

ПАМЯТИ ВЕЛИКИХ МАТЕМАТИКОВ

Диониджи ГАЛЛЕТТО^{1,2}

(Падуя, ИТАЛИЯ)

ТУЛЛИО ЛЕВИ-ЧИВИТА

(1873–1941)

DOI: 10.1134/S0044466919150018



Туллио Леви-Чивита родился в Падуе 29 марта 1873 г. в доме на улице Даниэле Манин (в настоящее время дом № 7) в семье, которая искренне и глубоко сочувствовала борьбе за независимость Италии. Это была семья подлинных демократических настроений, и ее чувства вдохновляли Леви-Чивиту в течение всей жизни.

Семья была родом из Ровиго и переехала в Падую. Еще были живы в памяти репрессии австрийских властей по отношению к участникам студенческих волнений 1848 г. Отец после 1859 г. был отправлен для продолжения учебы в Пьемонт. Ему было только семнадцать, когда он принял участие на стороне Гарибальди в сражении при Аспромонте, а потом вместе с гарибальдийскими добровольцами участвовал в кампании 1866 г. В Падую он вернулся после присоединения региона Венето к Италии и стремительно достиг широкой известности как адвокат и юрист. Мэр города с 1904 по 1910 г., сенатор королевства с 1908 г., он, в частности, добился, чтобы церковь Капелла Скровеньи отошла в ведение городского муниципалитета [небольшая церковь в Падуе, известная проторенессансными фресковыми росписями самого известного в начале XIV века итальянского художника Джотто, была спасена от разрушения реставрацией на средства муни-

¹ *Galletto D.* Tullio Levi-Civita. *Annuario dell'Universita di Padova per l' anno academico 1973-74.* Перевод с итальянского А.С. Сумбатова.

² Статья написана в 1973 г. к 100-летней годовщине великого ученого. Автор статьи, проф. Галлетто (1932–2011) – математик, механик, историк науки. Известен своими работами по динамике твердого тела, линейной и нелинейной теории упругости, космологии. Признан как один из основоположников экстрагалактической небесной механики. Член Академий Турина, Линчей, Модены, Ломбардо, Неаполя, республики Сербия.

ципалитета – А.С.]. Облик Джакомо Леви-Чивиты увековечен мраморным бюстом в одном из садов, окружающих церковь.

Ранний талант Туллио Леви-Чивиты проявился еще в подростковом возрасте. Его предрасположенность к математике была настолько явной, что отец, верный либеральным принципам, которые вдохновляли его ум и легли в основу его отцовских обязанностей, не стал настаивать, чтобы сын продолжил его дело.

В Падуанском университете Туллио Леви-Чивита завершил свою учебу. Его учителями были Джузеппе Веронезе, Франческо д'Аркайс, Энрико Падова и Грегорио Риччи-Курбастро. В Университете он был обеспечен основательной индивидуальной подготовкой, которая охватывала всю совокупность фундаментальных учений: с Аркайсом совершенствовал свои знания по анализу в соответствии с духом и уровнем строгости этой ветви математики, полученные от великого Улисса Дини, чьим учеником был д'Аркайс; с Энрико Падова завершил свою подготовку по дисциплинам механики, которая была непосредственно связана с трудами Энрико Бетти и Эуженио Бельтрами; живое преподавание Джузеппе Веронезе и общение с учителем способствовали развитию и совершенствованию геометрического видения, которое всегда было присуще Леви-Чивите, и в сочетании с исключительной интуицией, пусть и спустя несколько десятилетий, помогло достичь высоких вершин в геометрии. Однако в первую очередь наибольшее влияние на его мышление оказали учеба у Риччи-Курбастро и его труды.

Научная деятельность Леви-Чивиты началась в годы, когда он был еще студентом. Проявив кругозор и навыки, можно сказать, зрелого исследователя, он занялся аналитическим обоснованием неархимедовой геометрии, которое привело его в совсем другую область знаний. В дипломной работе “Об абсолютных инвариантах” он уже показывает безупречное владение методом, разработанным Риччи-Курбастро, и полное понимание глубоких и непростых исследований Софуса Ли.

После окончания университета в 1894 г. Леви-Чивита на несколько месяцев приехал в Болонью в школу Чезаре Арцела, Сальваторе Пинкерле и Федерико Энрикеса. В ней с помощью систематического изучения групповых операций над функциями приходит к характеристике обыкновенных дифференциальных уравнений, приводимых к линейному виду, а также находит общий метод решения определенного типа интегральных уравнений, имеющих непосредственное отношение к одной интересной проблеме электростатики. В то же время, как бы подтверждая свою удивительную разносторонность, он привел достаточно много доказательств, которые завершили значительные исследования по теории чисел в вопросе получения аналитического выражения количества простых чисел, содержащихся в заданном интервале.

В следующем году, в Павии, в качестве профессора Высшей Нормальной школы он прикреплен к факультету естественных наук этого университета. В конце 1897 г., в возрасте моложе 25 лет, вернулся в Падую и в этом университете, где три года назад был студентом, он возглавил кафедру рациональной механики.

В те годы Риччи-Курбастро после долгих размышлений и вынашивания идей пришел к выводу, что следует модифицировать технику и результаты обычного дифференциального исчисления так, чтобы они были справедливы в форме, которая не зависит от выбранной системы координат. Другими словами, наступило время нового метода исчисления, который действует на объекты, имеющие внутреннюю (“абсолютную”) природу, т.е. не зависящую от выбора системы отсчета, и приводит к результатам, обладающим таким же свойством.

