

УДК 532.59:534.1

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ<sup>1)</sup>

© 2019 г. В. В. Булатов<sup>1,\*</sup>, Ю. В. Владимиров<sup>1,\*\*</sup>

(<sup>1</sup> 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1, Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия)

\*e-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru);

\*\*e-mail: [vladimyura@yandex.ru](mailto:vladimyura@yandex.ru)

Поступила в редакцию 12.02.2019 г.  
Переработанный вариант 12.02.2019 г.  
Принята к публикации 11.03.2019 г.

Рассмотрена задача о построении решений, описывающих внутренние гравитационные волны от осциллирующего точечного источника возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Рассмотрено модельное распределение сдвигового течения по глубине и получено аналитическое решение задачи в виде характеристической функции Грина, которое выражается через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. С помощью дебаевских асимптотик модифицированной функции Бесселя получены аналитические выражения для дисперсионных соотношений и построены интегральные представления решений. Исследованы зависимости волновых характеристик возбуждаемых полей от основных параметров использованных моделей стратификации, течений и режимов генерации. Библ. 15. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавуности, сдвиговые течения, модифицированная функция Бесселя.

**DOI:** 10.1134/S0044466919070032

### ВВЕДЕНИЕ

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место занимает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками (см. [1], [2]). Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, влияющих на динамику внутренних гравитационных волн (ВГВ) как в естественных условиях, так и в технических устройствах. В современных научных исследованиях при анализе динамики ВГВ в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой картины. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе [1]–[5]. В реальных океанических условиях необходимо рассматривать ВГВ, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем вариация скорости по вертикали составляет десятки см/сек и м/сек, то есть имеет тот же порядок, что и максимальные скорости ВГВ. Такие течения должны существенно сказываться на распространении ВГВ. В [6]–[8] приведены результаты многочисленных исследований по натурным измерениям внутренних волн, течений, а также их взаимодействию в различных областях Мирового океана. В [9] рассмотрена генерация ВГВ волн сдвиговым течением в проливе Карские Ворота, причем течение меняется с приливной частотой, и пакеты ВГВ появляются с приливной периодичностью за счет сдвиговой неустойчивости течений. Аналогичные результаты получены в [10] на примере Гибралтарского пролива, где рассмотрены измерения течений и ВГВ, амплитуда которых составляет десятки метров. Для моделирования генерации ВГВ точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, который обтекается сдвиговым течением и периодическим приливным течением [6]–[8]. Если мас-

<sup>1)</sup> Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

штаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов внутренних волн, то естественной математической моделью является случай стационарных и горизонтальных однородных сдвиговых течений (см. [1]–[4], [8], [11], [12]).

Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля ВГВ от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с учетом сдвиговых течений.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой вертикально стратифицированной среды глубины  $H$ . Пусть  $(U(z), V(z))$  – вектор сдвигового течения на горизонте  $z$ . Исходной для дальнейшего анализа является линеаризованная система уравнений гидродинамики относительно невозмущенного состояния, которая имеет вид (см. [1]–[4], [8], [12])

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{DU_1}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{DU_2}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

где  $(U_1, U_2, W)$  – компоненты возмущенной скорости,  $(p, \rho)$  – возмущения давления и плотности,  $\rho_0(z)$  – невозмущенная плотность среды. Воспользовавшись приближением Буссинеска, можно получить уравнение для вертикальной компоненты скорости [1], [4], [12]

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \Delta W - \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta_2 W = Q(t, x, y, z), \\ \Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $N^2(z)$  – квадрат частоты Брента–Вейсяля (частоты плавучести),  $g$  – ускорение свободного падения,  $Q(t, x, y, z)$  – плотность распределения источников при их наличии.

Граничные условия берутся в виде (вертикальная ось  $z$  направлена вверх)

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H. \tag{1.2}$$

Далее используются следующие предположения. Частота Брента–Вейсяля предполагается постоянной:  $N(z) = N = \text{const}$  и течение одномерным:  $V(z) \equiv 0$ . Функция  $U(z)$  – линейная функция глубины:  $U(z) = U_0 + (U_0 - U_H)z/H$ , где  $U_0 = U(0)$ ,  $U_H = U(-H)$ . Использование данной модели гидрологии широко применяется в реальных океанологических расчетах и позволяет учитывать основные особенности волновой динамики с учетом реальной изменчивости плотности морской среды, наблюдаемой при натурных измерениях ВГВ в океане, а также исследовать задачу аналитически [7], [8], [12]. Ненулевая правая часть (1.1) берется в виде

$$Q(t, x, y, z) = q \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) \exp(i\omega t),$$

т.е. рассматривается функция Грина для осциллирующего точечного источника возмущений, расположенного на глубине  $z_0$  (см. [5], [11], [13]).

