

УДК 519.642

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© 2019 г. М. Л. Маслаков

(199178 С.-Петербург, 11-я линия В.О., 66, АО “Российский институт мощного радиостроения”, Россия)

e-mail: maslakovml@gmail.com

Поступила в редакцию 05.04.2018 г.
Переработанный вариант 18.08.2018 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

В работе предложен новый способ выбора параметра регуляризации при решении интегрального уравнения типа свертки в задачах адаптивной фильтрации. Предложенный способ основан на минимизации уклонения фазовых значений. Представлены результаты численного моделирования предложенного способа при решении интегральных уравнений свертки методом регуляризации Тихонова. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: интегральное уравнение типа свертки, некорректная задача, метод регуляризации, параметр регуляризации.

DOI: 10.1134/S0044466919060103

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи радиолокации и адаптивной фильтрации, такие как идентификация, т.е. определение импульсной характеристики (ИХ) системы (или канала) по отклику на известный тестовый сигнал, и адаптивная коррекция, т.е. компенсация искажений внесенных каналом, сводятся к решению интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования. Как известно, эта задача является некорректно поставленной, т.к. правая часть уравнения, являющаяся результатом измерений на фоне шума, известна неточно, а одним из устойчивых и вычислительно-эффективных методов ее решения является метод регуляризации Тихонова (см. [1], [2]).

Одной из наиболее сложных и важных задач в методе регуляризации является выбор оптимального значения параметра регуляризации. Данной проблеме посвящено большое количество работ, в частности [3]–[8]. Однако использование большинства известных методов на практике связано с большими трудностями. Одной из основных причин этого является необходимость знания дисперсии шумовой составляющей в правой части уравнения [3]–[6]. На практике, как правило, удается получить лишь оценку отношения сигнал/шум (ОСШ), однако получение этой оценки также является отдельной сложной задачей [7]. В работе [8] рассматривается метод выбора параметра регуляризации в задаче линейной оптимальной фильтрации, однако постановка этой задачи существенно отличается от задач адаптивной фильтрации.

В настоящей статье предложен способ выбора оптимального значения параметра регуляризации при решении интегрального уравнения типа свертки, ориентированный для задач адаптивной фильтрации, а также приведены результаты численного моделирования предложенного способа.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Существенной особенностью систем передачи данных, в которых применяют методы адаптивной коррекции, является периодическая передача известных тестовых и неизвестных информационных сигналов. Для удобства последующих рассуждений будем считать, что их длитель-

ность одинакова. Таким образом, задача адаптивной коррекции состоит из последовательного решения двух уравнений. Первое уравнение, необходимое для определения ИХ канала, имеет вид

$$\int_0^{T_1} K(t - \tau)h(\tau)d\tau = u(t), \quad t \in [0; T_2], \quad (2.1)$$

где $K(t)$ – ядро интегрального уравнения (передаваемый тестовый сигнал), $h(t)$ – искомая функция ИХ системы (канала), $u(t)$ – правая часть уравнения (принимаемый тестовый сигнал), $T_2 \geq T_1$.

Второе уравнение, необходимое для коррекции информационного сигнала, имеет вид

$$\int_0^{T_1} K_m(t - \tau)h(\tau)d\tau = u_m(t), \quad t \in [0; T_2], \quad (2.2)$$

где $K_m(t)$ является искомой функцией (передаваемый информационный сигнал), $u_m(t)$ – правая часть уравнения (принимаемый информационный сигнал), а вместо $h(t)$ необходимо подставить $h(t, \alpha)$, полученное из (2.1), в виде

$$h(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega, \alpha) \frac{U(\omega)}{K(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.3)$$

где $U(\omega)$, $K(\omega)$ – соответствующие преобразования Фурье правой части и ядра уравнения (2.1), $G(\omega, \alpha)$ – стабилизирующая функция, зависящая от параметра регуляризации α , $\pm\Omega$ – частотный диапазон, определяемый длительностью, на которой выполнено преобразование Фурье.

Замечание 1. Ясно, что при численной реализации имеем дело с дискретизированными на равномерных сетках (т.е. с определенной частотой дискретизации F_s) сигналами, входящими в уравнения (2.1) и (2.2), а знак интеграла заменяется суммой. При вычислении преобразования Фурье осуществляется дополнение сигналов нулями до одинаковой длительности $(Z - 1)/F_s$, в результате чего можно перейти к эквивалентному (2.3) выражению, где вместо ω имеем ω_z , $z = 0, 1, \dots, Z - 1$, а знак интеграла также заменяется суммой. При этом $2\pi F_s = 2\Omega$. Однако, запись в виде (2.3) представляется более удобной.

