Ox

N_0	20	40	60	80	100
$\delta(\Psi(x))$	1.09×10^{-2}	2.35×10^{-3}	1.89×10^{-4}	9.65×10^{-5}	2.65×10^{-6}

Таблица 4. Относительные погрешности модуля скорости

N_0	$\delta(v_1)$	$\delta(v_2)$	$\delta(v_3)$
20	6.22×10^{-3}	2.05×10^{-3}	1.05×10^{-2}
40	2.11×10^{-3}	9.92×10^{-5}	1.58×10^{-3}
60	9.24×10^{-4}	1.78×10^{-5}	2.23×10^{-4}
80	1.15×10^{-4}	1.00×10^{-6}	2.79×10^{-5}
100	7.41×10^{-5}	1.90×10^{-7}	5.07×10^{-6}

где $v_2(\zeta)$ – точное значение модуля скорости в точке ζ , а $\tilde{v}_2(\zeta)$ – приближенное значение, полученное численно. Окружность симметрична относительно оси Ox , поэтому графики приводим для верхней полуокружности (параметр $\zeta \in [0, 0.5]$ по оси абсцисс) для различных значений количества граничных элементов N_0 ($N_1 = 2N_0$).

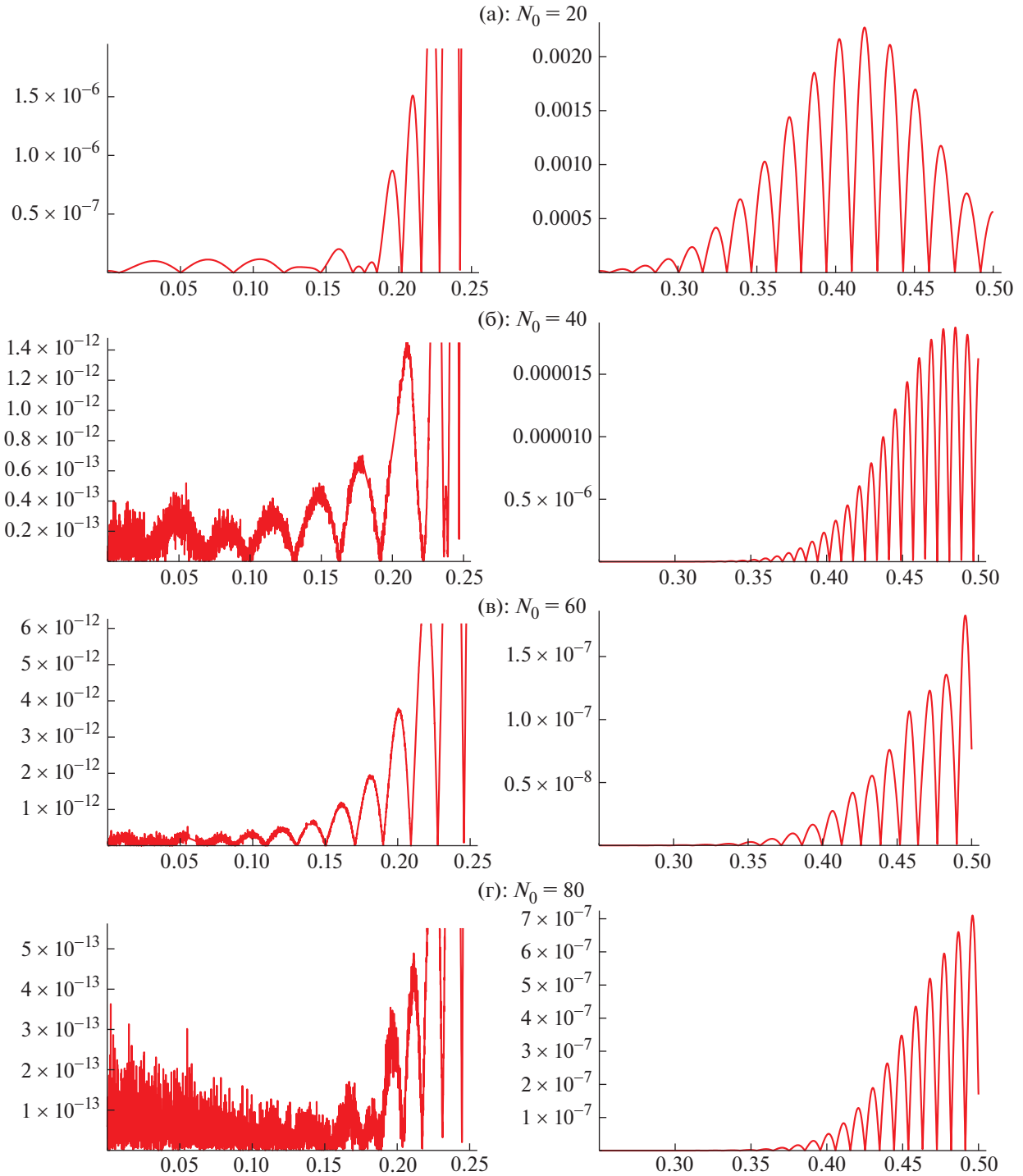
Представленные на фиг. 9 графики показывают, как зависит относительная погрешность модуля скорости на дуге одной из окружностей внутри расчетной области от параметра ζ при различных значениях числа узлов сетки N_0 . Из графиков видно, что погрешности малы и почти хаотичны в расчетной области. Поэтому более информативной представляется табл. 4, в которой приведены относительные погрешности модуля скорости, вычисленные по формуле (23), вдоль окружностей внутри области, изображенных на фиг. 2, для различных значений N_0 ($N_1 = 2N_0$).

