ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 7, с. 1184–1200

УДК 519.33

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ТИПА ФРОНТА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2019 г. А. А. Мельникова

(119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Россия)

e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 14.06.2018 г.
Переработанный вариант 10.02.2019 г.
Принята к публикации 11.03.2019 г.

Рассматривается периодическое решение типа фронта для сингулярно возмущенной системы параболических уравнений. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик пространственно-неоднородных сред. Подобные модели используются для описания процессов в экологии, биофизике, химической кинетике, физике горения и других областях. Доказана теорема существования решения типа фронта и установлена асимптотическая устойчивость периодического решения. Описан алгоритм построения асимптотического приближения решения. Библ. 28. Фиг. 2.

Ключевые слова: периодическое решение, внутренний переходный слой, устойчивость, сингулярное возмущение.

DOI: 10.1134/S0044466919070111

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются решения типа движущегося фронта для нелинейной системы параболических уравнений. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик пространственно-неоднородных сред. Модели такого типа используются в химической кинетике (см. [1]–[3]), биофизике (см. [4]), экологии (см. [5], [6]), физике сверхпроводников (см. [7]) и других областях и изучаются как аналитическими методами (см. [1], [2], [8]), так и в численных экспериментах (см. [3], [4]).

При моделировании переходных процессов решение модельной системы имеет вид движущегося фронта. В областях много больших, чем ширина фронта, появляются решения с резкими градиентами. Применение численных методов в данных задачах ограничено за счет значительной численной неустойчивости решений описанного типа. Появляется необходимость в аналитическом исследовании.

В работе исследуется двухкомпонентная система параболических уравнений, которая может применяться для моделирования неоднородных сред, параметры которых меняются со временем. Например, похожая модель используется для моделирования урбоэкосистем (см. [5], [6]). Цель работы состоит в доказательстве существования решения с внутренним переходным слоем для нового типа систем сингулярно возмущенных уравнений. Для этого используются асимптотические методы, а именно, теория контрастных структур (см. [9]). С исследованиями по решениям с внутренними переходными слоями для разных типов задач можно ознакомиться в работах [10]–[13].

Для достижения поставленной цели в работе решены следующие задачи: определены условия, при которых существует решение заявленного вида, доказана теорема существования решения для постановки с периодическими условиями по времени и в случае начальной задачи по времени, доказана устойчивость решения периодической задачи, представлен алгоритм получения асимптотического приближения решения типа фронта.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (номер проекта 18-11-00042).

Доказательство теоремы существования опирается на работы Пао по системам параболических уравнений (см. [14], [15]) и проведено по методу дифференциальных неравенств (см. [16]–[18]).

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 описана постановка краевой задачи для системы двух параболических уравнений с периодическими условиями по времени. В разд. 2 предложен алгоритм получения асимптотического приближения решения. При этом существенно используются результаты для системы уравнений в стационарном случае (см. [16]). В разд. 3 сформулирована и доказана теорема существования решения с внутренним переходным слоем для периодической задачи. В разд. 4 доказаны асимптотическая устойчивость и локальная единственность решения периодической задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon^4(u_{xx}-u_t)=f(u,v,x,t,\varepsilon), \quad \varepsilon^2(v_{xx}-v_t)=g(u,v,x,t,\varepsilon), \quad x\in(0;L), \quad t\in\mathbb{R}^+,\\ u_x(0,t,\varepsilon)=u_x(L,t,\varepsilon)=0, \quad v_x(0,t,\varepsilon)=v_x(L,t,\varepsilon)=0, \quad t\in\mathbb{R}^+,\end{gathered} \tag{1}$$

с условиями

$$u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon), \quad v(x,t,\varepsilon)=v(x,t+T,\varepsilon), \quad x\in[0;L], \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, функции $f(u,v,x,t,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,t,\varepsilon)$ достаточно гладкие и T-периодические по переменной t.

Целью работы является доказательство теоремы существования решения в виде периодического фронта задачи (1), (2), получение алгоритма построения асимптотического приближения решения, доказательство локальной единственности и асимптотической устойчивости решения.

Требование гладкости функций f и g связано с предполагаемым порядком точности асимптотического приближения. Для построения асимптотики порядка n требуется, чтобы функции $f(u,v,x,t,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,t,\varepsilon)$ принадлежали классу C^{n+3}.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

(H_1) Уравнение $f(u,v,x,t,0)=0$ имеет ровно три корня относительно переменной u: $u=\varphi^l(v,x,t)$, $u=\varphi^0(v,x,t)$, $u=\varphi^r(v,x,t)$, такие что $\varphi^l(v,x,t)<\varphi^0(v,x,t)<\varphi^r(v,x,t)$ всюду в области $\{(v,x,t)\in I_v\times[0;L]\times\mathbb{R}^+\}$; причем $f_u(\varphi^{l,r}(v,x,t),v,x,t,0)>0$, и $f_u(\varphi^0(v,x,t),v,x,t,0)<0$. (Здесь I_v – некоторая область изменения переменной v.)