Тогда в безразмерных координатах и переменных

$$\begin{aligned} x^* = \pi x/H, \quad y^* = \pi y/H, \quad z^* = \pi z/H, \quad W^* = W_{HN^2}/\pi q, \quad \omega^* = \omega/N, \quad t^* = tN, \\ M(z^*) = \pi U(z^*)/NH = a + bz^*, \quad a = \pi U_0/NH, \quad b = (U_0 - U_H)/NH \end{aligned}$$

из (1.1), (1.2) можно получить (звездочка далее опускается)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + M(z) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Delta W + \Delta_2 W = \exp(i\omega t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0), \tag{1.3}$$

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi. \tag{1.4}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие значения параметров:  $a = 0.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $\omega = 0.54$ . Представим функцию  $W(t, x, y, z)$  в виде

$$W(t, x, y, z) = \exp(i\omega t)w(x, y, z).$$

Решение (1.3), (1.4) ищется в виде интегралов Фурье

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, v, z) \exp(-i(\mu x + v y)) d\mu. \quad (1.5)$$

Тогда для определения функции  $\varphi(\mu, v, z)$  необходимо решить краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2((\omega - \mu M(z))^{-2} - 1)\varphi &= -\delta(z - z_0)(\omega - \mu M(z))^{-2}, \\ \varphi(\mu, v, 0) &= \varphi(\mu, v, -\pi)0, \quad k^2 = \mu^2 + v^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В качестве двух линейно-независимых решений задачи (1.6) с нулевой правой частью возьмем решения, выражающиеся через модифицированную функцию Бесселя с мнимым индексом [14], [15]

$$f_{1,2}(z) = \sqrt{2\beta(\omega - \mu M(z))} I_{\pm i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(z))),$$

где индексу 1 соответствует знак плюс, индексу 2 – соответствует знак минус,  $\lambda = \sqrt{\beta^2 - 1/4}$ ,  $\beta = k/b\mu$ . Функции  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  комплексно сопряжены. Будем считать, что скорость сдвигового течения положительна на всей глубине стратифицированной среды, т.е.  $a > 0$ ,  $a - b\pi > 0$ . Также предполагается, что выполнено условие устойчивости Майлса для числа Ричардсона:

$$Ri = N^2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^{-2} > 1/4,$$

т.е.  $b^2 < 4$  (см. [1]–[4], [8]). Отсюда в частности следует, что  $\beta^2 > 1/4$  и значения  $\lambda$  действительны. Функция  $I_{i\lambda}(\tau)$  при действительных значениях  $\lambda$  и при  $|\tau| < \lambda$  осциллирует. При мнимых значениях  $\lambda$  функция  $I_{i\lambda}(\tau)$  стремится к бесконечности при больших  $\tau$  и нигде не осциллирует при  $\tau > 0$  (см. [14], [15]). Для того, чтобы значения  $\lambda$  были действительными для любых  $k, \mu$  достаточно, чтобы  $b^2 < 4$ , что совпадает с условием Майлса для числа Ричардсона. Функция

$$\varphi_1(z) = i(f_1(0)f_2(z) - f_2(0)f_1(z))$$

есть действительная и удовлетворяет граничному условию в нуле. Функция

$$\varphi_2(z) = i(f_1(-\pi)f_2(z) - f_2(-\pi)f_1(z))$$

есть действительная и удовлетворяет граничному условию при  $z = -\pi$ . Тогда характеристическая функция Грина уравнения (1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, v, z) &= -\varphi_1(z)\varphi_2(z_0)(\omega - \mu M(z))^{-2}/V \quad \text{при } z > z_0, \\ \varphi(\mu, v, z) &= -\varphi_1(z_0)\varphi_2(z)(\omega - \mu M(z))^{-2}/V \quad \text{при } z < z_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$V = \varphi_1(z_0)F_2(z_0) - \varphi_2(z_0)F_1(z_0), \quad F_j(z) = \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z}, \quad j = 1, 2,$$