К тестовому сигналу, который является ядром интегрального уравнения (2.1), предъявляют ряд требований, в частности, постоянство огибающей и равномерность спектра в занимаемой полосе частот. В современных системах радиолокации и передачи данных в качестве таких сигналов часто (см. [9]) используют сигналы с фазовой манипуляцией псевдослучайной последовательности (например, последовательности Баркера или М-последовательности (см. [10])). Такой сигнал задается выражением

$$K(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_0 t + \varphi_{\text{test}}(n)) p(t - nT_s), \quad (2.4)$$

где

$$\varphi_{\text{test}} = \{\varphi_{\text{test}}(n)\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

есть тестовая последовательность, состоящая из элементов $\{0; \pi\}$ в соответствии с определенной псевдослучайной последовательностью, ω_0 – несущая частота, T_s – длительность символа, N – количество символов, причем $T_1 = NT_s$ (см. 2.1, 2.2), $p(t)$ – импульсная функция вида

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; T_s), \\ 0, & t \notin [0; T_s). \end{cases}$$

Информационный сигнал $K_m(t)$ также задается выражением (2.4), где вместо последовательности φ_{test} используется последовательность $\varphi_m = \{\varphi_m(n)\}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, соответствующая неизвестной информационной последовательности b_m , состоящей из элементов, соответствующих

информационным битам. При этом в зависимости от кратности фазовой модуляции (ФМ) $\varphi_m = \{0; \pi\}$, $b_m = \{0; 1\}$ – для двухпозиционной ФМ;

$$\varphi_m = \left\{ 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\},$$

$b_m = \{00; 01; 11; 10\}$ – для четырехпозиционной ФМ и т.д.

В качестве модели канала связи может быть использована любая линейная модель. В данной работе для численного моделирования была использована модель Ваттерсона [11], применяемая при моделировании коротковолновых радиоканалов.

Тогда правую часть уравнений (2.1) и (2.2) можно представить следующим образом: $u(t) = \bar{u}(t) + v(t) + \xi(t)$ – для тестового сигнала и $u_m(t) = \bar{u}_m(t) + v_m(t) + \xi_m(t)$ – для информационного сигнала, где $\bar{u}(t)$, $\bar{u}_m(t)$ – точные значения; $v(t)$, $v_m(t)$ – помеха, представляющая собой “хвосты” информационного и тестового сигналов, т.е. $v(t) = \bar{u}_m(t)$, $t \in [T1; T2]$ и $v_m(t) = \bar{u}(t)$, $t \in [T1; T2]$. Кроме того, $v(t)$, $v_m(t)$ в общем случае содержат искажения, связанные с узкополосностью и неидеальностью реальных цепей (фильтров); $\xi(t)$ и $\xi_m(t)$ – независимые реализации аддитивного белого гауссовского шума, дисперсии которых одинаковы и равны σ^2 .

В качестве стабилизирующей функции воспользуемся известной функцией [1], [2]:

$$G(\omega, \alpha) = \frac{K(\omega)K^*(\omega)}{K(\omega)K^*(\omega) + \alpha M(\omega)}, \tag{2.5}$$

где символом * обозначено комплексное сопряжение, $M(\omega) = \omega^{2p}$.

Будем решать задачу выбора оптимального значения параметра регуляризации, обеспечивающего

$$\min_{\alpha} \|b_m - Y\{K_m(t, \alpha)\}\|, \tag{2.6}$$

где Y – оператор, осуществляющий отображение из одного пространства в другое, в рассматриваемом случае, осуществляющий операцию демодуляции, $\| \cdot \|$ – норма в некоторой метрике.