Этот новый метод исчисления, который позже был назван “тензорным исчислением”, и в течение некоторого времени назывался “исчислением Риччи” как дань его создателю, этот метод первоначально был встречен равнодушно, если не с сомнением, почти всеми математиками того времени. Прославленный Эудженио Бельтрами, профессор математической физики из Павии, отрицательно отозвался об исследовании Риччи-Курбастро, выдвинутом на главную премию по математике за 1887 г., и осторожно написал: “[...] *кажется, что труды проф. Риччи скорее некоторая сумма последних результатов, имеющих заверченный вид и предназначенных к непосредственному использованию, они представляют собой мощные вычислительные средства подготовительного характера, которые ведут к достойной цели, в частности, ждут своего окончательного обоснования для дальнейшего использования; в итоге, возможно, весьма сложный аналитический аппарат может быть окончательно заменен более простыми работоспособными алгоритмами*”.

Позиция уважаемого Луиджи Бьянки, профессора геометрии в Пизе, относительно присуждения премии по математике за 1901 г. Риччи-Курбастро, которому в ней было еще раз отказано, оказалась даже враждебной: “*Чтобы заслужить награду, необходимо, по крайней мере, иметь одну работу, которая представляет по-настоящему исключительную ценность такую, что она сама по себе есть неоспоримое и заслуживающее доверия достижение в любой отрасли науки*”. Бьянки писал: “*Алгоритмы, разработанные им [...], конечно, могут оказаться полезными, хотя и не нужными*

в изучении различных математических вопросов; и мы находим тому свидетельства в исследованиях немногих последователей Риччи”.

В отношении исчисления Риччи ожидалось “окончательное обоснование для дальнейшего использования”. В 1896 г. Леви-Чивита, проводя фундаментальные исследования по преобразованию динамических уравнений, использовал абсолютное дифференциальное исчисление, которое Риччи-Курбастро применял исключительно к вопросам дифференциальной геометрии. Применительно к этим проблемам были признаны неэффективными классические инструменты исследования и тщетные попытки их решить математиками такого ранга, как Аппель и Пенлеве.

Спустя три года, Леви-Чивита представляет другое, еще более важное доказательство плодотворности исчисления Риччи в решении проблемы отыскания всех потенциалов пространства, которые можно сделать зависящими только от двух координат, проблему, которую даже Риман и Вольтерра не решили полностью. Во введении к мемуару, посвященному этой проблеме, Леви-Чивита писал: “*Прямое исследование [...] было бы слишком трудно провести другим методом в связи с быстрым появлением сложных формул. Поэтому я обратился к методам проф. Риччи, которые с завидной легкостью подходят для самых разнообразных вопросов, обнажая внутреннюю природу и удаляя каждое несущественное препятствие*”.

В 1901 г. Леви-Чивита вместе с Риччи-Курбастро написали большой труд “Методы абсолютного дифференциального исчисления и его приложения”, который появился в “*Mathematische Annalen*” и стал важной вехой в истории науки. В нем исчисление Риччи освобождено от “примитивного и очень сложного аналитического аппарата”, в чем упрекал Бельтрами, и, в соответствии с пожеланием последнего, “окончательно заменено наиболее простыми работоспособными алгоритмами”. Оно обрело элегантный вид систематизированного на геометрической основе вычислительного инструмента, который обладает большими прикладными возможностями в математическом анализе, дифференциальной геометрии, аналитической механике, во всей математической физике.

Несмотря на этот труд и предшествующие результаты Леви-Чивиты, суровое суждение, как уже отмечалось, было направлено Риччи-Курбастро и его “несколькими последователями” от Луджи Бьянки. Последний в 1902 г. открыл фундаментальное тождество, названное его именем. Тождество теряет внешнюю искусственность и приобретает точный аналитический, а также и геометрический смысл, если и только если рассматривать его в свете исчисления Риччи. Подобное наблюдение можно повторить и для многих других работ этого выдающегося математика.

Потребовалось пятнадцать лет, пока общая теория относительности не представила “окончательное обоснование” абсолютному дифференциальному исчислению. В 1915 г. Альберт Эйнштейн во введении к первому сообщению о своей великой теории писал: “*Вряд ли устоит перед очарованием этой теории тот, кто полностью понял: она настоящий триумф абсолютного дифференциального исчисления*”. В следующем году, в предисловии к известной работе, в которой основы новой теории широко изложены, он добавляет: “*Средства математики, необходимые для общей теории относительности, были готовы в “абсолютном дифференциальном исчислении”, которое [...] возведено в систему трудами Риччи и Леви-Чивиты*”. И 4 апреля 1955 г., через четырнадцать дней после кончины Эйнштейна, в его последнем труде было опубликовано: “*Общезвестно, что теория Римана непрерывной метрики была почти забыта в конце прошлого века и получила новую жизнь благодаря углубленному изучению Риччи и Леви-Чивиты. Их исследование определенно дало возможность сформулировать общую теорию относительности*”.

И он продолжает: “*Наиболее важный вклад Леви-Чивиты, как мне кажется, заключается в следующем теоретическом открытии: существенный результат общей теории относительности, а именно, преодоление “жесткого” пространства, то есть инерциальной системы, связано только косвенно с введением римановой метрики. Непосредственным существенным концептуальным элементом является “поле смещений” (Γ_{ik}^l), которое позволяет нам выразить бесконечно малое смещение вектора. Оно точно заменяет пространственный параллелизм отдельных векторов [...] с помощью операции над бесконечно малыми. Это делает возможным применение тензорного исчисления, и, следовательно, становится излишним введение “жесткого” пространства [...]. Столкнувшись с этим результатом, в некотором смысле второстепенной важности, представляется, что конкретное поле Γ можно вывести из существования римановой метрики*”.