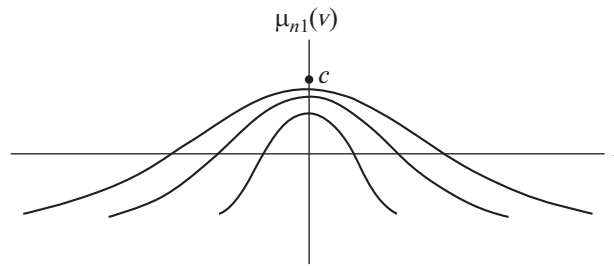
где вронскиан  $V$  не зависит от переменной  $z$ . Введем следующие обозначения:

$$z_- = \min(z, z_0), \quad z_+ = \max(z, z_0).$$

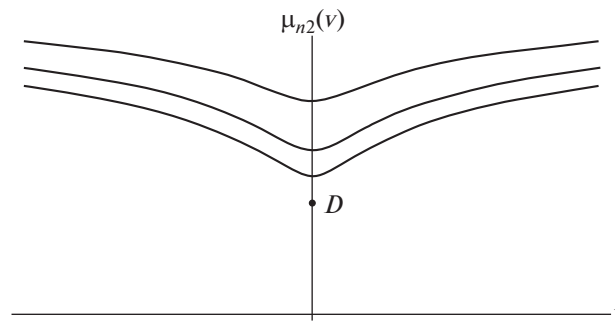
Тогда (2.1) можно представить в виде

$$\varphi(\mu, v, z) = -\varphi_1(z_+)\varphi_2(z_-)(\omega - \mu M(z))^{-2}/\varphi_1(-\pi)F_2(-\pi).$$

Перейдем к интегрированию по переменной  $\mu$  в (1.5). Методом возмущений можно показать, что контур интегрирования по  $\mu$  проходит выше действительной оси на комплексной плос-



Фиг. 1. Дисперсионные кривые первых трех мод  $\mu_{1n}(\nu)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , нумерация снизу вверх.



Фиг. 2. Дисперсионные кривые первых трех мод  $\mu_{2n}(\nu)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , нумерация сверху вниз.

кости  $\mu$ . Амплитуда подынтегральной функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$  аналитична по переменной  $\mu$  вне полюсов этой функции и разреза  $L$ , проведенного вдоль действительной оси  $\mu$  от  $C$  до  $D$ , где  $C, D$  — нули функции  $I_{\pm i\lambda}$  при  $z = 0$  и  $z = -\pi$  соответственно:  $C = \omega/a, D = \omega/(a - \pi b)$ . В данном случае:  $C = 0.675, D = 3.145$ . Точка  $z_0$  находится на критическом уровне, если  $\omega - \mu_0 M(z_0) = 0$ , где соответствующая точка  $\mu_0 \in L$ , если  $z_0 \in [0, -\pi]$ . Таким образом, критическим значениям по  $z$  соответствуют точки разреза  $L$  на комплексной плоскости  $\mu$ . Нули вронскиана  $V$  — это корни уравнения  $\varphi_1(-\pi) = 0$ . Тогда дисперсионное соотношение можно представить в виде

$$I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(-\pi)))I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0))) = I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(-\pi)))I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0))). \quad (2.2)$$

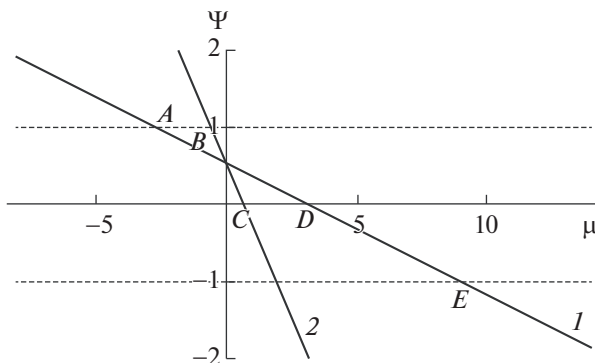
В [12] для данной модели гидрологии получено дисперсионное соотношение в виде, аналогичном (2.2), там же было отмечено, что решение этого уравнения аналитическими методами представляет большую трудность. Поэтому более сложной задачей является исследование аналитических свойств полученного дисперсионного уравнения, что дает возможность получить асимптотические выражения для полей ВГВ при различных режимах волновой генерации. Далее будут изучены основные особенности решений дисперсионного уравнения (2.2) и построены асимптотические представления решения этого уравнения.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Корни уравнения (2.2) образуют две серии собственных значений (дисперсионных кривых)  $\mu_{n1}(\nu)$  и  $\mu_{n2}(\nu)$ . С ростом значений  $n$  значения  $\mu_{n1}(\nu)$  возрастают и стремятся к  $C$ , а  $\mu_{n2}(\nu)$  убывают и стремятся к  $D$ . Качественная картина поведения дисперсионных кривых двух серий представлена на фиг. 1, 2. Отметим, что при  $\mu = \mu_{nj}(\nu)$ ,  $j = 1, 2$ , функции  $\varphi_{n1}(\mu, \nu, z)$  и  $\varphi_{n2}(\mu, \nu, z)$  — собственные функции задачи (1.6) равны с точностью до постоянного множителя. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что

$$\varphi_{n1}(\mu_{nj}(\nu), \nu, z) = \varphi_{n2}(\mu_{nj}(\nu), \nu, z) = \varphi_{nj}(\nu, z), \quad j = 1, 2.$$

Из решения задачи (1.6) можно (при  $M(z) = \text{const}$ ) получить, что точка поворота по переменной  $\mu$ , отделяющей волновую зону от неволновой, определяется из соотношения  $(\omega - \mu M)^{-2} = 1$ .



