ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 7, с. 1230–1242

УДК 517.9

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В БИМАТЕРИАЛЕ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ. Ч. 2

© 2019 г. А. В. Глушко[1,*], А. С. Рябенко[1,**], А. С. Черникова[1,***]

([1] 394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский гос. ун-т, Россия)

*e-mail: kuchp2@math.vsu.ru

**e-mail: alexr-83@yandex.ru

***e-mail: chernikova-an@mail.ru

Поступила в редакцию 17.01.2018 г.
Переработанный вариант 11.01.2019 г.
Принята к публикации 11.03.2019 г.

Рассматривается задача о стационарном распределении тепла в области, состоящей из двух подобластей, заполненных различными неоднородными материалами. Условия на границе подобластей, моделирующие процесс теплообмена и теплового потока через их общую часть границы, с математической точки зрения, являются условиями сопряжения. Кроме этого, граничные условия моделируют наличие трещины на границе указанных областей, что приводит к появлению неоднородностей в граничных условиях. Изучение задачи основано на построении ее решения с помощью функции Грина с использованием метода ВКБ и сравнении сингулярных составляющих компонентов ее решения с аналогичными составляющими компонентов решения специально подобранной задачи с постоянными коэффициентами и граничными функциями особого вида. Библ. 19.

Ключевые слова: задача трансмиссии, обобщенное решение, краевые условия, уравнение стационарной теплопроводности, трещина, асимптотика.

DOI: 10.1134/S0044466919070093

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные исследования последних десятилетий посвящены влиянию трещин на тепловые процессы в материалах. В большинстве из них применяются численные методы, позволяющие получить решение с некоторой степенью точности (см. [1]–[5]). Другое направление в изучении подобных задач связано с использованием асимптотических методов (см. [6]–[13]).

Данная работа является второй из цикла статей, посвященных изучению стационарного распределения тепла в биматериале с одной конечной межфазной трещиной. В отличие от первой работы цикла (см. [13]), в настоящей статье рассматриваются материалы с коэффициентами внутренней теплопроводности более общего вида, что приводит к изучению краевой задачи для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами.

Основной целью исследования данной задачи является изучение асимптотического поведения ее решения и его первых производных (температуры и теплового потока) вблизи концов трещины. В работе показана возможность перехода к задачам, подобным тем, что были рассмотрены в статьях [9]–[13], с сохранением асимптотических свойств в окрестностях концов трещины.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, через $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ будем соответственно обозначать множества точек $\mathbb{R}^2_+ = \{x | x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{x | x_1 \in \mathbb{R};\ x_2 < 0\}$. Пусть $D = D_+ \cup D_- \cup \{x | 1 < |x_1| < 2;\ x_2 = 0\}$ – область из пространства $\mathbb{R}^2$, где $D_+ = \{x | |x_1| < 2;\ 0 < x_2 < 2\}$, $D_- = \{x | |x_1| < 2;\ -2 < x_2 < 0\}$. Кроме того, обозначим $\Gamma = \{x | |x_1| \le 2;\ x_2 = \pm 2\} \cup \{x | x_1 = \pm 2;\ |x_2| \le 2\}$, $\Gamma_+ = \Gamma \cap \overline{\mathbb{R}^2_+}$, $\Gamma_- = \Gamma \cap \overline{\mathbb{R}^2_-}$. Области D_+ и D_- заполнены неоднородными материалами с коэффициентами внутренней теплопроводности $e^{k_1(x_2)}$ и $e^{k_2(x_2)}$ соответственно. Стационарное распределение поля температуры в каждой из этих областей описывается уравнением $\operatorname{div}(e^{k_{1.5\mp0.5}(x_2)}\operatorname{grad}\tilde{u}_{1.5\mp0.5}(x)) = 0$ (см. [14]). Условия на границе областей D_+ и D_- моделируют процесс теплообмена и теплового потока через их общую часть границы.

Вид коэффициентов внутренней теплопроводности материалов вообще гарантирует только положительность этих величин. Действительно, если $k_p(x_2) = \ln G_p(x_2)$, где $p = 0; 1$, т.е. коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $G_p(x_2)$, где $p = 0; 1$, свободный от присутствия экспоненты в представлениях. Вид коэффициентов $e^{k_{1,5\mp0,5}(x_2)}$ используется лишь для указания связи с задачами, рассматриваемыми в работах [9]–[13].

Сформулированная задача моделируется следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\Delta\tilde{u}_p(x) + k_p'(x_2)\frac{\partial\tilde{u}_p(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2, \tag{1}$$

$$e^{0.5k_1(0)}\tilde{u}_1(x_1,+0) - e^{0.5k_2(0)}\tilde{u}_2(x_1,-0) = q_0(x_1), \quad x_1 \in [-2;2], \tag{2}$$

$$e^{0.5k_1(0)}\left(\frac{k_1'(0)}{2}\tilde{u}_1(x_1,+0) + \frac{\partial\tilde{u}_1(x_1,+0)}{\partial x_2}\right) - e^{0.5k_2(0)}\left(\frac{k_2'(0)}{2}\tilde{u}_2(x_1,-0) + \frac{\partial\tilde{u}_2(x_1,-0)}{\partial x_2}\right) = q_1(x_1), \quad x_1 \in [-2;2], \tag{3}$$

$$e^{0.5k_1(x_2)}\tilde{u}_1(x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_+, \tag{4}$$

$$e^{0.5k_2(x_2)}\tilde{u}_2(x) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_-, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа (см. [14]): $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$, $k_1(x_2)$, $k_2(x_2)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

i) функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны ($\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1;1]$) и принадлежат пространству $C^4([-1;1])$;

ii) функция $k_1(x_2)$ принадлежит пространству функций $C^\infty([0;2])$, а функция $k_2(x_2)$ – пространству $C^\infty([-2;0])$;

iii) справедливы неравенства $\tilde{k}_p(x_2) > 0$, где $\tilde{k}_p(x_2) = (k_p'(x_2))^2 + 2k_p''(x_2)$, $p = 1;2$;

iv) функция $f_1(x)$ принадлежит пространству $C^2(\{x \mid |x_1| \le 2;\ 0 < x_2 \le 2\})$, а функция $f_2(x)$ – пространству $C^2(\{|x_1| \le 2;\ -2 \le x_2 < 0\})$, а также выполнены равенства

$$f_1(-2;0) - f_2(-2;0) = f_1(2;0) - f_2(2;0) = f_1'(-2;0) - f_2'(-2;0) = f_1'(2;0) - f_2'(2;0) = 0. \tag{6}$$

Замечание 1. Граничные условия (2)–(5) согласованы в точках $(\pm2;0)$ в силу равенств (6).

