ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 7, с. 1258–1263

УДК 517.95

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ[1)]

© 2019 г. А. Г. Колобов[1], Т. В. Пак[1], А. Ю. Чеботарев[1,2,*]
([1] 690950 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный федеральный ун-т, Россия;
[2] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия)
*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 04.02.2019 г.
Переработанный вариант 04.02.2019 г.
Принята к публикации 11.03.2019 г.

В работе исследована стационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в трехмерной области в рамках P_1-приближения уравнения переноса излучения. Рассмотрена постановка, где не заданы краевые условия для интенсивности излучения, но имеется дополнительное краевое условие для температурного поля. Установлена нелокальная разрешимость задачи и показано, что множество решений гомеоморфно конечномерному компакту. Представлено условие единственности решения. Библ. 27.

Ключевые слова: уравнения радиационного теплообмена, диффузионное приближение, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.1134/S004446691907010X

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Стационарная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный и кондуктивный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующий вид [1]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [2].

Предполагается, что функция θ удовлетворяют следующему условию на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\theta = \theta_b. \tag{2}$$

Для задания стандартного краевого условия для интенсивности излучения

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \tag{3}$$

требуется знать функцию $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \Gamma$, описывающую отражающие свойства границы. Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$.

В случае, если функция γ неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе

$$\partial_n\theta = q_b. \tag{4}$$

В данной работе изучается краевая задача (1), (2), (4), на которую будем ссылаться как на задачу P. Зная решение указанной задачи, можно вычислить неизвестную функцию γ, используя уравнение (3).

Теоретический анализ краевых задач, связанных с моделями радиационного теплообмена, позволяет оценить адекватность соответствующих моделей. Отметим работы [3]–[19], посвященные краевым и обратным задачам, а также задачам управления для уравнений радиационно-

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект RFMEFI58417X0031).

го теплообмена в рамках P_1-приближения для уравнения переноса излучения. Анализ различных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представлен в [20]–[25], где также имеется хорошая библиография по сложному теплообмену. Нелокальная однозначная разрешимость нестационарной задачи для уравнений сложного теплообмена без краевых условий на интенсивность излучения и с условиями (2), (4) для температуры доказана в [26].

Вопрос о корректности сформулированной стационарной краевой задачи является полностью открытым. Основные результаты работы состоят в получении априорных оценок решения задачи P, на основе которых доказана нелокальная разрешимость. Кроме того, показано, что множество решений гомеоморфно компакту в конечномерном пространстве и представлено достаточное условие единственности решения.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Более точно, будем предполагать, что для области Ω справедливы свойства 1,2 из [27, гл. 3, параграф 8]. Через L^p, $1 \le p \le \infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s, $H_0^s(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^s(\Omega)$. Далее через $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ обозначаем скалярное произведение и норму в $L^2(\Omega)$,

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad \|f\|^2 = (f,f).$$

Пусть $V = \{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \partial_n v|_\Gamma = 0\}$. Условия на область Ω позволяют выбрать скалярное произведение в V в виде $[u,v] = (\Delta u, \Delta v)$, $\|f\|_V = \|\Delta f\|$.

В дальнейшем будем использовать следующие неравенства, означающие непрерывность вложений соответствующих функциональных пространств:

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \le K_0 \|u\|_V \quad \forall u \in V; \quad \|v\|^2 \le K_1 \left(\|\nabla v\|^2 + \int_\Gamma v^2 d\Gamma \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\theta_b = \hat{\theta}|_\Gamma$, $q_b = \partial_n \hat{\theta}|_\Gamma$, где $\hat{\theta} \in H^2(\Omega)$.

Для получения слабой формулировки задачи P заметим, что из уравнений (1) следует равенство

$$\Delta(a\theta + \alpha b\varphi) = 0.$$

Первое уравнение в (1) запишем в виде

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta = \frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi).$$

Умножим это уравнение на функцию Δv, где $v \in H_0^2(\Omega)$, и проинтегрируем по области Ω. Тогда получим

$$\left(-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta, \Delta v\right) = \frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi, \Delta v) = 0.$$

Определение. Пара $\theta \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ называется *слабым решением* задачи P, если

$$\begin{gathered}(-a\Delta\theta + g(\theta), \Delta v) = 0 \quad \forall v \in H_0^2(\Omega); \quad \theta|_\Gamma = \theta_b, \quad \partial_n\theta|_\Gamma = q_b; \\ b\kappa_a\varphi = -a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $g(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + a\kappa_a\alpha^{-1}\theta$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда существует слабое решение задачи* P.