**Фиг. 3.** Особые точки решений дисперсионного уравнения, линия 1 для  $\Psi = \omega - \mu M(0)$ , линия 2 для  $\Psi = \omega - \mu M(-\pi)$ .

При линейной зависимости  $M(z)$  точка поворота по переменной  $\mu$  определяется из соотношения  $(\omega - \mu M(-\pi))^{-2} = 1$ . На фиг. 3 приведена геометрия расположения особых точек, определяющих основные качественные особенности поведения дисперсионных кривых в плоскости переменных  $(\Psi, \mu)$ , где  $\Psi = \omega - \mu M(z)$ . Точки поворота, отделяющие значения переменной  $\mu$ , при которых существуют волновые решения, это точки  $A, E$  на фиг. 3, соответствующие им значения переменной  $\mu$  равны  $\mu_A = -2.67, \mu_E = 8.95$ . При  $\mu > \mu_E$  и при  $\mu < \mu_A$  волновые возмущения отсутствуют.

Далее будут подробно исследованы основные аналитические свойства дисперсионных соотношений, следующие из решения дисперсионного уравнения (2.2) для различных интервалов значений переменной  $\mu$ . Для этого рассмотрим уравнение, которому удовлетворяют модифицированные функции Бесселя

$$\tau_2 Y''(\tau) + \tau Y(\tau) + (\lambda^2 - \tau^2) Y(x) = 0, \quad Y(\tau) = I_{\pm i\lambda}(\tau). \tag{3.1}$$

С помощью замены переменной  $Y(\tau) = U(\tau)/\sqrt{\tau}$  уравнение (3.1) можно представить в виде

$$U''(\tau) + (1/4 + \lambda^2 - \tau^2)\tau^{-2}U(\tau) = 0. \tag{3.2}$$

Будем рассматривать значения  $\lambda \gg 1/4$ , тогда уравнение (3.2) упрощается

$$U''(\tau) + q(\tau)U(\tau) = 0, \quad q(\tau) = (\lambda^2 - \tau^2)\tau^{-2}. \tag{3.3}$$

Тогда ВКБ асимптотика уравнения (3.3) в случае  $\tau < \lambda$ , описывающая осциллирующие решения, имеет вид

$$U(\tau) \approx q(\tau)^{-1/4} \exp\left(i \int \sqrt{q(\tau)} d\tau\right),$$

$$\int \sqrt{q(\tau)} d\tau = \sqrt{\lambda^2 - \tau^2} - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \tau^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \tau^2}}.$$

Для экспоненциально растущих или убывающих решений ВКБ асимптотика уравнения (3.3) при  $\tau > \lambda$  имеет вид

$$U(\tau) \approx D_{\pm}(-q(\tau))^{-1/4} \exp\left(i \int \sqrt{-q(\tau)} d\tau\right),$$

$$\int \sqrt{-q(\tau)} d\tau = \sqrt{\tau^2 - \lambda^2} - \lambda \arctg(\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}/\lambda).$$

Далее будут рассматриваться только функции  $I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$  (функция  $I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$  комплексно сопряжена с  $I_{\tilde{\lambda}}(\tau)$  и  $I_{\tilde{\lambda}}(-\tau) = \exp(-\pi\lambda)I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$ ). Для нахождения множителей  $D_{\pm}$  необходимо сравнить ВКБ асимптотику с классической асимптотикой  $I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_{-\tilde{\lambda}}(\tau) &\approx \exp(\tau)/\sqrt{2\pi\tau}, \\ \operatorname{Im} I_{-\tilde{\lambda}}(\tau) &\approx \exp(-\tau + \pi\lambda)/2\sqrt{2\pi\tau}. \end{aligned}$$