Замечание 2. Условия (2), (3) понимаются в смысле главного значения (см. [13]).

Определение. Решением задачи (1)–(5) назовем пару функций $\tilde{u}_1(x)$ и $\tilde{u}_2(x)$, заданных соответственно на $\overline{D_+}$ и $\overline{D_-}$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1) и условиям (4), (5) и условиям (2), (3) в смысле главного значения.

Введем в рассмотрение вспомогательную задачу

$$\Delta v_p(x) - 0.25\tilde{k}_p(0)v_p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2, \tag{7}$$

$$v_1(x_1,+0) - v_2(x_1,-0) = q_0(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$f_1(x) = v_1(x), \quad x \in \Gamma_+, \quad f_2(x) = v_2(x), \quad x \in \Gamma_-. \tag{10}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Для компонент вектор-функции* $(\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x))$*, которая является решением задачи* (1)–(5), *и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек* $(\pm 1; 0)$:

$$\tilde{u}_p(x) = \tilde{R}_p(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_1} = \frac{e^{-0.5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1) - \frac{x_2}{r_{+1}^2(x)}q_0(1) + \ln r_{-1}(x)q_1(-1) - \ln r_{+1}(x)q_1(1)\right) + \tilde{R}_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_p(x)}{\partial x_2} = \frac{e^{-0.5k_p(x_2)}}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)}q_0(-1) + \frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)}q_0(1) - \ln r_{-1}(x)q_0'(-1) + \ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right) + \tilde{R}_{p+4}(x),$$

где $p = 1; 2$, $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ *и* $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$*, а функции* $\tilde{R}_j(x)$ *равномерно ограничены на* $\overline{D_{\operatorname{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}}$ *при* $j = \overline{1;6}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВБЛИЗИ КОНЦОВ ТРЕЩИНЫ

Замечание 3. В ходе изучения задачи (7)–(9), аналогичной задаче, рассмотренной в работах [9]–[13], может быть показано, что функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ удовлетворяют вышеуказанным условиям для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (следовательно, допустимо условие (10)), а также доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если при* $p = 0;1$ *выполнены равенства* $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, *то задача* (7)–(9) *имеет решение, причем для функций* $v_1(x)$ *и* $z(x) = v_2(x_1, -x_2)$ *справедливы следующие представления*:

$$\begin{gathered}
v_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25\tilde{k}_1(0)}}{|s|^2 + 0.25\tilde{k}_1(0)}w_1^0(s_1)\right], \quad z(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + 0.25\tilde{k}_2(0)}}{|s|^2 + 0.25\tilde{k}_2(0)}w_2^0(s_1)\right]; \\
v_1(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25\tilde{k}_1(0)}}w_1^0(s_1)\right], \quad z(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0.25\tilde{k}_2(0)}}w_2^0(s_1)\right]; \\
v_1(x) = \frac{\sqrt{\tilde{k}_1(0)}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{k}_1(0)((x_1-y_1)^2 + x_2^2)}\right)((x_1-y_1)^2 + x_2^2)^{-0.5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_1^0(s_1)]dy_1, \\
z(x) = \frac{\sqrt{\tilde{k}_2(0)}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{k}_2(0)((x_1-y_1)^2 + x_2^2)}\right)((x_1-y_1)^2 + x_2^2)^{-0.5}F^{-1}_{s_1\to y_1}[w_2^0(s_1)]dy_1,
\end{gathered} \tag{11}$$

где $K_1(z)$ – *функция Макдональда* (см. [15]), $P_p(s_1) = F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)]$ *при* $p = 0;1$, *а* $w_p^0(s_1) = -\dfrac{P_1(s_1) + (-1)^p\sqrt{s_1^2 + 0.25\tilde{k}_{3-p}(0)}P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0,25\tilde{k}_1(0)} + \sqrt{s_1^2 + 0.25\tilde{k}_2(0)}}$ *при* $p = 1;\ 2$.

Утверждение 2. *Для компонент вектор-функции* $(v_1(x), v_2(x))$*, которая является решением задачи* (7)–(9), *справедливы следующие свойства*:

1) *функция* $v_1(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(\mathbb{R}_+^2)$, *а функция* $z(x)$ – *пространству* $L_2(\mathbb{R}_-^2)$;

2) *выполнены равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}(v_1(x_1,\varepsilon) - v_2(x_1,-\varepsilon) - q_0(x_1))^2 dx_1 = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v_1(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2} - q_1(x_1)\right)^2 dx_1 = 0.$$

Утверждение 3. *Для компонент вектор-функции* $(v_1(x), v_2(x))$*, которая является решением задачи* (7)–(9)*, и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек* $(\pm 1;\, 0)$:

$$v_p(x) = R_p(x),$$

$$\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_2}{r_{-1}^2(x)} q_0(-1) - \frac{x_2}{r_{+1}^2(x)} q_0(1) + \ln r_{-1}(x) q_1(-1) - \ln r_{+1}(x) q_1(1)\right) + R_{p+2}(x),$$

$$\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x_1+1}{r_{-1}^2(x)} q_0(-1) + \frac{x_1-1}{r_{+1}^2(x)} q_0(1) - \ln r_{-1}(x) q_0'(-1) + \ln r_{+1}(x) q_0'(1)\right) + R_{p+4}(x),$$

где $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ *и* $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$*, а функции* $R_j(x)$ *являются равномерно ограниченными на любых компактах* $K \subset \mathbb{R}_{\operatorname{sgn}\{(-1)^{j+1}\}}$ *при* $j = \overline{1;6}$.

Утверждение 4. *Функции* $\dfrac{\partial^2 v_1(\pm 2, x_2)}{\partial x_2^2}$ *и* $\dfrac{\partial^2 z(\pm 2, x_2)}{\partial x_2^2}$ *принадлежат пространству* $C(0;2) \cap L_2(0;2)$*, где* $v_1(x)$ *и* $z(x)$ *заданы равенствами* (11).