Из проведенного в этом разделе сравнения численного и аналитического решений видно, что численные результаты в расчетной области мало отличаются уже при небольших значениях N_0 и N_1 . Точность может нарушаться лишь вблизи границ, однако с увеличением значений N_0 и N_1 область расхождения уменьшается. Кроме того, улучшение точности при одном и том же числе граничных элементов может быть достигнуто за счет неравномерного распределения точек на контурах. При увеличении числа элементов сетки по арифметической прогрессии погрешность убывает по геометрической прогрессии. Таким образом, можно сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма для расчета течения вязкой жидкости, заключенной между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения.

4. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ ЦИЛИНДРОВ НЕКРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

4.1. Расчет модели миксера

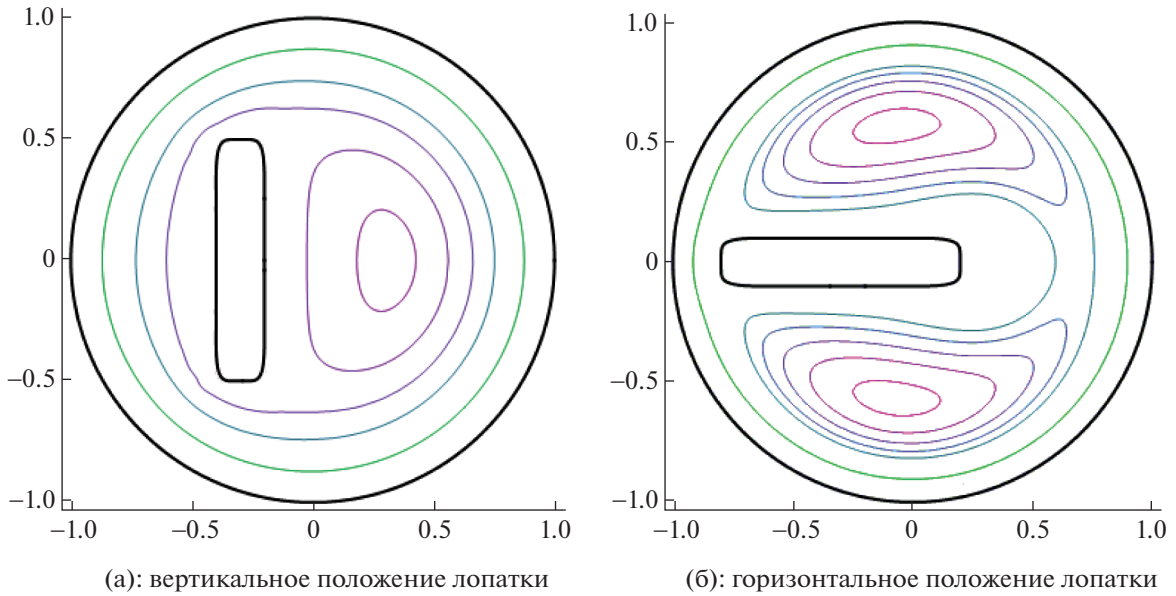
Рассмотрим течение вязкой жидкости, заключенной между вращающейся с угловой скоростью ω прямоугольной лопаткой с линейными размерами a_0 и b_0 (внутренний контур) и круговым цилиндром радиуса ρ_1 (внешний контур), расстояние между центрами круга и прямоугольника равно Δx (модель миксера). Пусть выбрана система координат, в которой внутренний контур неподвижен, тогда, очевидно, внешний круговой контур вращается в ней с угловой скоростью $-\omega$. В такой системе координат течение будет стационарно. Пусть начало координат расположено в центре внешнего кругового контура, стороны прямоугольника параллельны осям координат, центр прямоугольника лежит на оси Ox .