Тогда выражение для ВКБ асимптотики функции  $I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$  при  $\tau > \lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_{-\tilde{\lambda}}(\tau) &\approx (\tau^2 - \lambda^2)^{-1/4} \exp(\Phi_+)/\sqrt{2\pi}, \\ \operatorname{Im} I_{-\tilde{\lambda}}(\tau) &\approx (\tau^2 - \lambda^2)^{-1/4} \exp(\Phi_-)/2\sqrt{2\pi}, \\ \Phi_{\pm} &= \pm\sqrt{\tau^2 - \lambda^2} \mp \lambda \operatorname{arctg}(\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}/\lambda) + \pi\lambda/2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Продолжим аналитически первую из формул (3.4) из области  $\tau > \lambda$  в область  $\tau < \lambda$  через верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $\tau$ , в результате получим

$$\begin{aligned} I_{-\tilde{\lambda}}(\tau) &\approx (\tau^2 - \lambda^2)^{-1/4} \exp(\alpha)/\sqrt{2\pi}, \\ \alpha &= -i \left( \sqrt{\lambda^2 - \tau^2} - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \tau^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \tau^2}} - \pi/4 \right) + \pi\lambda/2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Дебаевская асимптотика модифицированной функции Бесселя  $I_{-\tilde{\lambda}}(\tau)$  мнимого индекса (при больших значениях как индекса, так и аргумента) получается подстановкой в (3.4), (3.5) вместо  $\tau$  значения  $\lambda r$  (см. [14], [15])

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_{-\tilde{\lambda}}(\lambda r) &\approx (r^2 - 1)^{-1/4} \exp(\Lambda_+)/\sqrt{2\pi\lambda}, \\ \operatorname{Im} I_{-\tilde{\lambda}}(\lambda r) &\approx (r^2 - 1)^{-1/4} \exp(\Lambda_-)/2\sqrt{2\pi\lambda}, \\ \Lambda_{\pm} &= \pm\sqrt{r^2 - 1} - \operatorname{arctg}(\sqrt{r^2 - 1}) \pm \pi/2, \quad r > 1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} I_{-\tilde{\lambda}}(\lambda r) &\approx (r^2 - 1)^{-1/4} \exp(\Theta)/\sqrt{2\pi\lambda}, \\ \Theta &= -i \left( \lambda\sqrt{1 - r^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{1 - \sqrt{1 - r^2}} - \pi/4 \right) + \pi\lambda/2, \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В рассматриваемом случае при больших значениях параметра  $\beta$  ( $\beta \gg 1/4$ , большие числа Ричардсона) функции, определяющие свойства дисперсионного соотношения (2.2), имеют вид

$$I_{\pm i\beta}(\beta(\omega - \mu M(z))), \quad z = 0, -\pi.$$

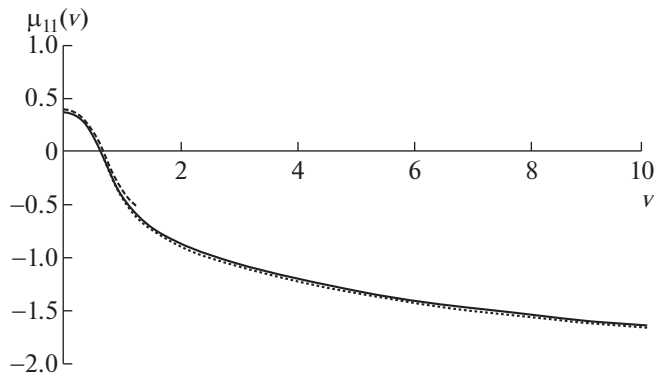
Поэтому при больших значениях  $\beta$  возможно применять именно дебаевскую асимптотику, так как  $\beta > 5 \gg 1/4$ .

Левая и правая части дисперсионного уравнения (2.2), в силу аналитических свойств модифицированных функций Бесселя, комплексно сопряжены, поэтому для решения этого дисперсионного уравнения достаточно приравнять нулю мнимую часть левой части этого равенства:

$$\operatorname{Im} I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(-\pi))) I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0))) = 0.$$

Рассмотрим окрестность точки  $A$  (см. фиг. 3). Заменим в левой части соотношения (2.2) функцию  $I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(-\pi)))$  на асимптотику (3.7), так как  $\omega - \mu M(-\pi) < 1$  в окрестности точки  $A$ , а функцию  $I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0)))$  на асимптотику (3.6), так как  $\omega - \mu M(-\pi) < 1$  в окрестности точки  $A$ . Так как  $\beta \gg 1/4$ , то далее в асимптотиках модифицированных функций Бесселя значения  $\lambda$  будем всегда заменять на  $\beta$ . Поскольку действительная часть  $I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0)))$  экспоненциально растет, а мнимая часть экспоненциально убывает по переменной  $\mu$ , то вклад в общую фазу от этого множителя много меньше единицы, дисперсионное уравнение (2.2) упрощается и сводится к уравнению

$$\sin(\beta\Omega(r) - \pi/4) = 0, \quad \Omega(r) = \sqrt{1 - r^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{1 - \sqrt{1 - r^2}}. \tag{3.7}$$



Фиг. 4. Дисперсионная кривая первой моды  $\mu_{11}(v)$  и ее аппроксимации.