Таким образом, рассматриваемая задача заключается в выборе параметра регуляризации, обеспечивающего минимум количества ошибок демодуляции $q \geq 0$ в последовательности длиной N бит, значение которого вычисляется в виде

$$q = \sum_{n=0}^{N-1} |b_m(n) - \hat{b}_m(n)|, \tag{2.7}$$

где

$$\hat{b}_m = \{\hat{b}_m(0), \dots, \hat{b}_m(N - 1)\} = Y\{K_m(t, \alpha)\}.$$

В результате минимизация (2.6) приводит к минимизации частности или коэффициента ошибок, являющегося оценкой наиболее важного показателя достоверности в теории связи – вероятности ошибки на бит:

$$\hat{P} = \frac{1}{LN} \sum_{l=1}^L q_l, \tag{2.8}$$

где L – объем выборки.

Замечание 2. Вообще говоря, целевой функцией рассматриваемой задачи является минимизация (2.7), однако, выражение (2.6) представляется более общим, для адаптации предлагаемого способа для решения задач в других отраслях.

3. СПОСОБ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

3.1. Некоторые вспомогательные пояснения

Рассмотрим регуляризованное решение уравнения (2.2):

$$K_m(t, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G_m(\omega, \alpha_1, \alpha_2) \frac{U_m(\omega)}{H(\omega, \alpha_1)} \exp(i\omega t) d\omega, \quad (3.1)$$

где $U_m(\omega)$ – преобразование Фурье правой части уравнения (2.2), $H(\omega, \alpha_1)$ – регуляризованное решение уравнения (2.1) в частотной области, получаемое из (2.3) с учетом (2.5), $G_m(\omega, \alpha_1, \alpha_2)$ – стабилизирующая функция, аналогичная (2.5), зависящая от двух параметров регуляризации, так как вместо $K(\omega)$ имеем $H(\omega, \alpha_1)$, где α_1, α_2 – соответствующие параметры регуляризации.

В работе [12] автором показано, что с учетом равенства занимаемой полосы частот сигналами $K(t)$, $K_m(t)$, $u(t)$, $u_m(t)$, а также равенства дисперсии шумовых составляющих правых частей уравнений (2.1) и (2.2), при практической реализации допустимо принять

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (3.2)$$

Соответствующее решение уравнения (2.2), определяемое выражением (3.1), обозначим через $K_m(t, \alpha)$.

Рассмотрим подробнее оператор Y на примере двухпозиционной ФМ. Из (2.4) следует, что на длительности интервала $t \in [nT_s; (n+1)T_s)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ (т.е. на длительности каждого символа), сигнал $K_m(t)$ в общем случае имеет вид $K_{n,j}(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_j)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1$, с начальной фазой $\varphi_0 = 0$, соответствующей $b_m(n') = 0$, или $\varphi_1 = \pi$, соответствующей $b_m(n') = 1$ (здесь n' – некоторое значение n из интервала $[0; N-1]$). Сигналы $K_{n,j}(t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1$, называют *образцовыми* или *опорными* сигналами [13].

На основе образцовых сигналов по формуле

$$y_{n,j} = \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} K_m(t, \alpha) K_{n,j}(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \quad (3.3)$$

вычисляют *гипотезы* $y_{n,j}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1$, после чего определяют значения последовательности $\hat{b}_m(n) = j$, при которых обеспечивается

$$\max_{j=0,1} (y_{n,j}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

Отметим, что гипотезы $y_{n,j}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1$, представляют собой коэффициенты корреляции принятого откорректированного (регуляризованного) и образцового сигналов.

Таким образом, $K_m(t, \alpha)$ на каждом интервале $t \in [nT_s; (n+1)T_s)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, имеет начальную фазу $\psi(n, \alpha)$, а оператор Y , действующий в соответствии с выражениями (3.3), (3.4), определяет “близость” фазы каждого символа $\psi(n, \alpha)$ к φ_0 или φ_1 .

Дополнительно введем оператор Y_ψ , осуществляющий вычисление фаз символов:

$$\psi = Y_\psi \{K_m(t, \alpha)\}, \quad (3.5)$$

где $\psi = \{\psi(n, \alpha)\}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, а вычисление каждого значения фазы осуществляется следующим образом:

$$s_n = \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} K_m(t, \alpha) \sin(\omega_0 t) dt, \quad c_n = \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} K_m(t, \alpha) \cos(\omega_0 t) dt, \quad (3.6)$$

$$\psi(n, \alpha) = \text{atan2}(s_n, c_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Замечание 3. Часто на практике на длительности $t \in [nT_s; (n+1)T_s)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, укладывается не целое число периодов на заданной частоте ω_0 . В этом случае при вычислении значений фаз $\psi(n, \alpha)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ необходимо выполнить операцию декорреляции.