Это прямая ссылка на высшее достижение научного труда Туллио Леви-Чивиты — мемуар “*Понятие параллелизма на произвольном многообразии с последующим геометрическим уточнением римановой кривизны*”, опубликованный в 1917 г. в “Трудах математического кружка Палермо”. Он вошел в абсолютное дифференциальное исчисление, получил завершенное геометрическое истолкование и породил целый ряд работ выдающихся математиков и физиков таких, как Гер-

ман Вейль, Эли Картан, Освальд Веблен, Лютер Эйзенхарт, Артур Эддингтон и др., которые способствовали не только развитию геометрии, но и дали знания, раздвинувшие новые, неожиданные и очень широкие горизонты.

Но абсолютное исчисление не исчерпывает всего научного творчества Туллио Леви-Чивиты. Работа в этом направлении составляет лишь один аспект его огромного наследия, начиная с самых разнородных областей чистой математики, переходя далее ко всем областям классической и современной математической физики и заканчивая некоторыми типичными разделами теоретической физики и техники.

“Родился математик в полном смысле этого слова, — сказал Уго Амальди на посвященном Т. Леви-Чивите памятном заседании Национальной Академии Линчей 16 ноября 1946 г., — который легко ориентировался в разных областях ... и везде работал над решением точных и важных проблем, отличающихся уникальностью. Наделенный верной и очень острой логической силой, в которой, казалось, проявляется юридический ум отца, руководствуясь широким историческим видением эволюции математических концепций и методов, взятых непосредственно из классических источников, он подвергал каждую проблему глубокому и тщательному предварительному анализу, направленному на выявление тупиковых логических элементов. Разделив трудности, он окончательно преодолевал их одну за другой, применяя при своем совершенном владении анализом более простые и лучшие адаптированные к новым условиям в сопутствующих исследованиях. Благодаря своей концептуальной технике схематизации задач, он смог придать своему изложению глубину, ясность, алгоритмическую элегантность и выделить в ряду внешне далеких проблем неожиданные приближения, скрытые связи и нередко точные внутренние отношения абстрактной эквивалентности”.

Исследования движений твердого тела вокруг неподвижной точки, движений систем с тремя степенями свободы, движений материальных точек, подверженных сопротивлению, пропорциональному их скоростям, возвращает нас в ту эпоху, когда он работал над знаменитым мемуаром *“О преобразованиях уравнений динамики”*. В нем были охарактеризованы все не подверженные действию сил динамические системы, которые, вне зависимости от закона движения во времени, допускают одни и те же траектории в конфигурационном пространстве.

Последующие две заметки опубликованы в *“Comptes Rendus”* Парижской академии наук. Первую из них следует рассматривать как завершение одной работы Пенлеве, в то время как вторая, в которой определяется более широкий класс живых сил, для которого уравнения геодезических допускают квадратичный интеграл и при этом живые силы и не сводятся к форме Штекеля или Пенлеве, является решением проблемы, неявно поставленной Аппелем несколько месяцев назад с замечанием, что примеров таких типов живых сил известно не было.

Затем блестящий дебют Леви-Чивиты в области электромагнетизма проявился в мемуаре *“О приводимости электродинамических уравнений Гельмгольца к герцевой форме”*, в которой показано, что электродинамическая теория Гельмгольца приводит к уравнениям Максвелла-Герца, если допустить, что дальное действие распространяется со скоростью света. И в этом отношении, возможно, следует заметить, что если бы, несмотря на свой юный возраст, Леви-Чивита завершил свое исследование, сосредоточив внимание на постоянстве скорости распространения дального действия с использованием своих глубоких знаний в теории групп, механике и математической физике, с одной стороны, и результатов опыта Майкельсона и его объяснений Фицджеральдом и Лоренцем, с другой, то это привело бы к критическому осмыслению знаний, накопленных к тому моменту в области электромагнетизма, с возможностью, пусть и отдаленной, приблизить то время, когда появились мемуар Пуанкаре *“О динамике электрона”* и мемуар *“Об электродинамике движущихся тел”*, который представляет формулировку Эйнштейном специальной теории относительности. Весьма значимым является введение в мемуаре Леви-Чивиты: *“Я ограничился здесь рассмотрением электромагнитных воздействий в неопределенной среде, которая, как правило, однородна, изотропна и покоится, поскольку в таком случае расхождение между классической электродинамикой и герцевой можно понять без каких-либо затруднений и на этом пути добиться их полного согласования. В случае, например, движущейся среды будет достаточно ... записать уравнения Гельмгольца в общих координатах. Но об этом, вероятно, в другой раз. Затем я должен перейти к деталям, составляющим прелюдию к рассмотрению электромагнитного поля в общем случае, после чего можно было бы исследовать (ссылаясь на принцип сохранения энергии) закон действия пондеромоторных сил. На данный момент представляется удобным исключить любые осложнения ...”.*

К сожалению, это исследование не было продолжено. В отличие от общей теории относительности, напротив, представления в специальной теории относительности, по сути, у него сформировались до такой степени, что еще в 1911 г. на конференции *“Распространение и эволюция математической физики за последние пятьдесят лет”*, которую он провел на встрече Итальянского общества прогресса науки, намекая на теорию Эйнштейна, он сказал: *“Мы ждем, чтобы судить”*.

С другой стороны, как заметил Уго Амальди, *“в направлениях исследований, по которым двигался Леви-Чивита, он открывал пути решения и добивался результатов фундаментального характера, обычно не любил настаивать на своих интересах ... и, повинувшись своей универсальности, приносил свой пронизательный дух в новые проблемы”* с удивительным многообразием инициатив.