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{v}_p(x) = e^{0.5k_p(x_2)}\tilde{u}_p(x), \quad p = 1;2, \tag{12}$$

тогда, с учетом предположений (10), относительно функций $\tilde{v}_1(x)$ и $\tilde{v}_2(x)$ получим следующую задачу:

$$\Delta\tilde{v}_p(x) - 0.25\tilde{k}_p(x_2)\tilde{v}_p(x) = 0, \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2,$$

$$\tilde{v}_1(x_1, +0) - \tilde{v}_2(x_1, -0) = q_0(x_1), \quad x_1 \in [-2;2],$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_1(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial\tilde{v}_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \quad x_1 \in [-2;2],$$

$$\tilde{v}_p(x) = v_p(x), \quad x \in \Gamma_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2.$$

Вычтем из равенств последней задачи соответствующие равенства задачи (7)–(9), таким образом, относительно функций

$$V_p(x) = \tilde{v}_p(x) - v_p(x), \quad p = 1;2, \tag{13}$$

получим задачу

$$\Delta V_p(x) - 0.25\tilde{k}_p(x_2)V_p(x) = 0.25(\tilde{k}_p(0) - \tilde{k}_p(x_2))v_p(x), \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2, \tag{14}$$

$$V_1(x_1, +0) - V_2(x_1, -0) = 0, \quad x_1 \in [-2;2], \tag{15}$$

$$\frac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = 0, \quad x_1 \in [-2;2], \tag{16}$$

$$V_p(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2. \tag{17}$$

Выпишем однородные уравнения, соответствующие (14),

$$\Delta V_p(x) - 0.25\tilde{k}_p(x_2)V_p(x) = 0, \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2, \tag{18}$$

и будем искать их решения в виде $V_p(x) = A_p(x_1)B_p(x_2)$, $p = 1;2$. Подставим последние представления в (18) и разделим обе части получившихся равенств на $A_p(x_1)B_p(x_2)$ (ищем нетривиальное решение $A_p(x_1)B_p(x_2) \not\equiv 0$), в результате получим

$$\frac{A_p''(x_1)}{A_p(x_1)} = -\frac{B_p''(x_2) - 0.25\tilde{k}_p(x_2)B_p(x_2)}{B_p(x_2)}, \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2. \tag{19}$$

Левые части равенств (19) зависят только от x_1, а правые – только от x_2, так как равенства (19) определены для любых $x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}$, $p = 1;2$, то левые и правые части (19) не зависят ни от x_1, ни от x_2, т.е. являются константой (см. [16]). Обозначим эту константу $-\lambda$, таким образом, получаем уравнения

$$\frac{A_p''(x_1)}{A_p(x_1)} = -\lambda, \quad -\frac{B_p''(x_2) - 0.25\tilde{k}_p(x_2)B_p(x_2)}{B_p(x_2)} = -\lambda,$$

где $p = 1; 2$. Следовательно, имеем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$A_p''(x_1) + \lambda A_p(x_1) = 0, \quad p = 1; 2, \tag{20}$$

$$B_p''(x_2) - (0.25\tilde{k}_p(x_2) + \lambda)B_p(x_2) = 0, \quad p = 1; 2. \tag{21}$$

Выясним, как преобразуются граничные условия (17) при указанных представлениях функций $V_p(x)$, $p = 1; 2$. Так как предполагаем, что $B_p(x_2) \not\equiv 0$, где $p = 1; 2$, при $x_2 \in [-2; 2]$, получим

$$A_p(-2) = A_p(2) = 0. \tag{22}$$

Таким образом, для нахождения функций $A_p(x_1)$ ($p = 1; 2$) имеем задачу (20), (22). Введем в рассмотрение функции $\tilde{A}_p(x_1) = A_p(x_1 - 2)$, $p = 1; 2$, тогда относительно $\tilde{A}_1(x_1)$ и $\tilde{A}_2(x_1)$ задача (20), (22) примет вид

$$\tilde{A}_p''(x_1) + \lambda\tilde{A}_p(x_1) = 0, \quad x_1 \in (0; 4), \quad p = 1; 2, \tag{23}$$

$$\tilde{A}_p(0) = \tilde{A}_p(4) = 0, \quad p = 1; 2. \tag{24}$$

Ранее отмечалось, что ищем $A_p(x_1) \not\equiv 0$ при $p = 1; 2$, следовательно, $\tilde{A}_p(x_1) \not\equiv 0$ при $p = 1; 2$.

Пусть $p = 1; 2$. Характеристическое уравнение для (23) имеет вид $\alpha^2 + \lambda = 0$. В случае $\lambda \le 0$ только нулевая функция является решением задачи (23), (24); если же $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (23) имеет вид $\tilde{A}_p(x_1) = c_{1,p}\cos(\sqrt{\lambda}x_1) + c_{2,p}\sin(\sqrt{\lambda}x_1)$. Чтобы данная функция удовлетворяла условию (24), необходимо, чтобы $(c_{1,p}, c_{2,p})$ было решением системы

$$\begin{cases} c_{1,p} = 0, \\ c_{1,p}\cos(4\sqrt{\lambda}) + c_{2,p}\sin(4\sqrt{\lambda}) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{1,p} = 0, \\ c_{2,p}\sin(4\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Разыскиваем нетривиальные решения $\tilde{A}_1(x_1)$ и $\tilde{A}_2(x_1)$, поэтому $c_{2,p} \ne 0$, следовательно, $\sin(4\sqrt{\lambda}) = 0$, т.е. $\lambda = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\lambda > 0$, то собственными значениями (см. [14]) задачи (23), (24) являются $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. При этом соответствующие собственные функции, определенные с точностью до произвольной постоянной, имеют вид $\tilde{A}_{p,n}(x_1) = \sin\frac{\pi n x_1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $A_{p,n}(x_1) = \sin\frac{(x_1 + 2)\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому решения $V_p(x)$, $p = 1; 2$, будем искать в виде

$$V_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{p,n}(x_1)B_{p,n}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{p,n}(x_2)\sin\frac{(x_1 + 2)\pi n}{4}. \tag{25}$$

Но прежде разложим неоднородности уравнений (14) в ряды Фурье по синусам, т.е. представим

$$0.25(\tilde{k}_p(0) - \tilde{k}_p(x_2))v_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{p,n}(x_2)\sin\frac{(x_1 + 2)\pi n}{4}, \quad p = 1; 2. \tag{26}$$

Замечание 4. Функции $0.25(\tilde{k}_p(0) - \tilde{k}_p(x_2))v_p(x)$, $p = 1; 2$, принадлежат классу $L_2(-2; 2)$ по переменной x_1. Действительно, это вытекает из условий на функции $k_p(x_2)$, а следовательно, на функции $\tilde{k}_p(x_2)$, где $p = 1; 2$, и свойств $v_1(x)$ и $v_2(x)$, сформулированных ранее.