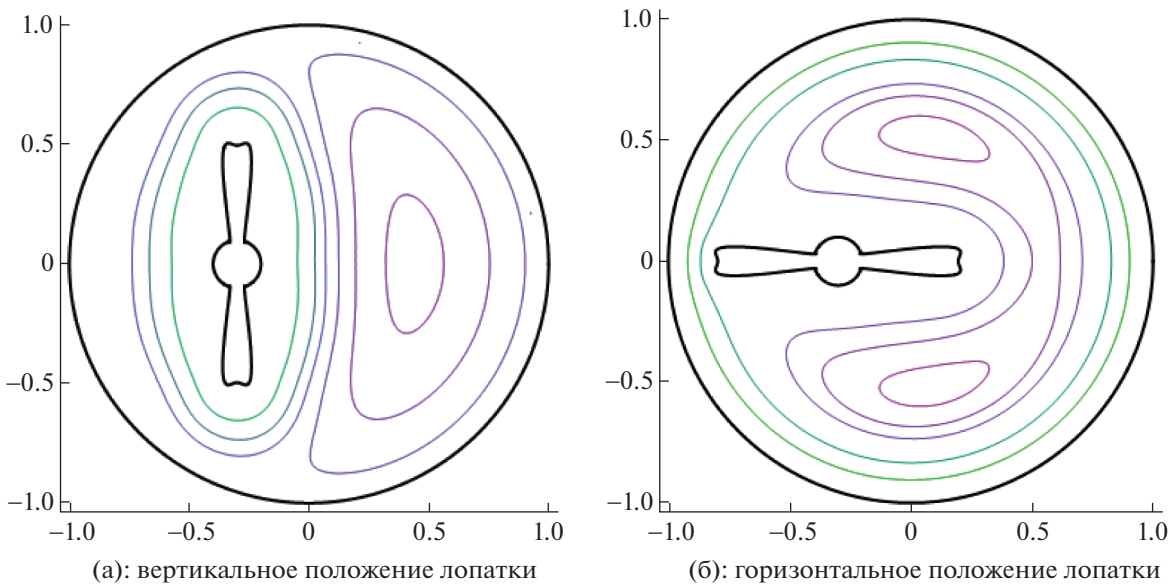
Фиг. 9. Графики относительной погрешности модуля скорости.

Для реализации численного решения задачи методом граничных элементов без насыщения углы прямоугольника сглаживаются, а именно в качестве внутреннего контура задается замкнутая кривая, которая описывается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{2N}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{(2n-1)} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right] \cos[(2n-1)2\pi\zeta], \\
 y_0 &= \frac{2N}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{(2n-1)} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right] \sin[(2n-1)2\pi\zeta],
 \end{aligned}
 \tag{25}$$



Фиг. 10. Линии тока $\Psi = \text{const}$ в случае лопатки прямоугольной формы.



Фиг. 11. Линии тока $\Psi = \text{const}$ в случае лопатки сложной формы.