Вероятно, уже тогда его ум был занят более чем столетней проблемой — проблемой трех тел.

Исследования одного класса интегралов волнового уравнения в плоском случае, об устойчивости равновесия в системах с полными связями, о трансфинитных числах (исследование, связанное с его первой работой), об интегрировании бигармонического уравнения, о конгруэнции кривых предшествовали появлению мемуара *“Типы потенциалов, которые могут зависеть только от двух координат”*. Затем появились исследования о периодических интегралах линейных уравнений с частными производными первого порядка, предложена групповая интерпретация интегралов канонической системы, проведено исследование геометрической оптики и ее связей с гармоническими функциями и контактными преобразованиями. Все это происходило в то время, когда завершалась работа над мемуаром *“Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения”*.

В 1901 г. появилась фундаментальная работа *“О некоторых критериях неустойчивости”*. Исследования устойчивости отдельных движений, впервые систематически проведенные Лагранжем, возобновленные Дирихле, а затем углубленные Пуанкаре и Ляпуновым с распространением на общий случай решений систем дифференциальных уравнений, хотя и подтвердили справедливость критериев неустойчивости с помощью метода малых колебаний, вместе с тем доказали недостаточность обычного критерия устойчивости, побудив Пуанкаре сделать вывод, что *“неустойчивость — это правило, устойчивость только исключение”*. Тем не менее *“соображения по математической аналогии (основанные, в частности, на обстоятельствах, указанных самим g -ном Пуанкаре для нормальных дифференциальных систем первого порядка, когда правые части зависят от времени)”* подсказывают, что *“в задачах небесной механики устойчивость носит менее исключительный характер, чем в абстрактном случае”*.

Придумав новый общий метод для распознавания свойства устойчивости или неустойчивости каждого решения дифференциальной системы, с помощью которого получается новое и особенно простое доказательство фундаментальной теоремы Ляпунова, Леви-Чивита демонстрирует необоснованность указанных предварительных выводов и применением своего метода к ранее рассмотренным случаям ему удается *“установить неустойчивость некоторых категорий периодических решений, которые в первом приближении кажутся устойчивыми”*. Как написано во введении, *“метод, в свою очередь, применяется в ограниченной задаче трех тел. Я мог бы таким образом доказать, что периодические решения, близкие к равномерным круговым движениям, неустойчивы. Честно говоря, доказательство не охватывает полностью рассматриваемые периодические решения, но, что следует из него бесспорно, так это то, что в плоскости трех тел существуют бесконечные зоны неустойчивости”*. И он добавляет: *“Также важно, что это сделано для того, чтобы установить неустойчивость в одном случае, в котором с астрономической точки зрения утверждается противоположное”*.

Одновременно с этим мемуаром появляется серия академических заметок, в которой раскрывается замечательная процедура, обобщающая метод игнорирования координат и позволяющая найти семейства решений для канонических систем, которые допускают взаимно инволютивные первые интегралы или инвариантные соотношения (процедура, которая впоследствии будет распространена на общий случай нормальных дифференциальных систем). С помощью этого метода создана общая теория стационарных решений, которая позволяет открывать не только все известные случаи, такие как периодические решения, обнаруженные Лагранжем в задаче трех тел, но и находить новые, такие как совокупность стационарных движений твердого тела с неподвижной точкой в случае Ковалевской.

Теоретическим исследованиям о сопротивлении жидких сред, о модификации возмущающей функции, используемой в небесной механике, о максимуме удельной работы деформации динамических упругих систем предшествует возврат к группе экспериментальных работ по изучению явлений электромагнетизма разными физиками, в том числе, Аугусто Риги, с критическими суждениями в отношении достигнутого в них прогресса: эксперименты, касающиеся электромагнитного поля, генерируемого равномерным переносом электрического заряда, параллельным некоторому проводящему экрану, результаты которых *“послужили проф. Риги для интуитивных количественных вычислений, названные им вероятными и которым следует полностью доверять”*, и эксперименты о влиянии аналогичного экрана на электромагнитное поле, генерируемого параллельным ему переменным током.

Современными в этих работах Леви-Чивиты являются анализ определения реакций связей в материальных системах, доказательство, что некоторые поверхности, рассмотренные Зарембой,

не могут быть только квадратами, конусами или цилиндрами, и основное упрощение некоторых вычетов, данных Борелем, которые относятся к функциям бесконечного рода.

Тем временем, как это уже было заметно в мемуаре *“О некоторых критериях неустойчивости”*, его внимание было обращено к проблеме трех тел – проблеме, о которой он будет размышлять более пятнадцати лет и к которой он вернется со ссылкой на релятивистский случай в последние годы своей жизни.

Первый из его мемуаров, опубликованный в 1903 г. и целиком посвященный этой проблеме, соприкоснулся с выдающимися математиками прошлого – Клеро, Даламбером, Эйлером, Лагранжем, Пуассоном, Гауссом, Гамильтоном, Якоби, Лаврье, Лиувиллем, Ли, а в последнее время – Пенлеве, Пуанкаре и Миттаг-Леффлером. В нем для случая ограниченной задачи Леви-Чивита определяет начальные условия, при которых происходит столкновение тела пренебрежимо малой массы с одной из двух конечных масс, проверяет гипотезу, сформулированную Пенлеве, о том, что наличие одного единственного однородного скалярного соотношения между положением и скоростью тела характеризует столкновение. Он конструирует это соотношение на самом деле и устанавливает условия, при которых особые траектории одного из двух тел конечной массы являются замкнутыми.