Несложно показать, что коэффициенты Фурье в (26) определяются в виде

$$D_{p,n}(x_2) = 0.125(\tilde{k}_p(0) - \tilde{k}_p(x_2))\int_{-2}^{2} v_p(y, x_2)\sin\frac{(y+2)\pi n}{4}dy, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Замечание 5. Из представлений (27), свойств функций $v_p(x)$ и условий на функции $k_p(x_2)$ (а следовательно, на функции $\tilde{k}_p(x_2)$) при $p = 1;2$, несложно доказать, что $D_{1,n}(x_2) \in C(0;2) \cap L_2(0;2)$, $D_{2,n}(x_2) \in C(-2;0) \cap L_2(-2;0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Подставив представления (25), (26) в уравнения (14) и условия (15)–(17), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B''_{p,n}(x_2) - 0.25(\tilde{k}_p(x_2) + 0.25(\pi n)^2)B_{p,n}(x_2) - D_{p,n}(x_2)) \times$$
$$\times \sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} = 0, \quad x \in D_{\operatorname{sgn}(3-2p)}, \quad p = 1;2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_{1,n}(+0) - B_{2,n}(-0))\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} = 0, \quad x_1 \in [-2;2],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((B_{1,n})'(+0) - (B_{2,n})'(-0)\right)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} = 0, \quad x_1 \in [-2;2],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_{1,n}(2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} = 0, \quad x_1 \in [-2;2],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_{2,n}(-2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} = 0, \quad x_1 \in [-2;2].$$

Так как функции $\sin\frac{(x_1+2)\pi}{4}$, $\sin\frac{(x_1+2)\pi}{2}$, $\sin\frac{(x_1+2)3\pi}{4}$, … являются линейно независимыми, то функции $B_{p,n}(x_2)$, где $p = 1;2$, $n \in \mathbb{N}$, должны быть решениями следующих задач:

$$B''_{p,n}(x_2) - 0.25(\tilde{k}_p(x_2) + 0.25(\pi n)^2)B_{p,n}(x_2) = D_{p,n}(x_2), \quad x_2 \in (0;2), \quad p = 1;2, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$B_{1,n}(+0) - B_{2,n}(-0) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(B_{1,n})'(+0) - (B_{2,n})'(-0) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$B_{1,n}(2) = B_{2,n}(-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем обозначения

$$Q_{p,n}(x_2) = 0.25(\tilde{k}_p(x_2) + 0.25(\pi n)^2), \quad p = 1;2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

$$B_n(x_2) = \begin{cases} B_{1,n}(x_2), & x_2 \in [0;2], \\ B_{2,n}(x_2), & x_2 \in [-2;0], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

$$D_n(x_2) = \begin{cases} D_{1,n}(x_2), & x_2 \in [0;2], \\ D_{2,n}(x_2), & x_2 \in [-2;0], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

$$Q_n(x_2) = \begin{cases} Q_{1,n}(x_2), & x_2 \in (0;2], \\ Q_{2,n}(x_2), & x_2 \in [-2;0), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

$$V(x_2) = \begin{cases} V_1(x), & x \in D_+, \\ V_2(x_2), & x \in D_-. \end{cases} \tag{32}$$

Тогда относительно $B_n(x_2)$ получаем следующие задачи:

$$B''_n(x_2) - Q_n(x_2)B_n(x_2) = D_n(x_2), \quad x_2 \in (0;2), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

$$B_n(+0) - B_n(-0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

$$(B_n)'(+0) - (B_n)'(-0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

$$B_n(\pm 2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Решениями задач (33)–(36) будем называть функции $B_n(x_2) \in H^1(-2;2)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{-2}^{2} (B_n'(x_2)\Psi'(x_2) + Q_n(x_2)B_n(x_2)\Psi(x_2))dx_2 = -\int_{-2}^{2} D_n(x_2)\Psi(x_2)dx_2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

при всех $\Psi(x_2) \in \dot{H}^1(-2;2)$ и условиям (36).

Так как при фиксированных $D_n(x_2) \in L_2(-2;2)$ линейные по $\Psi(x_2) \in \dot{H}^1(-2;2)$ функционалы $\int_{-2}^{2} D_n(x_2)\Psi(x_2)dx_2$, $n \in \mathbb{N}$, ограничены

$$\left|\int_{-2}^{2} D_n(x_2)\Psi(x_2)dx_2\right| \le \|D_n(x_2)\|_{L_2(-2;2)} \|\Psi(x_2)\|_{L_2(-2;2)} \le C\|D_n(x_2)\|_{L_2(-2;2)} \|\Psi(x_2)\|_{\dot{H}^1(-2;2)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $D_n(x_2)$ и $\Psi(x_2)$, то по теореме Рисса в $H^1(-2;2)$ существуют функции $\tilde{B}_n(x_2)$, $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$-\int_{-2}^{2} D_n(x_2)\Psi(x_2)dx_2 = \int_{-2}^{2} (\tilde{B}_n'(x_2)\Psi'(x_2) + Q_n(x_2)\tilde{B}_n(x_2)\Psi(x_2))dx_2, \quad n \in \mathbb{N},$$

при всех $\Psi(x_2) \in \dot{H}^1(-2;2)$, причем эти функции единственны и $\|\tilde{B}_n(x_2)\|_{\dot{H}^1(-2;2)} \le C\|D_n(x_2)\|_{L_2(-2;2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, в $H^1(-2;2)$ существуют единственные $B_n(x_2) = \tilde{B}_n(x_2)$, удовлетворяющие тождествам (37).

Так как $H^1(-2;2) \subset C([-2;2])$, то $B_n(x_2) \in C([-2;2])$, $n \in \mathbb{N}$. С учетом представлений (27), (28), (30), (31), условий на функции $k_p(x_2)$, а следовательно, на функции $\tilde{k}_p(x_2)$, где $p = 1;2$, и свойств функций $v_p(x)$, $p = 1;2$, при всех натуральных n функции $D_n(x_2) + Q_n(x_2)B_n(x_2)$ принадлежат классу функций, непрерывных на отрезках $[-2;0]$ и $[0;2]$ ($C^0([-2;0]) \cap C^0([0;2])$), следовательно, функции $\int_0^{x_2} (D_n(\xi) + Q_n(\xi)B_n(\xi))\,d\xi$, $n \in \mathbb{N}$ из класса $C^0([-2;2]) \cap C^1([-2;0]) \cap C^1([0;2])$.