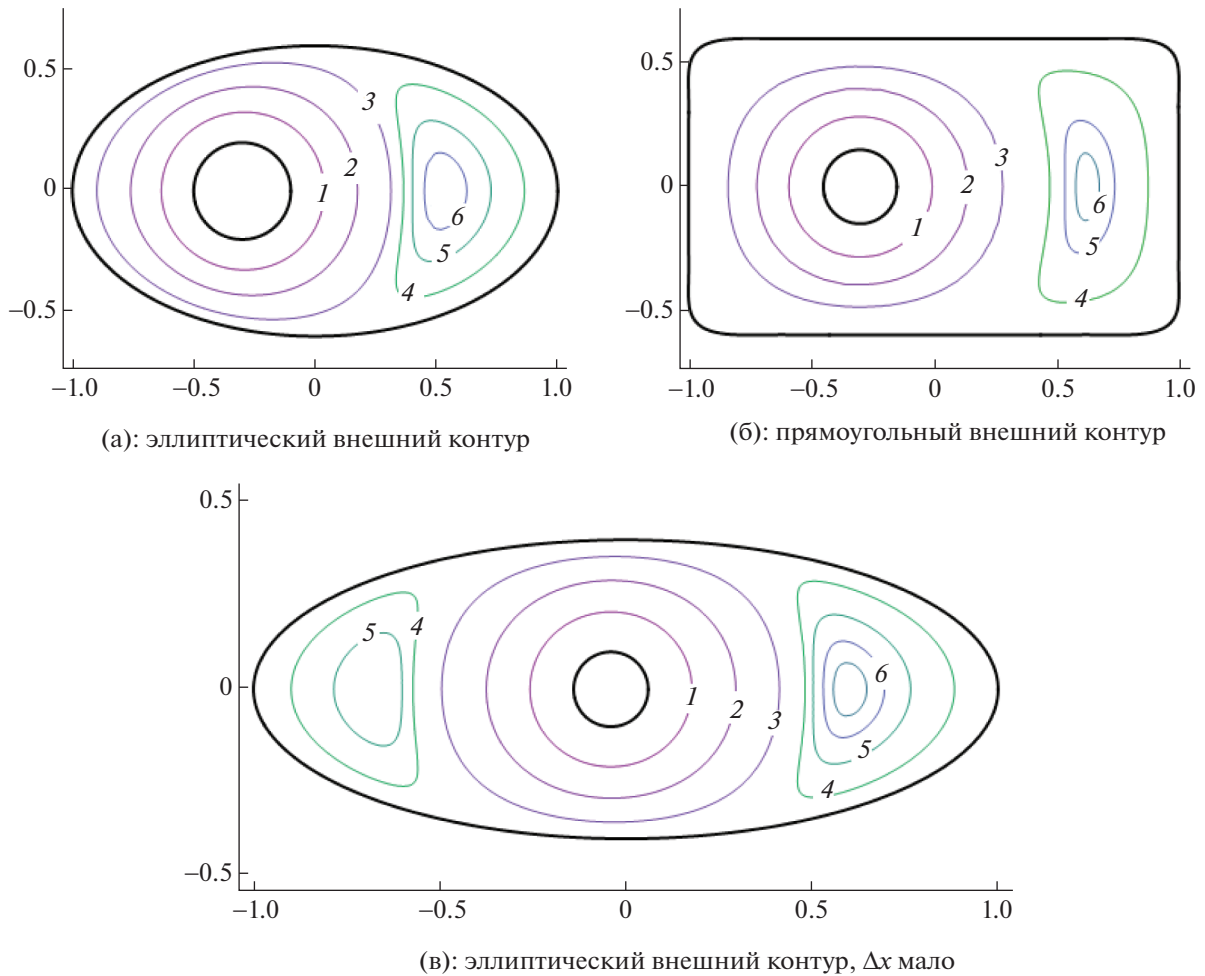
где

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} r(t) \cos t \cos[(2n-1)t] dt, \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} r(t) \sin t \sin[(2n-1)t] dt, \quad n = \overline{1, N},$$

$$r(t) = \begin{cases} a_0 / \cos t, & t < \arctan(b_0/a_0), \\ b_0 / \sin t, & t \geq \arctan(b_0/a_0). \end{cases}$$

Число N определяет степень сглаживания углов прямоугольника: чем больше значение N , тем меньше радиус сглаживания и тем лучше полученный контур приближает прямоугольник.

На фиг. 10 представлены линии тока $\Psi = \text{const}$, полученные в результате численного расчета для двусвязной области описанного выше вида при $N = 20$ и при количестве граничных элемен-



Фиг. 12. Линии тока $\Psi = \text{const}$ в случае вращения внутреннего кругового цилиндра.