В следующем мемуаре 1906 г., отказавшись от упрощения представлять тела точками (*“На самом деле небесные тела не являются материальными точками”*, – пишет Леви-Чивита), он решает в ограниченной проблеме задачу определения качественно начальных условий, при выполнении которых можно быть уверенным, что движение будет регулярным в том смысле, что взаимные расстояния между телами будут оставаться с течением времени такими, чтобы столкновения были исключены. В то же время с помощью неэлементарного преобразования, сохраняющего каноническую форму уравнений, он анализирует особенность, которая возникает в дифференциальной системе при столкновении. Другими словами, он приходит к так называемой проблеме регуляризации в ограниченной задаче.

В 1912 г. Сундман в общем случае приходит к регуляризации, сделав *“вывод яркий с аналитической точки зрения, что каждое решение (независимо от исходных данных) может быть представлено всегда сходящимися рядами. Однако, – замечает Леви-Чивита, – этот результат достигается только косвенно, за счет введения довольно большого числа дополнительных вспомогательных переменных с выходом за рамки уравнений динамики, что представляет весьма обременительное обстоятельство, так как делает невозможным применить теоретические результаты и численные методы аналитической механики к регуляризованной системе”*. И, обратившись к этой проблеме в 1915 г., Леви-Чивита сумел получить реальную динамическую регуляризацию задачи с помощью обобщения одного преобразования в ограниченной задаче, а в следующем году прийти к подлинной динамической регуляризации в общем случае. *“В пространственной постановке задача долго не поддавалась решению, – пишет он (и будет повторять это позже), – пока мне не удалось справиться с трудностями при помощи аналогичных преобразований координат. Даже обычные канонические преобразования, связанные с эллиптическим движением, не позволяли регуляризовать задачу, однако можно предположить очень похожее преобразование, связанное с параболическим движением, которое делает уравнения голоморфными в окрестности двойного столкновения”*.

Изучение особенности уравнений движения точки по шероховатой поверхности, изучение уравнения Кеплера, переформулировка одной задачи, связанной с конструкцией кабелей для передачи энергии как задачи электростатики (которую он затем подробно обсуждал и исследовал, пока не получил четкие конструктивные правила безопасности), изучение интегрируемости уравнения Гамильтона-Якоби методом разделения переменных, доказательство замечательной теоремы о характеристических многообразиях, связанных с условиями моногенности функций нескольких комплексных переменных, теоретические исследования феномена сжатия струй жидкости, проникновения снарядов в жидкие тела, анализ идей Энрикеса о принципах механики – все это относится к периоду первых изысканий Леви-Чивиты в задаче трех тел и предшествует его трактату 1907 г. *“Об электромагнитной массе”*, все это дает первое представление об его обширных интересах в области теоретической физики.

Именно, начиная с этого периода, его мемуар *“Волновые следы и законы сопротивления”* четко обозначил свое место в области гидродинамики. Парадокс Даламбера, который проявляется при равномерном поступательном движении твердого тела в идеальной жидкости, был устранен Гельмгольцем и Стоксом путем отказа от гипотезы о безусловной непрерывности индуцированного движения жидкости и заменой ее гипотезой о том, что тело увлекает за собой некоторую массу жидкости. Изучение этих разрывных движений и проблемы возникновения сопротивления, которое представляет большие аналитические трудности, ранее предпринималось Гельмгольцем, Бобылевым, Лявом и др. в очень частных случаях подвижных профилей, составленных из отрезков прямых линий. Их результаты зависят от рассмотренных случаев и не дают правил для изучения новых случаев, таких как общий случай криволинейного профиля. В вышеупомя-

нумом мемуаре Леви-Чивита касается рассмотрения проблемы в горизонтальной плоскости (он замечает: “*Ясно, что в случае движения корабля в неподвижной воде движение ... разумно изучать в горизонтальных плоскостях*”). Задача состоит в нахождении всех безвихревых движений вместе со следом независимо от формы профиля, вызывающего их, и нахождении формулы для соответствующего сопротивления. И сразу же, применяя метод, с помощью которого он достиг поставленных целей, Леви-Чивита для случая вертикальной плоскости закладывает основы строгой теории волн в канале с особым вниманием к постоянным задачи.

Затем были исследования некоторых типов решений уравнений Максвелла, сил ньютоновского притяжения в окрестности материальной линии и тонкой трубки (результаты, которые он впоследствии применил к изучению формы и природы колец Сатурна и, среди прочего, пришел “*к дополнительному аргументу в пользу гипотезы, что кольцо не является непрерывным и даже не похоже на непрерывное, а образуется в результате достаточно разреженного скопления метеоритов*”). Леви-Чивита изучал катодные лучи и излучение в целом, проанализировал некоторую функциональную связь, открытую Дини, с результатами, которые позволяют в полной мере оценить методы, развитые Рэлеем при изучении уединенной волны, и которые позволяют построить полную теорию волн в канале. Леви-Чивита провел широкий сравнительный анализ свойств этих волн, исследовал линейные уравнения с периодическими коэффициентами и приложил результаты к изучению движения Луны, интересовался равновесием материальных систем, расширением аналитических функций, ввел новую каноническую систему эллиптических элементов, которая позднее окажется удобной в задачах астрономии. Он изучал преобразование линейных уравнений с частными производными второго порядка, описал функции, допускающие формулу сложения, как в тригонометрии, исследовал стартовые усилия и буксировку транспортных средств, дал строгий вывод соотношения, предложенного Планком, которое является фундаментальным в теории теплового излучения, сформулировал основы этой теории для нестационарного режима и получил соответствующее неопределенное уравнение, исследовал отношения взаимности, обнаруженные в те годы в оптике. Эти исследования предшествовали появлению заключительных мемуаров Леви-Чивиты по проблеме регуляризации в задаче трех тел.