Откуда можно получить

$$\beta\Omega(\omega - \mu M(-\pi)) - \pi/4 = -\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.8}$$

В равенстве (3.8) стоит знак минус справа, так как  $\Omega(r) < 0$ . Введем малую величину  $\varepsilon > 0$ :  $\varepsilon = 1 - (\omega - \mu M(-\pi))$ . При малых  $\varepsilon$  решение (3.8) можно представить в виде

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \varepsilon^{2/3} \frac{v}{b|\mu|} = \frac{3\pi}{4} + \pi(n - 1). \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.9) будем искать методом возмущения в виде

$$\mu_n(v) = \mu_0 + \sigma_n v^{-2/3} + \gamma_n v^{-4/3} + \dots \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в соотношение (3.9) и приравнивая члены с одинаковыми степенями  $v$ , можно получить

$$\mu_0 = \frac{\omega - 1}{M(-\pi)}, \quad \sigma_n = (3\sqrt{2}b|\mu_0|(3\pi/4 + \pi(n - 1))/4)^{2/3} / M(-\pi), \quad \gamma_n = \frac{2A_n^2}{3|\mu_0|}.$$

Далее везде положим  $n = 1$ . Соответствующие числовые значения имеют вид:  $\mu_0 = -2.68$ ,  $\sigma_{11} = 7.08$ ,  $\gamma_{11} = -12.46$ . Построенные асимптотические разложения дисперсионной зависимости  $\mu_n(v)$  при больших значениях параметра  $v$  определяют особенности возбуждаемых волновых полей при малых  $u$ .

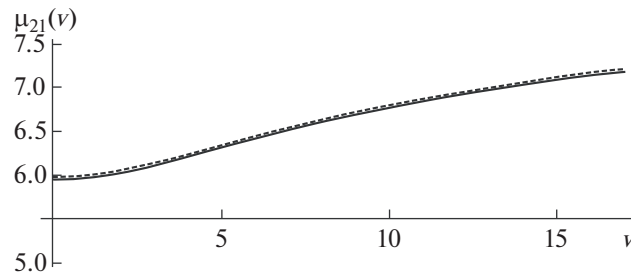
Рассмотрим далее интервал по переменной  $\mu$  от точки  $A$  до точки  $B$  (без учета окрестности точки  $B$ ), отвечающие им значения  $\mu$  равны соответственно  $\mu_A = -2.68$  и  $\mu_B = -0.575$  (фиг. 3). Тогда дисперсионное соотношение также представимо в виде (3.7), при этом величина  $\omega - \mu M(-\pi)$  уже не близка к единице. Однако уравнение (3.8) в данном случае легко решается численно для любого  $n$ , поскольку в левой части (3.8) монотонная функция по переменной  $\mu$ . Можно отметить, что из уравнения (3.8) можно получить явные аналитические выражения для дисперсионной зависимости  $v_n(\mu)$  в виде

$$v_n(\mu) = |\mu|((\pi/4 - \pi n)^2 b^2 \Omega^{-2}(r) - 1)^{1/2}, \quad r = \omega - \mu M(-\pi).$$

Если рассматривать область изменения переменной  $\mu$  от  $A$  до  $B$  с учетом окрестности точки  $B$ , тогда требуется учитывать фазовую добавку множителя  $I_{-\pi}(\beta(\omega - \mu M(0)))$ . Добавка в фазу учитывается только до первого разрыва функции  $\arg I_{-\pi}(\beta(\omega - \mu M(0)))$ , т.е. при непрерывном достижении этой функции значения  $\pi$ . Уравнение (3.8) тогда будет иметь вид

$$\beta\Omega(\omega - \mu M(-\pi)) - \pi/4 + \arg(I_{-\pi}(\beta(\omega - \mu M(0)))) = -\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.11}$$

На фиг. 4 изображена дисперсионная кривая  $\mu_{11}(v)$ , полученная путем численного решения уравнения (2.2) (сплошная линия) и с помощью приближения (3.11) (пунктирная линия).



Фиг. 5. Дисперсионная кривая первой моды  $\mu_{21}(v)$  и ее аппроксимация.