Заметим, что

$$B_{n,0}(x_2) = \int_0^{x_2}\left(\int_0^{\eta} (D_n(\xi) + Q_n(\xi)B_n(\xi))\,d\xi\right)d\eta, \quad n \in \mathbb{N},$$

являются решениями (33), следовательно, для всех $\Psi(x_2) \in \dot{H}^1(-2;2)$ функции $B_{n,0}(x_2)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют равенствам

$$\int_{-2}^{2} (B_{n,0}'(x_2)\Psi'(x_2) + Q_n(x_2)B_n(x_2)\Psi(x_2))dx_2 = -\int_{-2}^{2} D_n(x_2)\Psi(x_2)dx_2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $B_{n,1}(x_2) = B_n(x_2) - B_{n,0}(x_2)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют равенствам $\int_{-2}^{2} B_{n,1}'(x_2)\Psi'(x_2)dx_2 = 0$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. функции $B_{n,1}'(x_2)$ на $(-2;2)$ имеют обобщенные производные, равные 0, следовательно, $B_{n,1}'(x_2) = \text{const}$, поэтому $B_{n,1}(x_2) \in C^2([-2;2])$. Из вышеизложенного получаем, что $B_n(x_2)$, $n \in \mathbb{N}$, и их первые производные непрерывны на отрезке $[-2;2]$, а их вторые производные являются непрерывными на отрезках $[-2;0]$ и $[0;2]$.

Итак, доказали следующее

Утверждение 5. *Функции* $B_n(x_2) \in H^1(-2;2)$, *удовлетворяющие интегральным тождествам* (37), *принадлежат классу функций* $C^1([-2;2]) \cap C^2([-2;0]) \cap C^2([0;2])$ *и на интервале* $(-2;2)$ *являются решениями уравнений* (33).

Замечание 6. Очевидно, что из утверждения 5 следует выполнение условий (34), (35).

Выясним поведение функций $B_n(x_2)$ при больших n. Рассмотрим однородные уравнения, соответствующие (33),

$$B_n''(x_2) - Q_n(x_2)B_n(x_2) = 0, \quad x_2 \in (0;2), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

или эквивалентные им системы

$$\begin{pmatrix} B_n(x_2) \\ B_n'(x_2) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_n(x_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n(x_2) \\ B_n'(x_2) \end{pmatrix}, \quad x_2 \in (0;2), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Согласно условиям на функции $k_p(x_2)$, а следовательно, на функции $\tilde{k}_p(x_2)$, где $p = 1;2$, функции $Q_n(x_2)$, $n \in \mathbb{N}$, принимают лишь положительные значения.

Подобно тому, как сделано в [18], можно доказать, что преобразования

$$B_n(x_2) = W_{1,n}(x_2) + W_{2,n}(x_2),$$
$$B_n'(x_2) = \left(\sqrt{Q_n(x_2)} - \frac{Q_n'(x_2)}{4Q_n(x_2)}\right) W_{1,n}(x_2) - \left(\sqrt{Q_n(x_2)} + \frac{Q_n'(x_2)}{4Q_n(x_2)}\right) W_{2,n}(x_2)$$

приводят системы (39) к виду

$$\begin{pmatrix} (W_{1,n})' \\ (W_{2,n})' \end{pmatrix} = \left[\sqrt{Q_n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q_n'}{4Q_n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} W_{1,n} \\ W_{2,n} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_n = 0.125 Q_n''(Q_n)^{-1.5} - 0.15625(Q_n')^2(Q_n)^{-2.5}$, $n \in \mathbb{N}$. Если в последних системах отбросить члены, содержащие $\alpha_n(x_2)$, то системы распадутся на пары независимых уравнений. Укороченные системы имеют решения $W_n^{[j]}(x_2) = B_{j,n}^0(x_{2,0}, x_2)e_j$, $j = 1;2$, где обозначено

$$e_1 = (1;0), \quad e_2 = (0;1); \quad B_{j,n}^0(x_{2,0}, x_2) = (Q_n(x_2))^{-0.25} e^{(-1)^j S_n(x_{2,0}, x_2)}; \tag{40}$$

$$S_n(x_{2,0}, x_2) = \int_{x_{2,0}}^{x_2} \sqrt{Q_n(t)}dt. \tag{41}$$

Пусть $\rho_n(x_{2,0}, x_2) = \left|\int_{x_{2,0}}^{x_2} |\alpha_n(t)|\,dt\right|$, тогда, воспользовавшись представлением $\alpha_n(x_2)$, представлениями (28), (31) и условиями на $\tilde{k}_1(x_2)$ и $\tilde{k}_2(x_2)$, получаем, что $\alpha_n(t) \le Cn^{-3}$, где C — некоторая постоянная, а следовательно, $\rho_n(x_{2,0}, x_2) = O(n^{-3})$ при $n \to +\infty$.

Аналогично тому, как сделано в [18, гл. 7, §2]), можно доказать следующее

Утверждение 6. *Уравнение* $B_n''(x_2) - Q_n(x_2)B_n(x_2) = 0$ *имеет решения* $B_n^{\{1\}}(x_2)$ *и* $B_n^{\{2\}}(x_2)$ *такие, что* $B_n^{\{1\}}(-2) = B_n^{\{2\}}(2) = 0$ *и при* $x_2 \in (-2;2)$

$$\left|(B_n^{\{1\}}(x_2))(B_{1,n}^0(x_{2,0}, x_2))^{-1} - 1\right| \le 2(e^{2\rho_n(-2, x_2)} - 1),$$

$$\left|(B_n^{\{2\}}(x_2))(B_{2,n}^0(x_{2,0}, x_2))^{-1} - 1\right| \le 2(e^{2\rho_n(x_2, 2)} - 1).$$

Замечание 7. Ранее получили, что $\rho_n(x_{2,0}, x_2) = O(n^{-3})$, следовательно, $\rho_n(-2, x_2) \le Cn^{-3}$, C – некоторая константа. Поэтому

$$e^{2\rho_n(-2,x_2)} - 1 = 2\rho_n(-2, x_2)\int_0^1 e^{2\rho_n(-2,x_2)z}dz \le 2\rho_n(-2, x_2)\int_0^1 e^{Cn^{-3}}dz \le C_1\rho_n(-2, x_2),$$

где C_1 – некоторая константа, т.е.

$$e^{2\rho_n(-2,x_2)} - 1 = O\left(\rho_n(-2, x_2)\right) = O(n^{-3}), \quad n \to +\infty.$$

Аналогично доказывается, что $e^{2\rho_n(x_2,2)} - 1 = O(n^{-3})$ при $n \to +\infty$.