В 1917 г., сразу после опубликования мемуара “*Понятие параллелизма на произвольном многообразии*”, появляются его первые математически строгие работы, посвященные общей теории относительности. В первой из них, заметив, что тождество Бьянки “*дает правильный критерий для введения так называемого гравитационного тензора*”, Леви-Чивита добавляет, что определение, предложенное Эйнштейном, “*не может считаться окончательным*”, потому что “*с математической точки зрения и в соответствии с характером общей теории относительности такое определение обязано быть инвариантным*” и “*что еще более серьезно ... оно ведет к явно неприемлемому физическому следствию*”. Леви-Чивита заключает: “*Все есть следствие неправильной формы, выбранной для гравитационного тензора. Мы увидим, что с нашим определением исчезает всякая возможность парадокса*”. Далее в одиннадцати работах он провел обширные исследования по эйнштейновской статике и, среди прочего, привел уравнение “*к той пространственно-инвариантной форме, которая соответствует статическому случаю*”. Он нашел решения в ряде значимых случаев, в частности, вывел аксиально-симметричное решение Вейля, которое до этого было получено некорректно. И далее Леви-Чивита доказывает, что для каждой стационарной метрики фундаментальный постулат релятивистской оптики эквивалентен принципу Ферма.

В 1921 г. он продолжил свои предыдущие исследования по гидродинамической теории волн в каналах, а в 1924 г. дал строгое определение безвихревых периодических волн, сохраняющих свою форму при распространении в глубоких каналах, уточнил их профиль и соотношение, которое связывает высоту и длину волны с переносом жидкости и скоростью распространения. Так он завершил свои исследования перед тем, как написать в своем трактате по гидродинамике об авторитете Лэмба и “*исторической полемике*”, в которой участвовали Эйри, Стокс и Релей со своими нестрогими рассуждениями, которые делали “*правомерность процедуры решения весьма сомнительной с точки зрения сходимости*”. Леви-Чивита стремился побудить Релея выразить “*пожелание, чтобы вопрос о существовании решения был поднят раз и навсегда со строгим доказательством*”.

Затем появились исследование возможности обобщения тензорного исчисления и совместное с У. Амальди определение условий, при которых остаются независимыми аргументы в выражении гамильтониана произвольного действия. Леви-Чивита изучал одномерное гравитационное движение космической пыли (с распространением на трехмерный случай), проанализировал результаты О.М. Корбино по эффекту Доплера при распространении света, исследовал во втором приближении релятивистские движения частицы (исследование, которое будет успешно завершено), получив результаты, которые затем были применены к изучению релятивистского движения планет вокруг Солнца. Он написал фундаментальный труд об отклонении геодезических на римановом многообразии, посвятил большое исследование 1927 г. общей теории адиа-

батических инвариантов, введенной Эренфестом для обоснования квантовых постулатов Бора и Зоммерфельда, теории, которая до того момента рассматривалась весьма узко, а Леви-Чивита проиллюстрировал ее сферу применения в приложениях небесной механики.

Кроме того, он получил оценку максимальной удельной деформации в динамическом случае упругих сред с применением к случаю опорных балок и мостов, осуществил исследование движений тел переменной массы, предложил типично геометрическое строгое истолкование унитарной теории, предложенной в те годы Эйнштейном, провел исследования по трехмерному аналогу теории пограничного слоя Прандтля. Леви-Чивита изучал предложенную в соавторстве с Г. Фубини теорию кривых, аналогичных кругам соприкосновения третьего порядка. Он применил общую теорию характеристик уравнений тяготения для доказательства, что их характеристики совпадают с геодезическими нулевой длины пространства-времени — результат, который обеспечивает прямую связь между вышеупомянутыми уравнениями и геометрической оптикой независимо от любой теории электромагнетизма.

В это время появилась небольшая уникальная книга Леви-Чивиты *“Характеристики дифференциальных систем и распространение волн”*, представляющая собой замечательный синтез волновых явлений с особенно интересными и убедительными соображениями, которые связаны с проявлением дуализма волн и корпускул. Соображениями, которые несколько лет спустя прозвучат на великолепной конференции *“Некоторые математические аспекты новой механики”*, состоявшейся в Чикаго в 1933 г., на совместном заседании Американского математического общества и Американской ассоциации содействия развитию науки, и которые полностью раскрывают, какими обширными были его интересы, насколько глубокими и полными были его знания о самых последних достижениях и событиях теоретической физики.

Затем у Леви-Чивиты появились работы по распространению теории максвелловских распределений на систему корпускул (космическую пыль), в которой рассматриваются не только скорости, но и массы частиц, с использованием результатов, полученных для метеоритов, с которыми сталкивается планета во время своего движения. Он изучает ньютоновские потенциалы протяженных масс, доказывает существование ортобарической поверхности для каждого трехмерного тела с описанием характеристик, проводит исследования геометрической оптики в общей теории относительности, согласно которым *“ее свойства можно установить проще и обобщить, опираясь прежде всего на постулаты только геометрической оптики, а затем уже использовать дополнительные постулаты физической оптики”*. Он изучает теорию струй жидкости под большим давлением, проводит исследования маршрута самолета под влиянием ветра, описывает поверхности, которые допускают треугольную сеть параллельных линий, предпринимает попытку сгладить противоречия между квантовой механикой и относительностью, развивая направление Бляшке, закладывает основы дифференциальной геометрии троек конгруэнций с распространением тригонометрии на криволинейные треугольники, нанесенные на поверхность. Леви-Чивита исследует влияние морских приливов на движение планетных систем, определяет классы стационарных решений пфаффовых систем, открывает замечательное свойство сферы, связанное с понятием параллелизма.