Рассмотрим интервал изменения переменной  $\mu$  от  $\mu_B$  до  $C$  (левая граница разреза  $L$  на комплексной плоскости  $\mu$ ). В этой области значений  $\mu$  аргумент функций

$$I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(-\pi))), \quad I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(0)))$$

находится в интервале значений  $(-1, 1)$ , поэтому эти функции можно заменить асимптотиками (3.6). Тогда дисперсионное уравнение (2.2) примет вид

$$\beta(\Omega(\omega - \mu M(-\pi)) - \Omega(\omega - \mu M(0))) = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.12}$$

На фиг. 4 изображена дисперсионная кривая  $\mu_{11}(v)$ , полученная путем численного решения уравнения (2.2) (сплошная линия) и приближение, рассчитанное по формуле (3.12) (штриховая линия). Из уравнения (3.12) также можно получить явное аналитическое представление для дисперсионной зависимости  $v_n(\mu)$ , имеющее вид

$$v_n(\mu) = |\mu|((\pi n b)^2(\Omega(r_1) - \Omega(r_2))^{-2} - 1)^{1/2},$$

$$r_1 = \omega - \mu M(-\pi), \quad r_2 = \omega - \mu M(0).$$

Интервал изменения переменной  $\mu$  от  $D$  (правая граница разреза  $L$  на комплексной плоскости  $\mu$ ) до  $\mu_E$  (фиг. 3) соответствует семейству дисперсионных кривых  $\mu_{n2}(v)$ . В этом случае множители в уравнение (2.2) не дают вклад в фазу на всем интервале  $(D, \mu_E)$ , поэтому уравнение (3.8) дает решение для всех  $0 < v < \infty$ . На фиг. 5 изображена дисперсионная кривая  $\mu_{21}(v)$ , полученная путем численного решения уравнения (2.2) (сплошная линия) и приближение (3.8) (штриховая линия).

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Для вычисления интеграла по переменной  $\mu$  в (1.5) необходимо замкнуть контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, учесть интеграл по разрезу  $L$  и сумму вычетов в полюсах  $\mu = \mu_{nj}(v)$

$$w(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{nj}(v, z, z_0) \exp(-i(\mu_{nj}(v)x + vy)) dv + J,$$

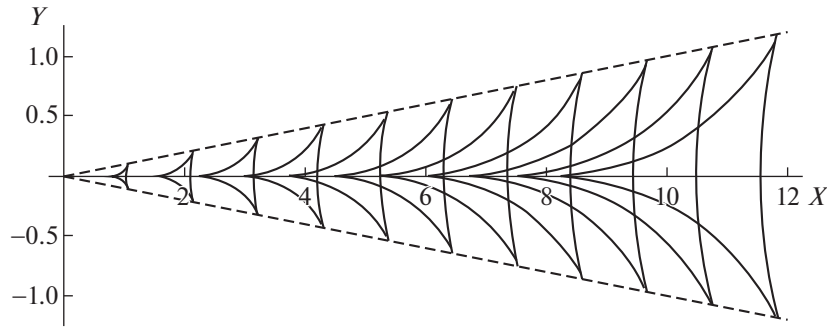
$$A_{nj}(v, z, z_0) = \frac{\varphi_{nj}(v, z)\varphi_{nj}(v, z_0)}{D(\mu_{nj}(v), v, -\pi)F_{nj}(v, -\pi)(\omega - \mu_{nj}(v)M(z))^2},$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} I(v, z, z_0) \exp(-ivy) dv,$$

$$F_{nj}(v, z) = \partial\varphi_{nj}(v, z)/\partial z, \quad D(\mu, v, z) = \partial\varphi_1(\mu, v, z)/\partial\mu, \quad j = 1, 2,$$

где  $I(v, z, z_0)$  – интеграл вдоль берега разреза  $L$ . Можно показать, что вклад от интеграла вдоль берега разреза мал по сравнению со вкладом от полюсов  $\mu = \mu_{nj}(v)$ , и в дальнейшем интеграл  $J$  не





Фиг. 6. Фазовая структура волнового поля для дисперсионной кривой  $\mu_{11}(v)$ .

рассматривается. Таким образом, волновое поле ВГВ  $W(x, y, z, t)$  с учетом гармонической зависимости от времени представимо в виде суммы мод двух типов:

$$W(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [W_{n1}(x, y, z, t) + W_{n2}(x, y, z, t)], \quad (4.1)$$

$$W_{nj}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A_{nj}(v, z, z_0) \exp(-i(\mu_{nj}(v)x + v y - \omega t)) dv, \quad j = 1, 2.$$