Доказательство. Пусть θ, φ – слабое решение задачи P. Тогда $\theta = \hat{\theta} + \zeta$, где $\zeta \in V$ и ζ является решением задачи

$$a(\Delta\zeta, \Delta v) = (g(\hat{\theta} + \zeta) - a\Delta\hat{\theta},\ \Delta v) \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

Установим разрешимость задачи (6). Тогда пара $\theta = \hat{\theta} + \zeta$, $\varphi = -a(b\kappa_a)^{-1}\Delta\theta + |\theta|\theta^3$ будет решением задачи P.

Определим нелинейный оператор $A : V \to V$,

$$[Au, v] = [a^{-1}g(\hat{\theta} + u) - \Delta\hat{\theta}, \Delta v] \quad \forall v \in V.$$

Тогда задача (6) равносильна отысканию неподвижной точки оператора A, $\zeta = A\zeta$. Покажем сначала, что A вполне непрерывен. Пусть $\|u_{1,2}\|_V \le \rho$. Заметим, что

$$|g(\theta_1) - g(\theta_2)| \le \left(2b\kappa_a\left(|\theta_1^3| + |\theta_2^3|\right) + a\kappa_a\alpha^{-1}\right)|\theta_1 - \theta_2|.$$

Тогда имеем

$$a[Au_1 - Au_2, v] = (g(\hat{\theta} + u_1) - g(\hat{\theta} + u_2),\ \Delta v) \le \kappa_a\left(4b\left(\|\hat{\theta}\|_{C(\bar{\Omega})} + K_0\rho\right)^3 + a\alpha^{-1}\right)\|u_1 - u_2\|\|v\|_V.$$

Полагая здесь $v = a^{-1}(Au_1 - Au_2)$, получаем

$$\|Au_1 - Au_2\|_V \le \kappa_a\left(4a^{-1}b\left(\|\hat{\theta}\|_{C(\bar{\Omega})} + K_0\rho\right)^3 + \alpha^{-1}\right)\|u_1 - u_2\|.$$

Из последнего неравенства в силу компактности вложения $V \subset L^2(\Omega)$ следует, что оператор A вполне непрерывен. Таким образом, для доказательства разрешимости задачи P достаточно на основании принципа Лере–Шаудера доказать равномерную по $\lambda \in (0,1]$ ограниченность в V множества решений операторного уравнения $\zeta = \lambda A\zeta$. Указанное уравнение запишем в виде

$$(\Delta\zeta, \Delta v) = \lambda(a^{-1}g(\theta) - \Delta\hat{\theta},\ \Delta v) \quad \forall v \in V,$$

где $\theta = \hat{\theta} + \zeta$. Положим здесь $v = \zeta \in V$:

$$\|\Delta\zeta\|^2 = -\lambda a^{-1}(g'(\theta)\nabla\theta,\ \nabla\zeta) - \lambda(\Delta\hat{\theta}, \Delta\zeta). \tag{7}$$

Здесь $g'(\theta) = 4b\kappa_a|\theta|^3 + a\kappa_a\alpha^{-1} > 0$. Как следствие получаем

$$\|\Delta\zeta\|^2 + \lambda a^{-1}\left(g'(\theta)\nabla\theta,\ \nabla\theta\right) = \lambda a^{-1}(g'(\theta)\nabla\theta,\ \nabla\hat{\theta}) - \lambda(\Delta\hat{\theta}, \Delta\zeta) \le$$
$$\le \frac{\lambda}{2}a^{-1}\left(g'(\theta)\nabla\theta,\ \nabla\theta\right) + \frac{\lambda}{2}a^{-1}(g'(\theta)\nabla\hat{\theta},\ \nabla\hat{\theta}) + \frac{1}{2}\|\Delta\zeta\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta\hat{\theta}\|^2.$$