В 1935 г. он занялся проблемой двух тел и, в более широком смысле n тел в общей теории относительности, проблемой, которой он в значительной степени посвятит оставшуюся часть своей жизни. Подвергнув проблему, как в случае двух тел, так и в общем случае, глубокому критическому анализу в релятивистских терминах, он в 1937 г. сделал для случая двух тел существенные выводы относительно вековых неравенств. К сожалению, математическая ошибка в расчетах ограничила правомерность результата, но не свела на нет всю мощь метода, который он ввел и использовал, метода более эффективного, чем метод 1938 г. у Эйнштейна, Инфельда и Хоффмана, метода, который проложил путь к релятивистской небесной механике. Систематическое изложение вопроса с последующими выводами и заключениями, к которому он пришел в общем случае, было опубликовано посмертно в 1950 г.

Исследования по эффективному вычислению периода решений дифференциальных уравнений определенного типа, по дифференциальной геометрии поверхностей, дальнейшие соображения по тригонометрии криволинейных треугольников и размышления о волновых явлениях, по сути, завершают научную работу Леви-Чивиты.

Вот тот краткий список его произведений, едва наметивший области науки, в которых он проявил свой талант и многогранную одаренность. Это был грандиозный хоровой диалог, длившийся полвека между ним и величайшими математиками и физиками девятнадцатого и первой половины двадцатого века от Гамильтона до Пуанкаре, Адамара, Вейля, Картана, от Максвелла до Планка, Эйнштейна, Шредингера и Дирака. И сегодня, спустя сто лет после его рождения, мы

можем сказать, что вследствие обширности затронутых тем, грандиозности и величия его трудов он был достойным продолжателем творчества своих великих предшественников — Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Гаусса, Гамильтона, Римана и, прежде всего, Пуанкаре.

В январе 1919 г. Леви-Чивита после некоторых колебаний покинул университет в Падуе и переехал работать в университет в Риме. В Риме, среди прочего, он написал ряд замечательных трактатов: помимо труда *“Характеристики дифференциальных систем и распространение волн”*, следует вспомнить сборник конференций *“Вопросы классической механики и релятивизма”*, знаменитые *“Лекции по абсолютному дифференциальному исчислению”*, переведенные на несколько языков, *“Основы релятивистской механики”* и, в первую очередь, трехтомный трактат *“Лекции по рациональной механике”*, написанный в соавторстве с близким другом Уго Амальди, трактат, который, хотя и является неполным по сравнению с первоначальным проектом, до сих пор остается непревзойденным по ясности, богатству содержания и элегантности изложения.

Бесчисленное множество наград было получено Леви-Чивитой как в Италии, так и за рубежом. Можно констатировать, что он был членом всех итальянских научных академий и всех самых известных зарубежных научных академий, таких как Академии Берлина, Москвы [с 1934 г. он иностранный почетный член АН СССР — А.С.], Парижа, Амстердама, Ленинграда [с 1904 г. он иностранный член-корреспондент Петербургской АН — А.С.], Геттингена, Эдинбурга, Галле, Бостона, Брюсселя, Мадрида, Лиссабона, Лунда, Дублина и Лондонского королевского общества. Среди многих других наград золотая медаль, присужденная в 1903 г. Академией XL [Итальянская национальная академия науки, основана в 1782 г. в Вероне — А.С.]; Королевская математическая премия Академии Линчей за 1907 г. вместе с Федерико Энрикесом; в 1922 г. *“Сильвестровская медаль”* Лондонского королевского общества, которой до этого момента награждались только англосаксонские математики, медаль присвоена за идею параллелизма; медаль *“dem Verdienste”* [“За заслуги и профессиональную квалификацию” — А.С.], врученная в 1928 г. Гамбургским университетом; специальная золотая медаль Университета Лимы в 1937 г.; степени *“honoris causa”*, присуждаемые ему университетами Парижа, Амстердама, Кембриджа, Массачусетса, Ла Пьяты, Тулузы, Лимы и Политехнического университета Аахена.

Сегодня можно повторить слова из решения комиссии, в которую вошли Вито Вольтерра, Луиджи Бьянки, Коррадо Сегре и которая удостоила Леви-Чивиту королевской премии по математике за 1907 г.: *“Он принадлежит к той категории ученых, кто намеренно развивает математику в самом высоком и широком смысле. Он не ограничил себя углублением узкой области исследований, а в своей молодой и блестящей карьере охватил многие важные отрасли анализа, механики, математической физики и геометрии, привнес в них свои работы или новые и оригинальные идеи, или неожиданные полезные применения уже известных методов.”*

Обширность его исследований не повредила их глубине, но произвела противоположный эффект; на самом деле, в своих работах он знал, как приблизиться к целям, к которым он стремился, применяя по-новому и плодотворно разные методы. Отсюда успех его исследований и тот факт, что он мог элегантно и без усилий достичь тех результатов, которые другим оказались не под силу. Знаменитая проблема трех тел обязана ему определением условий для соударений в особо важном типичном случае. Классификация потенциалов, зависящих от двух координат, получена в работе Леви-Чивиты. Он решал вопрос о преобразовании уравнений динамики в случае, когда силы отсутствуют, и установил, изучая разрывные движения жидкостей, законы образования волновых следов и сил сопротивления, которым подвержены твердые тела в жидкостях.

Каждая из этих работ является замечательным вкладом Леви-Чивиты в науку, и каждая из них, даже взятая отдельно, могла бы стать основанием для награды. Но и другие его работы не уступают по важности. В целом, поставив перед собой цель решить какой-нибудь научный или интересный технический вопрос, он показал свое мастерство в использовании современной математики”.