тов $N_0 = 80$, $N_1 = 200$ для следующих значений входных параметров: $\rho_1 = 10$, $a_0 = 1$, $b_0 = 5$, $\hat{x} = 3$, $\omega = 1$. Формулы (25) соответствуют вертикальному положению лопатки с центром в начале координат, преобразования координат, необходимые для получения контуров, изображенных на фиг. 6, очевидны.

На фиг. 11 изображены линии тока, полученные в результате численного расчета в случае лопатки более сложной формы: параметрические уравнения рассматриваемого контура совпадают с уравнениями (25), если положить в них

$$r(t) = \begin{cases} a_0 / \cos t, & t < \arctan(b_0/a_0), \\ b_0, & t \geq \arctan(b_0/a_0). \end{cases}$$

Расчеты проведены при $N_0 = 120$, $N_1 = 180$ (фиг. 10а: $\omega = 4$, фиг. 10б: $\omega = 1$).

4.2. Вращение кругового цилиндра внутри некругового

Приведем результаты расчета течения вязкой жидкости, заключенной между вращающимся с угловой скоростью ω круговым цилиндром радиуса ρ_0 (внутренний контур) и внешним цилиндром эллиптического и сглаженного прямоугольного (описывается формулами (23)) сечения. Расстояние между центрами внешнего и внутреннего контуров равно Δx . Течение в этом случае также стационарно, поэтому течение жидкости может быть описано с помощью линий тока. Пусть начало координат расположено в центре внешнего контура, центр внутреннего контура лежит на оси Ox .

Таблица 5. Значения функции тока на линиях уровня на фиг. 12

Линии тока	1	2	3	4	5	6
(а)	0.1477	0.1558	0.1593	0.1599	0.1602	0.1604
(б)	0.1294	0.1357	0.1387	0.1402	0.1403	0.1404
(в)	0.1094	0.1107	0.1110	0.1111	0.1112	0.1113

На фиг. 12 изображены линии тока $\Psi = \text{const}$, полученные в результате численного расчета при $N_0 = 60$, $N_1 = 180$ для $\omega = 1$ для внешнего контура в форме: (а) – эллипса с полуосями $a_1 = 1$ и $b_1 = 0.6$ при $\rho_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.3$; (б) – скругленного прямоугольника со сторонами $a_1 = 1$ и $b_1 = 0.6$ при $\rho_0 = 0.15$, $\Delta x = 0.3$; (в) – эллипса с полуосями $a_1 = 1$ и $b_1 = 0.4$ при $\rho_0 = 0.1$, $\hat{x} = 0.04$. Значения функции тока на приведенных линиях уровня представлены в табл. 5. Эти значения несут информацию о величине скорости на линиях тока: она, как известно, пропорциональна изменению значений функции тока.

Как видно из фиг. 12а, в, при уменьшении осей эллипса и изменении положения внутреннего контура картина вихревой структуры может качественно измениться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана численная схема без насыщения метода граничных элементов для решения задачи течения вязкой жидкости в приближении Стокса в двусвязной области, границы которой движутся заданным образом. Бигармоническая функция тока представлена в виде комбинации двух гармонических функций (соотношение Гурса). Получена система интегральных уравнений для нахождения указанных гармонических функций. Для аппроксимации системы интегральных уравнений системой линейных уравнений применены квадратурные формулы без насыщения. Точность численной схемы проверена на известном решении задачи течения вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами и на многих других тестовых краевых задачах, для которых имеются точные решения. Численные результаты в расчетной области мало отличаются от точных уже при небольшом числе граничных элементов. Показано, как за счет неравномерного распределения точек на контурах можно повышать точность вычислений при одном и том же числе граничных элементов. При увеличении числа элементов сетки по арифметической прогрессии погрешность в расчетной области убывает по геометрической прогрессии. Рассмотрены решения некоторых оригинальных задач, в частности, получена картина линий тока в математической модели миксера.