Следовательно, имеем

$$\|\zeta\|_V^2 + \lambda a^{-1}\left(g'(\theta)\nabla\theta,\ \nabla\theta\right) \le \lambda a^{-1}(g'(\theta)\nabla\hat{\theta},\ \nabla\hat{\theta}) + \|\Delta\hat{\theta}\|^2. \tag{8}$$

Оценим сверху величину $(|\theta|^3\,\nabla\hat{\theta},\ \nabla\hat{\theta})$. Пусть $\psi = |\theta|^{5/2}\operatorname{sign}\theta$. Поскольку $\theta \in H^2(\Omega)$, то $\psi \in H^1(\Omega)$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ получаем

$$(|\theta|^3\,\nabla\hat{\theta},\ \nabla\hat{\theta}) = (|\psi|^{6/5}\,\nabla\hat{\theta},\ \nabla\hat{\theta}) \le \|\psi\|^{6/5}\|\nabla\hat{\theta}\|^2_{L^5(\Omega)} \le \frac{3}{5}\varepsilon^{5/3}\|\psi\|^2 + \frac{2}{5}\varepsilon^{-5/2}\|\nabla\hat{\theta}\|^5_{L^5(\Omega)}.$$

Заметим, что $\|\psi\|^2 \le K_1\left(\|\nabla\psi\|^2 + \int_\Gamma \psi^2 d\Gamma\right)$ и при этом имеем

$$\|\nabla\psi\|^2 = \frac{25}{4}(|\theta|^3\,\nabla\theta,\ \nabla\theta), \quad \psi^2\big|_\Gamma = |\hat{\theta}|^5.$$

Пусть $3K_1\varepsilon^{5/3}/5 = 4/25$. Тогда из (8) выводим оценку

$$\|\zeta\|_V^2 \le \|\Delta\hat\theta\|^2 + \kappa_a\alpha^{-1}\|\nabla\hat\theta\|^2 + \frac{4}{5}b\kappa_a a^{-1}\left(3K_1\varepsilon^{5/3}\|\hat\theta\|^5_{L^5(\Gamma)} + 2\varepsilon^{-5/2}\|\nabla\hat\theta\|^5_{L^5(\Omega)}\right). \qquad (9)$$

Таким образом, для решений операторного уравнения $\zeta = \lambda A\zeta$ получена оценка $\|\zeta\|_V \le C_0$, не зависящая от λ, а значит, уравнение $\zeta = A\zeta$ и задача P разрешимы. Отметим, что $C_0 \to 0$, если $\|\hat\theta\|_{H^2(\Omega)} \to 0$.

4. АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ И УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Из доказательства теоремы 1 следует, что при выполнении условий (i) множество решений задачи P ограничено в пространстве $H^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Соответственно множество $\mathcal{R}$ решений задачи (6) ограничено в V и в пространстве $C(\bar\Omega)$. Оценим разность двух функций из множества $\mathcal{R}$.

Пусть $\zeta_{1,2} \in \mathcal{R}$, $\theta_{1,2} = \zeta_{1,2} + \hat\theta$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2 \in V$, $\chi = (|\theta_1|\theta_1^3 - |\theta_2|\theta_2^3)/(\theta_1 - \theta_2)$. Заметим, что в силу неравенства

$$0 \le \chi \le 2(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3),$$

функция $\chi \in C(\bar\Omega)$ и $M = \sup\{\|\chi\|_{C(\bar\Omega)},\, \zeta_{1,2}\in\mathcal{R}\} < +\infty$. Заметим, что

$$M \le 4\sup\left\{\|\hat\theta + \zeta\|^3_{C(\bar\Omega)},\, \zeta\in\mathcal{R}\right\} \le 4\left(\|\hat\theta\|_{C(\bar\Omega)} + K_0C_0\right)^3 \qquad (10)$$

и поэтому, в силу оценки (9) величина $M \to 0$, если $\|\hat\theta\|_{H^2(\Omega)} \to 0$.