“И в нем, — заключает доклад Комиссия, — выдающиеся качества математика сочетаются с выдающимися, что встречается еще реже, качествами физика так, что задачи природы он в состоянии математически формализовать и применить для их решения мощные средства анализа”.

Описание внешнего вида Леви-Чивиты приведено в книге *“Альберт Эйнштейн”* Леопольда Инфельда, сотрудника Эйнштейна в Принстоне.

Инфельд только что приехал в Принстон и находится в кабинете Эйнштейна, обсуждая с ним научные вопросы: *“... кто-то постучал в дверь, прервав наш разговор. Худой маленький человек лет шестидесяти вошел с улыбкой, жестикулируя, извиняясь руками, не зная, на каком языке говорить. Это был Леви-Чивита, известный итальянский математик, в то время профессор в Риме, приглашенный в Принстон на шесть месяцев ... Леви-Чивита не словами, а жестами дал понять, что не хочет нас беспокоить, показывая на дверь, что он сейчас уйдет. И чтобы это подчеркнуть, нагнул*

свое маленькое тело в направлении двери. Настала моя очередь возразить: “Лучше я уйду и приду в другой раз”. Тогда возразил Эйнштейн: “Нет, мы можем поговорить все вместе. Я кратко повторю то, что я сказал”. ... Глядя на спокойного, задающего вопросы Эйнштейна и на маленького, худого, энергично жестикулирующего Леви-Чивиту, когда они указывали на формулы на доске и говорили на языке, который они считали английским, у меня в памяти сформировалась картина ... , наводящая на размышления сцена ... , которую я никогда не забуду”.

Подписавший манифест Кроче [“Манифест антифашистской интеллигенции” (1925 г.) итальянского философа и политика Бенедетто Кроче – А.С.], наделенный, как уже говорилось, глубоко демократическим духом, подлинной добротой, несравненной скромностью, исключительно доброжелательным, но твердым характером, большой человечностью и моральной прямоотой, Леви-Чивита прожил спокойную жизнь ученого и преподавателя до 1938 г.

В тот год, в результате неслыханного оскорбления цивилизации, фашистское безумие навязало “положение о защите расы”, что привело, в частности, к исключению из университетов неарийских профессоров, то есть, как сказано в этом убогом “положении”, не итальянцев. Помимо кафедры, Леви-Чивита был исключен из всех итальянских научных академий, членом которых он являлся, был отвергнут Итальянским математическим союзом, и ему даже было запрещено перепечатывать свой знаменитый трактат по рациональной механике. Кажется, доступ к математической библиотеке университета в Риме ему тоже был запрещен. Это было чрезвычайное оскорбление великого математика, посвятившего всю свою жизнь служению науке и итальянской школе, чей отец сражался на стороне Гарибальди в Аспромонте и Безекке, был мэром Падуи и сенатором.

Его жена, Либерга Тревизани, пережившая мужа³, рассказала нам, что Леви-Чивита услышал по радио известие о своем увольнении с кафедры: “Его лицо сделалось бледным и он затих”. Можно сказать, что с этого момента он стал молчаливым и в науке, его научное творчество почти полностью прекратилось, и начался быстрый физический упадок.

Леви-Чивита умер 29 декабря 1941 г. в Риме в возрасте 68 лет. Смерть пошадилла его в разгар трагедии, когда проходила депортация в лагеря смерти. Точно так смерть спасла великого Вито Вольтерру, который был президентом Академии Линчей и пожизненным сенатором. Три года спустя после смерти Вольтерры в трагическую субботу 16 октября 1943 г. более тысячи евреев были арестованы в Риме и спустя 9 дней уничтожены в Аушвице-Биркенау. В тот день группа эсэсовцев, полагая, что Леви-Чивита жив, подошла к его дому, имея приказ арестовать его и отправить в лагерь смерти в Германию.

Исчезновение Леви-Чивиты, как выше отмечено, было проигнорировано официальной Италией. Единственная газета, которая сообщила об этом, была *L'Osservatore Romano* – единственный голос, который оставался отчасти свободным в то время и мог распространяться в Италии. Именно через *L'Osservatore Romano* эту новость узнали за границей.

Франческо Трикоми помянул Леви-Чивиту в Академии наук Турина, Карло Сомильяна и Умберто Чизотти дали краткое сообщение о кончине Леви-Чивиты в Институте Ломбардо наук, литературы и искусств. Бюллетень Итальянского математического союза посвятил умершему несколько общих строк.

Выдающийся геодезист Ходж в Лондонском королевском обществе сказал: “Смерть Туллио Леви-Чивиты, наступившая через пятнадцать месяцев после кончины Вито Вольтерры, освободила последнего представителя великой математической школы от роли иностранного члена Королевского общества. Оба этих математика в течение своей активной жизни способствовали высокой репутации итальянской математической школы и математической школы Рима, в частности; оба внесли большой вклад, который найдет свое постоянное место в математической литературе, и оба закончили свои дни жертвами политической системы, разрушившей институты и свободу, в которую они твердо верили”.

Кроме того, газета *L'Osservatore Romano*, спустя несколько месяцев, посвятила ему большую статью: “... смерть члена Папской Академии Туллио Леви-Чивиты стала потерей одного из величайших математиков нашего века, исчезновением одного из тех гигантов мысли, которые оставляют свой личный отпечаток, чтобы в будущем обозначить поколение, к которому они принадлежали”.

³ Любимая спутница жизни Туллио Леви-Чивиты умерла 11 декабря 1973 г.