К представленной в данной работе схеме наиболее близко численное решение [26] бигармонического уравнения в односвязной области, в которой используется аппроксимация граничного интегрального уравнения с помощью быстрого преобразования Фурье. Из приведенной в [26] таблицы можно видеть, что схема насыщаема и погрешность является степенной функцией числа узлов n :

$$\Delta \rho_n = \|\tilde{\rho}_n - \rho\| \sim Cn^{-m},$$

где ρ – точное решение бигармонического уравнения, $\tilde{\rho}_n$ – численное решение при числе узлов n , C – некоторая константа. Показатель степени можно оценить, используя данные таблиц для величины

$$CO = \log_2 \frac{\Delta \rho_n}{\Delta \rho_{2n}} = \log_2 2^m = m.$$

Из приведенной в [26] табл. 3 следует, что величина $CO = m$ с ростом n стремится к значению 1.5. Это означает, что схема насыщаема и порядок погрешности весьма низкий – между первым и вторым. Предлагаемая в нашей статье схема ненасыщаема и ее погрешность уменьшается по экспоненте $\Delta \rho_n \sim e^{-Cn}$. При увеличении числа узлов в 2 раза погрешность уменьшается в

e^{Cn} раз, тогда как в схеме с быстрым преобразованием Фурье погрешность уменьшается всего в $\frac{\Delta \rho_n}{\Delta \rho_{2n}} = 2^m \approx 3$ раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. Физматлит, 1986. 733 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
3. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений. Т. 3. Гидравлика. Прикл. механика. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 700 с.
4. Жуковский Н.Е., Чаплыгин С.А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Тр. Отделения физ. наук об-ва любителей естествознания. 1906. Т. 13. В. 1. С. 24–33.
5. Чаплыгин С.А. Полн. собр. соч. С.А. Чаплыгина. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948.
6. Sommerfeld A. Zur hydrodinamischen Theorie der Schmiermittelreibung // Z. Math. u. Phys. 1904. V. 50. P. 97.
7. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects // Arch. Rational Mech. Anal. 1976. V. 62. P. 237–294.
8. Чернявский В.М. Точное решение о ползущем цилиндрическом течении в подшипнике со свободным шипом // Докл. АН. 2008. Т. 418. № 1. С. 42–45.
9. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 3. С. 16–25.
10. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. НАНИ ЧР. 2002. № 2. С. 44–62.
11. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Camb. Phil. Soc. 1851. V. 9. Part II. 8–106 pp.
12. Вабищевич П.Н. Численное решение краевых задач для эллиптических уравнений четвертого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1196–1206.
13. Сорокин С.Б. Метод поэтапного обращения для численного решения бигармонического уравнения // Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36. № 3. С. 659–663.
14. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 1. С. 52–62.
15. Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. 80 с.
16. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The hydrodynamics of cavitating flows. New York: Backbone Publishing Company, USA, 2011. 598 p.
17. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
18. Elliott L.A., Ingham D.B., Bashir T. El. The boundary element method for the solution of slow flow problems for which a paradoxical situation arises // Proc. Boundary Element Methods in Fluid Dynamics II, Southampton, 1994. 16–24 pp.
19. Терентьев А.Г., Казакова А.О. Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. предельного состояния. 2016. № 2(28). С. 35–48.
20. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 2050–2059.
21. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
22. Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 3. С. 797–802.
23. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Вестн. Московского ун-та. Серия 1: Матем. Механика. 1991. № 3. С. 92–96.
24. Петров А.Г. Квадратурные формулы для периодических функций и их приложение к методу граничных элементов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1344–1361.
25. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
26. Jiang Y., Wang B., Xu Y. A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation // SIAM J. NUMER. ANAL. V. 52. № 5. P. 2530–2554.
27. Петров А.Г. Численные схемы без насыщения для периодических функций // Докл. АН. 2018. Т. 481. № 4. С. 362–366.
28. Петров А.Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1326–1338.
29. Петров А.Г., Потапов И.И. О расчете сил, действующих на тела, для плоских и осесимметричных задач кавитационного обтекания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 318–331.
30. Петров А.Г., Сандуляну Ш.В. Моделирование электрохимической обработки методом граничных элементов без насыщения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 120–130.
31. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения. М.: Научный Мир, 2002. 155 с.
32. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.
33. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
34. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.
35. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 799 с.
36. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.—Л.: Физматлит, 1960. 656 с.