Из утверждения 6 и замечания 7 можно сделать вывод, что

$$B_n^{\{j\}}(x_2) = B_{j,n}^0(x_{2,0}, x_2)(1 + O(n^{-3})), \quad j = 1; 2, \quad n \to +\infty.$$

Выберем $x_{2,0} = -2$ при $j = 1$ и $x_{2,0} = 2$ при $j = 2$ в $B_{j,n}^0(x_{2,0}, x_2)$, тогда, с учетом представлений (40), (41), для $n \to +\infty$ имеем

$$B_n^{\{1\}}(x_2) = (Q_n(x_2))^{-0.25} e^{-\int_{-2}^{x_2}\sqrt{Q_n(t)}dt}(1 + O(n^{-3})), \tag{42}$$

$$B_n^{\{2\}}(x_2) = \left(Q_n(x_2)\right)^{-0.25} e^{-\int_{x_2}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt}(1 + O(n^{-3})). \tag{43}$$

Замечание 8. Очевидно, что пары функций $B_n^{\{1\}}(x_2)$ и $B_n^{\{2\}}(x_2)$ являются линейно независимыми ($n \in \mathbb{N}$).

Решение задачи (33)–(36) будем искать в виде

$$B_n(x_2) = C_n^{\{1\}}(x_2)B_n^{\{1\}}(x_2) + C_n^{\{2\}}(x_2)B_n^{\{2\}}(x_2), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

где функции $C_n^{\{1\}}(x_2)$ и $C_n^{\{2\}}(x_2)$ будем находить с помощью метода вариации постоянных, следовательно, функции $(C_n^{\{1\}})'(x_2)$ и $(C_n^{\{2\}})'(x_2)$ должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений (см. [14])

$$\begin{aligned} &(C_n^{\{1\}})' B_n^{\{1\}} + (C_n^{\{2\}})' B_n^{\{2\}} = 0, \\ &(C_n^{\{1\}})'(B_n^{\{1\}})' + (C_n^{\{2\}})'(B_n^{\{2\}})' = -D_n \end{aligned} \tag{45}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Так как решения $B_n^{\{1\}}(x_2)$ и $B_n^{\{2\}}(x_2)$ линейно независимы, то определители Вронского отличны от нуля

$$w_n(x_2) = \begin{vmatrix} B_n^{\{1\}}(x_2) & B_n^{\{2\}}(x_2) \\ (B_n^{\{1\}})'(x_2) & (B_n^{\{2\}})'(x_2) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, имеет место тождество Остроградского-Лиувилля (см. [14]), $w_n(x_2) = w_n(0) = a_n = \text{const}$ при $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, компоненты решения $((C_n^{\{1\}})'(x_2), (C_n^{\{2\}})'(x_2))$ системы (45) имеют вид

$$(C_n^{\{1\}})'(x_2) = \frac{D_n(x_2)B_n^{\{2\}}(x_2)}{a_n}, \quad (C_n^{\{2\}})'(x_2) = -\frac{D_n(x_2)B_n^{\{1\}}(x_2)}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Решения $B_n(x_2)$, где $n \in \mathbb{N}$, должны удовлетворять условиям (34)–(36), следовательно, согласно представлениям (44), системам уравнений (45) и замечанию 6, функции $C_n^{\{1\}}(x_2)$ и $C_n^{\{2\}}(x_2)$, где $n \in \mathbb{N}$, должны удовлетворять следующим системам:

$$\begin{aligned} &C_n^{\{1\}}(-2)B_n^{\{1\}}(-2) + C_n^{\{2\}}(-2)B_n^{\{2\}}(-2) = 0, \\ &C_n^{\{1\}}(2)B_n^{\{1\}}(2) + C_n^{\{2\}}(2)B_n^{\{2\}}(2) = 0 \end{aligned}$$

при $n \in \mathbb{N}$. С учетом условий $B_n^{\{1\}}(-2) = B_n^{\{2\}}(2) = 0$ и предположения $C_n^{\{1\}}(2) = C_n^{\{2\}}(-2) = 0$, получаем верные тождества в последней системе. Тогда, проинтегрировав равенства (46) по отрезкам $[-2; x_2]$ и $[x_2; 2]$ соответственно, получаем представления функций $C_{p,n}^{[1]}(x_2)$ и $C_{p,n}^{[2]}(x_2)$

$$C_n^{\{1\}}(x_2) = \frac{1}{a_n}\int_{-2}^{x_2} D_n(\xi)B_n^{\{2\}}(\xi)d\xi, \quad C_n^{\{2\}}(x_2) = \frac{1}{a_n}\int_{x_2}^{2} D_n(\xi)B_n^{\{1\}}(\xi)d\xi, \tag{47}$$

где $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, с учетом (44), получаем представления функций $B_n(x_2)$ при $n \in \mathbb{N}$

$$B_n(x_2) = \frac{1}{a_n}\left(B_n^{\{1\}}(x_2)\int_{-2}^{x_2} D_n(\xi)B_n^{\{2\}}(\xi)d\xi + B_n^{\{2\}}(x_2)\int_{x_2}^{2} D_n(\xi)B_n^{\{1\}}(\xi)d\xi\right) = \int_{-2}^{2} G_n(\xi, x_2)D_n(\xi)d\xi, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{48}$$

где

$$G_n(\xi, x_2) = \frac{1}{a_n}\begin{cases} B_n^{\{1\}}(x_2)B_n^{\{2\}}(\xi), & -2 \le \xi \le x_2, \\ B_n^{\{1\}}(\xi)B_n^{\{2\}}(x_2), & x_2 \le \xi \le 2, \end{cases} \tag{49}$$

являются функциями Грина при $n \in \mathbb{N}$ (см. [14]).