Вдали от источника возмущений при больших значениях  $x, y$  интегралы (4.1) в приближении метода стационарной фазы имеют вид (см. [5], [13])

$$W_{nj}(x, y, z, t) = Z_{nj-} + Z_{nj+},$$

$$Z_{nj\pm} = \frac{A_{nj}(\mu_{nj}(v_{\pm}), v_{\pm}, z)}{\sqrt{2\pi x(\pm s_{nj}(v_{\pm}))}} \cos(-i(\mu_{nj}(v_{\pm})x - v_{\pm}y \pm \pi/4 + \omega t)), \quad (4.2)$$

$$s_{nj}(v) = \frac{\partial^2 \mu_{nj}(v)}{\partial v^2}, \quad j = 1, 2,$$

где  $v_{\pm}$  – корни уравнения

$$\frac{\partial \mu_{nj}(v)}{\partial v} = y/x.$$

Выражения (4.2) применимы внутри соответствующих волновых клиньев, угол полураствора  $\vartheta$  каждого из которых определяется из соотношений:  $\vartheta = \arctg(\mu_{nj}(v_{nj}^*))$ , где  $v_{nj}^*$  – корень уравнения  $s_{nj}(v_{nj}^*) = 0$ . Приближение (4.2) (неравномерная асимптотика) применимо только внутри волновых клиньев. Асимптотика, описывающая волновые поля ВГВ вдали от источника возмущений, применимая как вблизи, так и вдали от волновых клиньев (равномерная асимптотика), выражается через функцию Эйри и ее производную [5], [13].

Опишем качественную картину возбуждаемых полей ВГВ, отвечающим двум типам дисперсионных кривых. Дисперсионные кривые первого типа пересекают ось абсцисс, угол полураствора волнового клина меньше  $\pi/2$  и волновая картина представляет собой систему клиновидных и поперечных волн. Соответствующая фазовая структура состоит из вложенных внутри волновых клиньев криволинейных треугольников, обращенных вершиной к началу координат. Так как дисперсионные кривые второго типа расположены всегда выше оси абсцисс, то им соответствует система клиновидных и продольных волн с более простой фазовой структурой. Угол полураствора для волн второго типа всегда меньше, чем угол полураствора для волн первого типа. Основной вклад в полное поле ВГВ вносят волновые моды первого типа, амплитуды волн второго типа в несколько раз меньше амплитуд волн первого типа. На фиг. 6 приведены результаты расчетов фазовой структуры возбуждаемых полей ВГВ для верхней ветви дисперсионной кривой

первого типа  $\mu_{11}(v)$ , штриховые линии на рисунке – волновые фронты с углом полураствора  $\vartheta$ , сплошные линии – линии равной фазы (задаваемые параметрически с параметром  $v$ )

$$x(v) = \frac{\chi}{\mu_{11}(v) - \mu'_{11}(v)v}, \quad y(v) = \frac{\mu'_{11}(v)\chi}{\mu_{11}(v) - \mu'_{11}(v)v}, \quad \chi = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о поле внутренних гравитационных волн от осциллирующего локализованного точечного источника возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Для аналитического решения задачи использовано постоянное распределение частоты плавучести и линейная зависимость сдвигового течения от глубины. Используя выбранную модель гидродинамики, можно получить аналитические выражения для дисперсионной зависимости, которая выражается через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Подробно изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические свойства дисперсионных кривых. В приближении стационарной фазы построены интегральные представления решений для дальних волновых полей. Численно рассчитаны фазовые картины возбуждаемых полей ВГВ для данной модели волновой генерации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. № 4. P. 495–509.
2. Fabrikant A.L., Stepanyants Yu.A. Propagation of waves in shear flows. World Scientific Publishing, 1998. 304 p.
3. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
4. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
7. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
8. Velarde M.G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The Ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
9. Morozov E.G., Paka V.T., Bakhanov V.V. Strong internal tides in the Kara Gates Strait // Geoph. Res. Letters. 2008. V. 35. L16603.
10. Morozov E.G., Parrilla-Barrera G., Velarde M.G., Scherbinin A.D. The Straits of Gibraltar and Kara Gates: A comparison of internal tides // Oceanologica Acta. 2003. V. 26. № 3. P. 231–241.
11. Fraternali F., Domenicale L., Staffilan G., Tordella D. Internal waves in sheared flows: Lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space // Phys. Rev. 2018. V. 97. № 6. P. 063102.
12. Гаврильева А.А., Губарев Ю.Г., Лебедев М.П. Теорема Майлса и новые частные решения уравнения Тейлора–Гольдштейна // Ученые Записки Казанского университета. Серия физ.-мат. науки. 2016. Т. 158. Кн. 2. С. 156–171.
13. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2015. № 6. С. 26–34.
14. Никифоров А.Ф., Уваров В.В. Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.
15. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Физматлит, 1990. 528 с.