3.2. Метод выбора параметра регуляризации

Существенной проблемой для решения поставленной задачи является то, что последовательность $b_m(n)$, $n = 0, \dots, N - 1$, неизвестна, что, вообще говоря, не позволяет решить задачу выбора параметра регуляризации в постановке (2.6). Поэтому для определения оптимального значения параметра регуляризации автором предложен способ выбора параметра регуляризации, основанный на минимизации уклонения фазовых значений получаемого решения.

Так как $K_m(t, \alpha)$ является лишь приближенным решением, то, очевидно, что значения фаз $\psi = \{\psi(n, \alpha)\}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, имеют определенное уклонение со своей плотностью распределения, дисперсия которой в том числе зависит от параметра регуляризации, т.е. $\sigma_\psi^2(\alpha)$.

Значения фаз φ_m для случая двухпозиционной ФМ с равной вероятностью могут принимать значения 0 или π , следовательно, плотность вероятности фаз сигнала $K_m(t, \alpha)$ можно представить в виде

$$W_{0,\pi}(\psi) = \frac{1}{2}W_0(\psi) + \frac{1}{2}W_0(\psi + \pi), \quad \psi \in [-\pi; \pi]. \tag{3.7}$$

При этом $W_0(\psi)$ достаточно хорошо описывается нормальным угловым законом распределения [13], [14].

В свою очередь известно [15], что вероятность ошибки на бит определяется выражением

$$P = 1 - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_0(\psi) d\psi. \tag{3.8}$$

Таким образом, предлагаемый автором метод выбора параметра регуляризации основывается на следующем.

Утверждение. Минимизация дисперсии фаз $\sigma_\psi^2(\alpha)$ приведет к минимизации вероятности ошибки на бит (3.8), оценка которой определяется выражением (2.8), минимизация которой собственно и заключается в минимизации (2.7) (в общем случае (2.6)).

С учетом сказанного оптимальное значение параметра регуляризации – такое значение α_{opt} , при котором обеспечивается

$$\min_{\alpha} \sigma_\psi^2(\alpha). \tag{3.9}$$

Замечание 4. Вообще говоря, дисперсия фаз σ_ψ^2 зависит от уклонения получаемого решения от точного, т.е. $\sigma_\psi^2(\sigma_m^2(\alpha))$, где

$$\sigma_m^2(\alpha) = \|K_m(t, \alpha) - K_m(t)\|. \tag{3.10}$$

При этом очевидно [13], [15], что $\min_{\alpha} \sigma_m^2(\alpha)$ и минимум (3.9) достигается при одном и том же значении $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$.

Очевидно, что получаемая при практической реализации оценка дисперсии фаз $\hat{\sigma}_\psi^2(\alpha)$ будет содержать определенную погрешность, связанную с небольшим объемом выборки, равным N (см. [14]). Впрочем, имеет место

Лемма 1. Существует некоторая область оптимальных значений параметра регуляризации $\{\alpha_{\text{opt}}\}$, обеспечивающих

$$q_{\min} = \min_{\alpha} \|b_m - Y\{K_m(t, \alpha)\}\|.$$

Доказательство. Длина последовательности b_m является конечной с числом элементов $N \in \mathbb{N}$, а значит, максимальное количество ошибок q_{\max} , определяемое выражением (2.7), не может превысить N . Заметим, что на практике максимальное количество ошибок в среднем не превосходит $N/2$. Допустим, что каждому значению $Q = \{q_{\min}, q_1, q_2, \dots, q_{l_{\max}} \equiv q_{\max}\} \in \mathbb{N}$ соответствует единственное значение параметра регуляризации $\alpha(q) = \{\alpha_{\text{opt}}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(l_{\max})}\}$. Однако $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$),

а значит, существует некоторое значение $\alpha^{(l)} \notin \alpha(q)$, которому должно соответствовать определенное значение $q_l \in Q$. Следовательно, возникает противоречие, а значит, каждому значению $q_l \in Q$ соответствует некоторое множество или область значений $\{\alpha^{(l)}\}$, в том числе значению $q_{\min} = \min_{\alpha} \|b_m - Y\{K_m(t, \alpha)\}\|$ соответствует область оптимальных значений параметра регуляризации $\{\alpha_{\text{opt}}\}$.