Исследуем на непрерывность функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, решение задачи (14)–(17), являющиеся сужениями на D_+ и D_- соответственно функции $V(x)$ (см. представление (32)) и их первые производные.

В силу представлений (25), (29) и (32), функция $V(x)$ принимает вид

$$V(x) = \sum_{n=1}^{n_0} B_n(x_2)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi, x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}, \tag{50}$$

где $D_n(\xi)$ при $n \in \mathbb{N}$ заданы равенствами (30), а $G_n(\xi, x_2)$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ – равенствами (49). Ранее было показано, что $B_n(x_2) \in C^1([-2;2]) \cap C^2([-2;0]) \cap C^2([0;2])$, поэтому остается изучить поведение ряда

$$\sum\nolimits_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi, x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{(x_1+2)\pi n}{4}$$

и его первых производных.

Замечание 9. Согласно равенствам (42), (43), (49), имеем следующие представления функций Грина и их первых производных по переменной x_2 при $n \to +\infty$

$$G_n(\xi, x_2) = \frac{1}{a_n}\begin{cases} e^{-\left(\int_{-2}^{x_2}\sqrt{Q_n(t)}dt + \int_{\xi}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)}(Q_n(x_2)Q_n(\xi))^{-0.25}(1+O(n^{-3})), & -2 \le \xi \le x_2, \\ e^{-\left(\int_{-2}^{\xi}\sqrt{Q_n(t)}dt + \int_{x_2}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)}(Q_n(x_2)Q_n(\xi))^{-0.25}(1+O(n^{-3})), & x_2 \le \xi \le 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial G_n(\xi, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{a_n}\begin{cases} -(\sqrt{Q_n(x_2)} + 0.25(Q_n(x_2))^{-1}Q_n'(x_2))e^{-\left(\int_{-2}^{x_2}\sqrt{Q_n(t)}dt + \int_{\xi}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)}(Q_n(x_2)Q_n(\xi))^{-0.25}(1+O(n^{-3})), \\ -2 \le \xi \le x_2, \\ (\sqrt{Q_n(x_2)} - 0.25(Q_n(x_2))^{-1}Q_n'(x_2))e^{-\left(\int_{-2}^{\xi}\sqrt{Q_n(t)}dt + \int_{x_2}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)}(Q_n(x_2)Q_n(\xi))^{-0.25}(1+O(n^{-3})), \\ x_2 \le \xi \le 2. \end{cases}$$

Проведем несколько вспомогательных оценок на отрезке $[-2;2]$ при $n \to +\infty$. В силу представлений (28), (31) и условий на функции $k_p(x_2)$ (следовательно, на функции $\tilde{k}_p(x_2)$) при $p = 1;2$, справедливы следующие неравенства:

$$\left|\tilde{k}_p(0) - \tilde{k}_p(x_2)\right| \le C_2, \quad (Q_n(x_2)Q_n(\xi))^{-0.25} < C_2 n^{-1},$$

$$\sqrt{Q_n(x_2)} < \pi n(1 + C_2(\pi n)^{-2}), \quad (Q_n(x_2))^{-1} < (\pi n)^{-2}, \quad \left|Q_n'(x_2)\right| < C_2,$$

$$e^{-\left(\int_{-2}^{x_2}\sqrt{Q_n(t)}dt+\int_{\xi}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)} < e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(4+(x_2-\xi))} \le e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}}, \qquad -2 \le \xi \le x_2,$$

$$e^{-\left(\int_{-2}^{\xi}\sqrt{Q_n(t)}dt+\int_{x_2}^{2}\sqrt{Q_n(t)}dt\right)} < e^{-\frac{\pi n}{4\sqrt{2}}(4-(x_2-\xi))} \le e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}}, \qquad x_2 \le \xi \le 2,$$

где C_2 – некоторая неотрицательная константа.

Из приведенных выше неравенств получаем, что на отрезке $[-2;2]$ при $n \to +\infty$ справедливы следующие оценки для указанных функций Грина и их первых производных по переменной x_2

$$\left|G_n(\xi, x_2)\right| < C_3 e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}} n^{-1}(1 + O(n^{-3})), \tag{51}$$

$$\left|\frac{\partial G_{p,n}(\xi, x_2)}{\partial x_2}\right| < C_3 e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}}(1 + O(n^{-2})), \tag{52}$$

где C_3 – некоторая неотрицательная константа.

Перейдем к оценкам функций $D_n(\xi)$. Согласно представлениям (30), функция $D_n(\xi)$ принимает значения либо $D_{1,n}(\xi)$, либо $D_{2,n}(\xi)$, заданные равенствами (27). Проведем оценку только $D_{1,n}(\xi)$ (аналогичные неравенства можно получить для $D_{2,n}(\xi)$) при $n \to +\infty$.

Пользуясь представлениями (27) и интегрированием по частям, получаем

$$\begin{aligned} D_{1,n}(\xi) = 0.5(\pi n)^{-1}\Bigg\{&(\tilde{k}_1(0) - \tilde{k}_1(\xi))(v_1(-2,\xi) - \cos(\pi n)\cdot v_1(2,\xi)) + \\ &+ \int_{-2}^{2}(\tilde{k}_1(0) - \tilde{k}_1(\xi))\frac{\partial v_1(y,\xi)}{\partial y}\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy\Bigg\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Согласно условиям на функции $k_p(x_2)$, представлениям функций $\tilde{k}_p(x_2)$ при $p = 1;2$ и теореме Лагранжа (см. [19]), имеем $\tilde{k}_1(0) - \tilde{k}_1(\xi) = -\xi(\tilde{k}_1)'(\zeta)$, $\zeta \in (0;\xi)$. В дополнение к этому равенству воспользуемся асимптотическим разложением первой производной функции $v_1(y,\xi)$ по переменной y, тогда интеграл в представлении (53) примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{2}(\tilde{k}_1(0) - \tilde{k}_1(\xi))\frac{\partial v_1(y,\xi)}{\partial y}\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy = \frac{1}{2\pi}(\tilde{k}_1)'(\zeta)\Bigg\{q_0(-1)\int_{-2}^{2}\eta_1(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy - q_0(1)\times \\ &\times\int_{-2}^{2}\eta_2(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy + q_1(-1)\int_{-2}^{2}\eta_3(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy - q_1(1)\int_{-2}^{2}\eta_4(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy\Bigg\} + \\ &+ \int_{-2}^{2}\left(\tilde{k}_1(0) - \tilde{k}_1(\xi)\right)R_3(y,\xi)\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}dy, \end{aligned} \tag{54}$$

где $\eta_j(y,\xi) = \xi^2((y + (-1)^{j+1})^2 + \xi^2)^{-1}$, $\eta_{j+2}(y,\xi) = \xi\ln\sqrt{(y + (-1)^{j+1})^2 + \xi^2}$, $j = 1;2$. Очевидно, что $\left|\eta_j(y,\xi)\right| \le 1$, $\left|\eta_{j+2}(y,\xi)\right| \le \xi\ln\sqrt{9 + \xi^2}$ при $y \in [-2;2]$, $j = 1;2$.