Вычтем равенства (6), записанные для ζ_1 и для ζ_2, а затем положим $v = \zeta$. В результате получаем

$$a\|\Delta\zeta\|^2 = \kappa_a b(\chi\zeta,\Delta\zeta) - \kappa_a a\alpha^{-1}\|\nabla\zeta\|^2 \le b\kappa_a M\|\zeta\|\|\Delta\zeta\|. \qquad (11)$$

Поэтому из (11) следует неравенство

$$a\|\Delta\zeta\| \le b\kappa_a M\|\zeta\|. \qquad (12)$$

Собственные функции $\{w_j\} \subset V$ спектральной задачи

$$(\Delta w_j, \Delta v) = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v\in V, \quad j = 1,2,\ldots, (w_i, w_j) = \delta_{ij}, \quad 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$$

образуют базис пространств $L^2(\Omega)$ и V, причем $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Это следует, аналогично [27, гл. 3, параграф 17], из теоремы Гильберта–Шмидта для соответствующего компактного оператора в комплексном пространстве V. Поскольку $\lambda_1\|\zeta\|^2 \le \|\Delta\zeta\|^2$, то из оценки (12) следует единственность решения задачи (6) и соответственно задачи P, если выполняется условие

$$a\sqrt{\lambda_1} > b\kappa_a M. \qquad (13)$$

В общем случае из оценки (12), в силу компактности вложения пространства V в $L^2(\Omega)$, следует компактность множества $\mathcal{R}$. Более того, компактность вложения V в $L^2(\Omega)$ определяет конечномерную структуру множества $\mathcal{R}$. Действительно, обозначим через $L = \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ подпространство, натянутое на первые $(k-1)$ базисных функций, а через $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на L. Отметим, что если $\mathcal{P}u = 0$, то $\lambda_k\|u\|^2 \le \|\Delta u\|^2$. Поэтому отображение $\mathcal{P}:\mathcal{R}\to L$ обратимо, если k достаточно большое для выполнения условия

$$a\sqrt{\lambda_k} > b\kappa_a M. \qquad (14)$$

Действительно, в этом случае, если $\mathcal{P}\zeta_1 = \mathcal{P}\zeta_2$, где $\zeta_1\in\mathcal{R}$, $\zeta_2\in\mathcal{R}$, то $\mathcal{P}(\zeta_1-\zeta_2) = 0$ и в силу оценки (12) получаем $\zeta_1 = \zeta_2$. Таким образом, оператор $\mathcal{P}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{R}$ и некоторым компактом в конечномерном пространстве L, причем непрерывность обратного отображения вытекает из компактности множества $\mathcal{R}$. В результате верна

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда множество решений задачи P непусто и гомеоморфно компакту, лежащему в конечномерном пространстве, а если выполняется условие* (13), *то решение единственно.*

Замечание. Из оценок (10), (13) следует существование такого $\mu > 0$, зависящего от области и коэффициентов уравнений, что при выполнении условия $\|\hat{\theta}\|_{H^2(\Omega)} \le \mu$ решение единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Modest M.F.* Radiative Heat Transfer. Academic Press, 2003. 822 p.
2. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
3. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by the SP_1-system // Comm. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
4. *Tse O., Pinnau R., Siedow N.* Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy // Math. Models Methods Appl. Sci. 2012. V. 22. № 9. P. 1–29.
5. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu.* An iterative method for solving a complex heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. P. 9356–9362.
6. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
7. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
8. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
9. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
10. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
11. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 562–576.
12. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 275–282.
13. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
14. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.
15. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
16. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 816–823.
17. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
18. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
19. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 737–744.
20. *Амосов А.А.* Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 1. С. 93–104.
21. *Amosov A.A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // J. Math. Sc. 2010. V. 164. № 3. P. 309–344.

22. *Amosov A.* Unique solvability of a nonstationary problem of radiative-conductive heat exchange in a system of semitransparent bodies // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.

23. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.

24. *Amosov A.A.* Unique solvability of stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system of semitransparent bodies // J. Math. Sc. (United States). 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.

25. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sc. (United States). 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.

26. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D.* Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019.

27. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.