Таким образом, оператор Y отображает получаемое совместное решение уравнений (2.1) и (2.2) $K_m(t, \alpha)$ в конечномерное дискретное пространство. Отсюда следует, что требуется определить такое $\alpha'_{\text{opt}} \in \{\alpha_{\text{opt}}\}$, которое обеспечивало бы выполнение (2.6).

3.3. О вычислении оценки $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$ и невязке

Для вычисления оценки дисперсии фаз $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$ для случая двухпозиционной ФМ необходимо повернуть все фазы $\psi(n, \alpha)$ в правую полуплоскость так, чтобы

$$\psi(n, \alpha) \rightarrow \psi_0(n, \alpha) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.11)$$

Замечание 5. При использовании ФМ большей кратности поворот фаз осуществляется таким образом, чтобы все значения фаз были расположены в области (в секторе) символа, соответствующего $\varphi_m = 0$. Так, для четырехпозиционной ФМ имеем

$$\psi(n, \alpha) \rightarrow \psi_0(n, \alpha) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

для восьмипозиционной имеем

$$\psi(n, \alpha) \rightarrow \psi_0(n, \alpha) \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right],$$

и т.д. Будем полагать, что Y_{Ψ} также выполняет соответствующий поворот фаз (3.11).

Оценка $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$ определяется из выражения:

$$\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha) = \|Y_{\Psi}\{K_m(t, \alpha)\} - \varphi_m\|^2. \quad (3.12)$$

С учетом (3.5), а также полагая $\varphi_m = 0$ (с учетом поворота (3.11)), от (3.12) приходим к известному выражению [14]:

$$\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_0(n, \alpha))^2. \quad (3.13)$$

Невязка в условиях рассматриваемой задачи и принятых обозначений равна

$$\left\| \int_0^{T_1} K_m(t - \tau, \alpha) h(\tau, \alpha) d\tau - u_m(t) \right\|^2 = \hat{\sigma}^2(\alpha). \quad (3.14)$$

Сравним выражения (3.12) и (3.14).

1) $h(t, \alpha)$ является регуляризованным, т.е. приближенным решением уравнения (2.1), что эквивалентно неточно заданному интегральному оператору в классической постановке задачи (см., например, [3]), в результате чего задача выбора α по принципу невязки значительно усложняется. Напротив, Y_{Ψ} – оператор, абсолютно точно определяемый выражениями (3.6), (3.11).

2) $u_m(t)$ задана с погрешностью, в то время как φ_m известна точно (в рассматриваемом случае $\varphi_m = 0$).

3) $\hat{\sigma}^2(\alpha) \rightarrow \sigma^2$ при $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{opt}}$, однако дисперсия шумовой составляющей правой части уравнений (2.1) и (2.2) неизвестна, а ее оценка, как отмечалось выше, является отдельной сложной задачей. С другой стороны, из (3.8) следует, что $P \rightarrow \min$ при $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha) \rightarrow \min$, что достигается при $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{opt}}$. При этом знание (или получение оценки) σ^2 не требуется.

Необходимо учесть следующее: при слишком малых значениях α решение $K_m(t, \alpha)$ не обладает устойчивостью, а при больших α энергия сигнала $K_m(t, \alpha)$, вычисляемая по формуле

$$E(\alpha) = \int_0^{T_1} (K_m(t, \alpha))^2 dt, \tag{3.15}$$

будет мала (вообще говоря $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = 0$).

В обоих случаях это эквивалентно уменьшению ОСШ, что, очевидно, может привести к ложным локальным минимумам получаемой оценки дисперсии $\hat{\sigma}_\psi^2(\alpha)$.

3.4. Взвешенная оценка уклонения фазовых значений

Для решения указанной проблемы автором предлагается ввести функционал для получения взвешенной оценки уклонения фазовых значений, представляющий собой модуль суммы векторов:

$$R(\alpha) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} c(n, \alpha) \exp(i\psi_0(n, \alpha)) \right|, \tag{3.16}$$

где $c(n, \alpha) \geq 0$ – весовые коэффициенты, цель которых – учесть величину ОСШ получаемого решения $K_m(t, \alpha)$.