Чтобы доказать ограниченность функций $\left|\eta_{j+2}(y,\xi)\right| \le \xi\ln\sqrt{9+\xi^2}$ при $\xi \in [0;2]$ рассмотрим два случая ($\eta_{j+2}(y,0) = 0$). Если $\delta \le \xi \le 2$, тогда $\xi\ln\sqrt{9+\xi^2} \le 2\ln\sqrt{13} < 3$. Если же $0 < \xi < \delta$, где δ – некоторая малая величина, тогда с помощью правила Лопиталя (см. [19]) имеем

$$\lim_{\xi\to+0}\xi\ln\sqrt{9+\xi^2} = \lim_{\xi\to+0}\frac{\ln\sqrt{9+\xi^2}}{\xi^{-1}} = \lim_{\xi\to+0}\frac{-\xi^3}{9+\xi^2} = 0.$$

Таким образом, при $y \in [-2;2]$ и $\xi \in [0;2]$ справедливы оценки

$$|\eta_j(y,\xi)| < 3, \quad j = \overline{1;4}. \tag{55}$$

Согласно оценкам (55), условию гладкости функций $q_{p-1}(x_1)$ и $k_p(x_2)$ при $p = 1;2$, представлениям (53), (54) и функций $\tilde{k}_p(x_2)$, где $p = 1;2$, и ограниченности функций $\cos\frac{\pi n(y+2)}{4}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $v_1(y,\xi)$, имеем оценку

$$|D_{1,n}(\xi)| < C_4 n^{-1}, \quad n \to +\infty, \tag{56}$$

где C_4 – некоторая неотрицательная постоянная. Вернемся к представлениям компонент решения задачи (14)–(17). Согласно оценкам (51), (52) и (56) при $n \to +\infty$, получаем

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi,x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2}|G_n(\xi,x_2)||D_n(\xi)|\,d\xi\right)\left|\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le$$
$$\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C_5 e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}} n^{-2}(1+O(n^{-3}));$$

$$\left|\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi,x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right)'_{x_1}\right| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 0.25\pi n\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi,x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\cos\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le$$
$$\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 0.25\pi n\left(\int_{-2}^{2}|G_n(\xi,x_2)||D_n(\xi)|\,d\xi\right)\left|\cos\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C_5 e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}} n^{-1}(1+O(n^{-3}));$$

$$\left|\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2} G_n(\xi,x_2)D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right)'_{x_2}\right| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2}\frac{\partial G_n(\xi,x_2)}{\partial x_2}D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| =$$
$$= \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{x2}\frac{\partial G_n(\xi,x_2)}{\partial x_2}D_n(\xi)d\xi\right)\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_{-2}^{2}\left|\frac{\partial G_n(\xi,x_2)}{\partial x_2}\right||D_n(\xi)|\,d\xi\right)\left|\sin\frac{\pi n(x_1+2)}{4}\right| \le$$
$$\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} C_5 e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2}}} n^{-1}(1+O(n^{-2})),$$

где C_5 – некоторая неотрицательная постоянная.

Таким образом, согласно представлениям (50), ряды $V(x)$, $\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V(x)}{\partial x_2}$ абсолютно сходятся при $n \to +\infty$, следовательно, согласно признаку Вейерштрасса (см. [19]), они сходятся равномерно. Кроме того, члены каждого из этих рядов непрерывны на $\bar{D}$, тогда функции $V(x)$, $\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial V(x)}{\partial x_2}$ непрерывны на $\bar{D}$ (см. [19]), поэтому, в силу представлений (13), (32), функции $\tilde{v}_p(x)$, $\frac{\partial \tilde{v}_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \tilde{v}_p(x)}{\partial x_2}$ имеют такие же асимптотические представления вблизи точек $(\pm 1;0)$, что и функции $v_p(x)$, $\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_2}$ соответственно ($p = 1;2$).

Использовав соотношения (12), можно построить соответствующие асимптотические представления функций $\tilde{u}_p(x)$ при $p = 1;2$ и их первых производных. Таким образом, справедливость теоремы, сформулированной ранее, доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Y.F., Erdogan F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 771–787.
2. *Choi H.J., Lee K.Y., Jin T.E.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone // part A: mechanical response. Int. J. Fract. 1998. V. 94(2). P. 103–122.
3. *Choi H.J., Jin T.E., Lee K.Y.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone // part B: thermal shock response. Int. J. Fract. 1998. V. 94(2). P. 123–135.
4. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // ASME Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60. P. 195–216.
5. *Martin P.A., Richardson J.D., Gray L.J., Berger J.* On Green's function for a three-dimensional exponentially graded elastic solid // Proc. R. Soc. Lond. A. 2002. V. 458. P. 1931–1947.
6. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем. 2010. № 2. С. 47–50.
7. *Логинова Е.А.* Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем. 2012. № 1. С. 157–161.
8. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Логинова Е.А., Петрова В.Е.* Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 4. С. 695–703.
9. *Черникова А.С.* Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2014. Вып. 3. С. 66–81.
10. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем. 2015. № 1. С. 111–134.
11. *Черникова А.С.* Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем. 2015. № 1. С. 188–206.
12. *Черникова А.С.* Свойства решения задачи о распределении тепла в биматериале с межфазной трещиной // Науч.-практич. журнал "Аспирант". 2015. № 3. С. 5–9.
13. *Глушко А.В.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 1 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 1007–1023.
14. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
15. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
16. *Глушко А.В., Баев А.Д., Рябенко А.С.* Уравнение математической физики. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. 520 с.
17. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, перев. с англ. Б.М. Левитана. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 475 с.
18. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 1985. 448 с.
19. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: учеб. для студ. вузов: в 3 т. Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа. М.: Дрофа, 2006. 350 с.