Как известно (см. [13]), при оценке параметра сигнала (функции) в подобных задачах применяют оптимальную схему по методу максимума функции правдоподобия, и, следовательно, весовые коэффициенты будут характеризовать меру взаимной корреляции между $K_m(t, \alpha)$ и опорными сигналами. Поскольку $K_m(t)$ (как и b_m) неизвестны, то в качестве опорных функций допустимо использовать базисные функции как в (3.3):

$$c(n, \alpha) = |y_{n,0} - y_{n,1}| \tag{3.17}$$

или опорные функции на основе полученных оценок фаз $\psi(n, \alpha)$:

$$c(n, \alpha) = \left| \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} K_m(t, \alpha) K(t, \psi(n, \alpha)) dt \right|, \tag{3.18}$$

где

$$K(t, \psi(n, \alpha)) = \sin(\omega_0 t + \psi(n, \alpha)).$$

Рассмотрим свойства функционала $R(\alpha)$:

- 1) $R(\alpha)$, $c(n, \alpha)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, непрерывны при $\alpha > 0$;
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} R(\alpha) = 0$, так как $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c(n, \alpha) = 0$;
- 3) $\exists \alpha' > 0$: $R(\alpha)$ при $\alpha > \alpha'$ монотонно убывающая функция. Это следует из того, что $c(n, \alpha)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, являются монотонно невозрастающими функциями, так как $E(\alpha)$, определяемая выражением (3.15), монотонно невозрастающая функция (см. [16]);
- 4) функционал $R(\alpha)$ является ограниченным, причем

$$R(\alpha) \leq N \sum_{n=0}^{N-1} E_0(n), \tag{3.19}$$

где

$$E_0(n) = \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} (\sin(\omega_0 t + \varphi_m(n)))^2 dt$$

есть энергия каждого символа (в общем случае энергия различных символов может отличаться).

При этом равенство в (3.19) возможно лишь при $\sigma^2 = 0$.

Кроме того, с учетом (3.9) и (3.10), а также ограниченности

$$\Psi(\alpha) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp(i\Psi_0(n, \alpha)) \right| \leq N \tag{3.20}$$

следует, что один из локальных максимумов $\Psi(\alpha)$ соответствует $\min_{\alpha} \sigma_m^2(\alpha) = \sigma_m^2(\alpha_{\text{opt}})$.

Таким образом, $\max_{\alpha} R(\alpha)$ достигается при $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

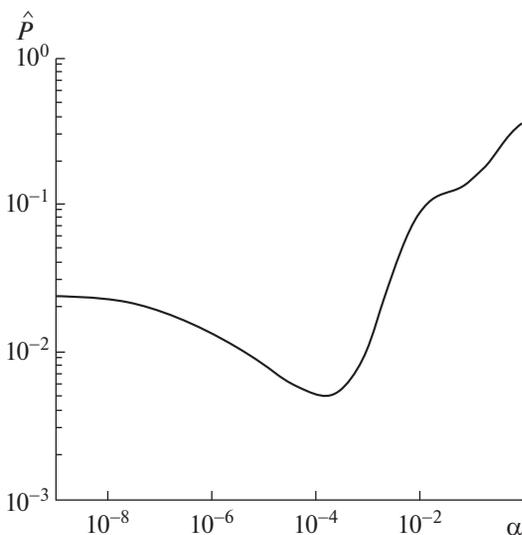
Для оценки эффективности выбора параметра регуляризации предлагаемым способом может служить коэффициент ошибок \hat{P} , вычисляемый по формуле (2.8). При этом для конкретного значения ОСШ зависимость $\hat{P}(\alpha)$ имеет единственный минимум (см. фиг. 1). Однако этот минимум будет соответствовать лишь наиболее вероятному значению α_{opt} , выборочная плотность распределения $W(\alpha_{\text{opt}})$ которого показана на фиг. 2, имея в виду, что $\alpha_{\text{opt}} = \{\alpha_{\text{opt}}\}$.

При моделировании здесь и далее были заданы следующие параметры модели канала: 2 луча, интервал между лучами 2 мс, замирания каждого луча по закону Релея, используемая полоса частот 0.3–3.4 кГц. Объем выборки составлял $L = 20\,000$ экспериментов при длине последовательностей $N = 15$. Последовательность b_m представляет собой вектор длиной N , состоящий из “0” и “1” с равномерным законом распределения. Также при моделировании предполагалось допущение (3.2).

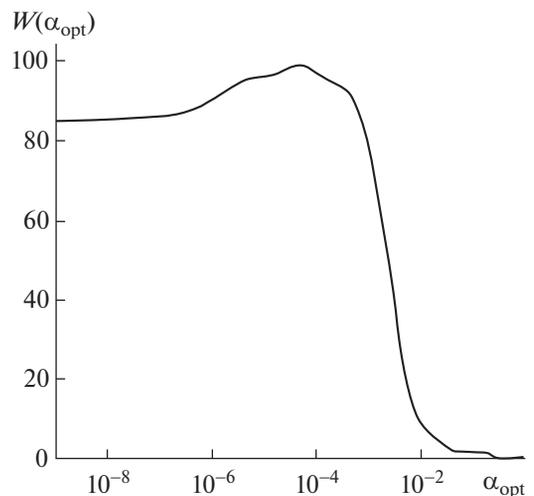
Проведем численное моделирование предложенного способа выбора параметра регуляризации. На фиг. 3а, б приведены характерные зависимости $q(\alpha)$, $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$, $R(\alpha)$. Для наглядности значения $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$ и $R(\alpha)$ были нормированы к одному масштабу.

Как видно из фиг. 3, зависимость $\hat{\sigma}_{\Psi}^2(\alpha)$ имеет несколько локальных минимумов, причем неудачный выбор может привести к значительному росту количества ошибок. Функционал $R(\alpha)$ имеет один явный максимум, а благодаря весовым коэффициентам “отфильтровывает” слишком большие значения α .

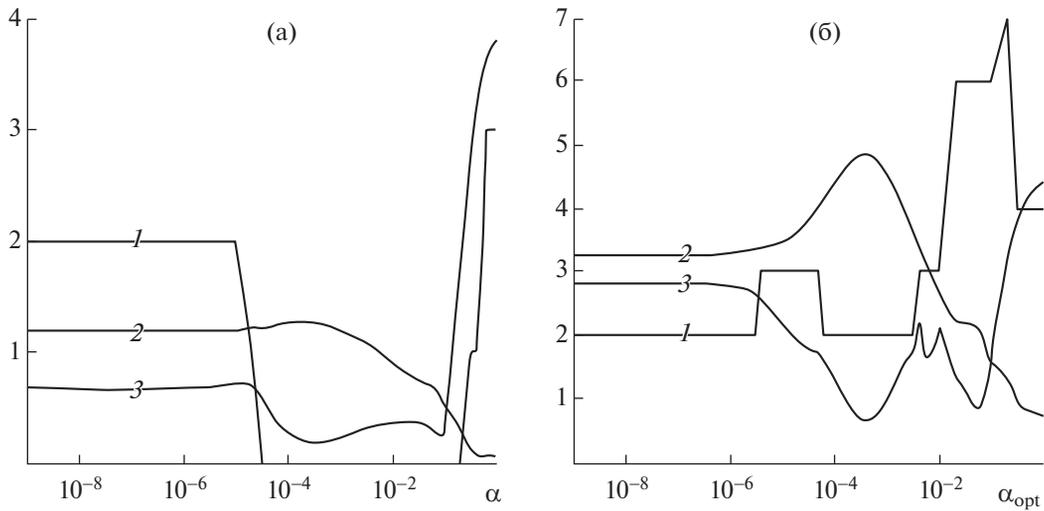
На фиг. 4 приведены зависимости коэффициента ошибок \hat{P} от ОСШ при значении параметра регуляризации $\alpha_{\text{opt}}^0 \in \{\alpha_{\text{opt}}\}$, полученном при моделировании с учетом знания $K_m(t)$ и b_m , а также



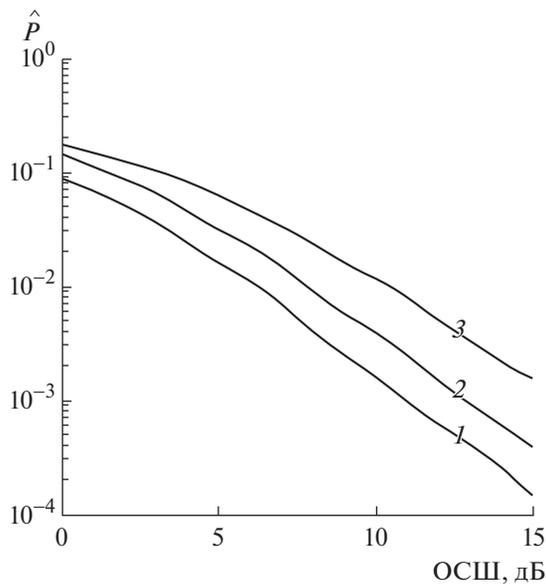
Фиг. 1. Зависимость $\hat{P}(\alpha)$ при ОСШ 7 дБ.



Фиг. 2. Плотность распределения α_{opt} .



Фиг. 3. Характерный вид зависимостей (при ОСШ 7 дБ): 1 – количество ошибок $q(\alpha)$; 2 – функционал $R(\alpha)$; 3 – оценка дисперсии фаз $\hat{\sigma}_\psi^2(\alpha)$.



Фиг. 4. Зависимости \hat{P} от ОСШ: 1 – при $\alpha_{\text{opt}}^0 \in \{\alpha_{\text{opt}}\}$; 2 – при α_{opt} , соответствующее $\max R(\alpha)$; 3 – при α_{opt} , соответствующее $\min \hat{\sigma}_\psi^2(\alpha)$.

при значениях параметра регуляризации, найденных путем нахождения минимума оценки дисперсии фаз $\hat{\sigma}_\psi^2(\alpha)$ и максимума функционала (3.16).

Из полученных зависимостей для коэффициента ошибки \hat{P} видно, что определение α_{opt} путем поиска минимума дисперсии фазы приводит к большему коэффициенту ошибок, чем для α_{opt} , соответствующему $\max R(\alpha)$. Введение весовых коэффициентов позволило избавиться от ряда ложных локальных минимумов при оценке дисперсии фазы, в результате чего коэффициент ошибок для α_{opt} , соответствующий $\max R(\alpha)$ (кривая 2), приближается к кривой 1, являющейся нижней границей для коэффициента ошибок.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведен новый способ выбора параметра регуляризации при решении интегрального уравнения типа свертки в задачах адаптивной фильтрации, основанный на минимизации уклонения фазовых значений. В связи с тем, что точность оценки дисперсии фазы на практике невысока из-за малости анализируемой выборки, был введен функционал (3.16), содержащий весовые коэффициенты и являющийся взвешенной оценкой уклонения фазовых значений. Это позволило ограничить диапазон, в котором ищется оптимальное значение параметра регуляризации. Также принципиально, что предложенный способ не требует знания какой-либо априорной информации.

Кроме того, в задачах адаптивной фильтрации для решения уравнений (2.1), (2.2) часто применяют, например, такие методы, как метод наименьших квадратов (алгоритм LMS) или рекурсивный метод наименьших квадратов (алгоритм RLS), а также различные их модификации [17], [18]. В этих методах, как и в регуляризации Тихонова, также используются некоторые параметры, влияющие на устойчивость и точность получаемого решения (параметр регуляризации, размер шага сходимости, пороговое значение и др.). Предложенный в работе способ может быть также применен при решении поставленной задачи этими алгоритмами для выбора оптимального значения соответствующего параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
3. Сизиков В.С. О способах невязки при решении некорректных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 9. С. 1294–1312.
4. Леонов А.С. Псевдооптимальный выбор параметра в методе регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 7. С. 1034–1049.
5. Wang Y., Xiao T. Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems // Inverse Problems. 2001. № 17. P. 281–291.
6. Cheng J., Yamamoto M. One new strategy a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization // Inverse Problems. 2000. № 16. P. 31–38.
7. Kunisch K., Zou Jun. Iterative choice of regularization parameters in linear inverse problems // Inverse Problems. 1998. № 14. P. 1247–1264.
8. Колос И.В., Колос М.В. Методы выбора параметра регуляризации при решении одной задачи линейной оптимальной фильтрации // Выч. мет. Программирование. 2009. Т. 10. Вып. 4. С. 377–384.
9. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007.
10. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
11. Watteson C.C., Juroshek J.R., Bensema W.D. Experimental Confirmation of an HF Channel Model // IEEE Transactions on Communication Technology. 1970. V. COM-18. № 6. P. 792–803.
12. Маслаков М.Л. Применение двухпараметрических стабилизирующих функций при решении интегрального уравнения типа свертки методом регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 541–549.
13. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.
14. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Наука, 1978.
15. Левин Б.Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М.: Советское радио, 1960.
16. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
17. Sayed A.H. Adaptive filters. New Jersey: Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2008.
18. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013.