(H_2) Каждое из уравнений $h^{l,r}(v,x,t):=g(\varphi^{l,r}(v,x,t),v,x,t,0)=0$, имеет единственное решение $v=v^{l,r}(x,t)\in I_v$; причем неравенства $v^l(x,t)<v^r(x,t)$ и $h_v^{l,r}(v^{l,r}(x,t),x,t)>0$ выполнены всюду в области $\{(x,t):[0;L]\times\mathbb{R}^+\}$.

(H_3) Неравенства $f_v(u,v,x,t,0)<0$ и $g_u(u,v,x,t,0)<0$ выполнены всюду в области $\{(u,v,x,t)\in I_u\times I_v\times[0;L]\times\mathbb{R}^+\}$.

(H_4) Существует единственное T-периодическое решение $v_0(t)$, $x_0(t)$ системы уравнений

$$\begin{gathered}J(v,x,t):=\int\limits_{v^l(x,t)}^{v} h^l\left(v',x,t\right)dv'+\int\limits_{v}^{v^r(x,t)} h^r\left(v',x,t\right)dv'=0,\\ Y(v,x,t):=\int\limits_{\varphi^l(v,x,t)}^{\varphi^r(v,x,t)} f(u,v,x,t,0)du=0,\end{gathered} \tag{3}$$

определенное в области $\{x(t)\in(0;L),\ v(t)\in(v^l(x,t),v^r(x,t)),\ (x,t)\in[0;L]\times\mathbb{R}^+\}$.

(H_5) Определитель Якоби системы уравнений (3) удовлетворяет неравенству $\dfrac{D(J,Y)}{D(v,x)}\big(v_0(t),x_0(t)\big)<0$, $t\in\mathbb{R}^+$.

Исследуется вопрос существования периодического решения системы уравнений (1), (2) в форме движущегося фронта. Подобная задача с другим дифференциальным оператором и без периодических условий решена в работе [19]. Решение типа фронта в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}^+$ имеет внутренний переходный слой в малой окрестности некоторой точки $x = x_{tr}(t) \in (0; L)$. Условия H_1 и H_2 определяют устойчивые корни *вырожденной системы* (1) (системы (1) при $\varepsilon = 0$), между которыми образуется переходный слой. Предполагается, что при $x < x_{tr}(t)$ решение близко к корням $\varphi^l(v, x, t)$, $v^l(x, t)$ вырожденной системы (1), а при $x > x_{tr}(t)$ – близко к корням $\varphi^r(v, x, t)$, $v^r(x, t)$ для u и v компонент соответственно.

Физический смысл условия H_3 в задачах химической кинетики, где величины u и v имеют смысл концентраций веществ, состоит в том, как изменение концентрации одной из компонент влияет на скорость изменения второй составляющей системы. Предполагая, что производные f_v, g_u сохраняют знак во всей области изменения переменных, возможны четыре варианта комбинаций знаков производных f_v, g_u, из которых в данной работе рассматривается один. В случае разных знаков производных изменится способ построения верхнего и нижнего решений в методе доказательства теоремы существования (см. [21]).

Условие H_4 определяет зависимость от времени положения фронта в нулевом приближении по малому параметру. Опираясь на исследования об устойчивости контрастных структур (см., например, [20]), можно предположить, что условие H_5 на знак якобиана системы уравнений (3) связано с устойчивостью решения с внутренним переходным слоем для случая системы уравнений. Знак якобиана определяет устойчивость ступеньки, идущей от меньшего корня вырожденной системы к большему. Однако обоснование этого утверждения выходит за рамки данной работы.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Точка локализации фронта (x_{tr}, t) описывает некоторую кривую $x = x_{tr}(t)$ на плоскости (x, t), которая определяет положение внутреннего слоя на сегменте $[0; L]$ в момент времени t. Кривая $x = x_{tr}(t)$ разделяет область $\bar{D}_T : (x, t) \in [0; L] \times \mathbb{R}^+$ на две подобласти $\bar{D}_T^l$ и $\bar{D}_T^r$: $\bar{D}_T^l : (x, t) \in [0; x_{tr}(t)] \times \mathbb{R}^+$, $\bar{D}_T^r : (x, t) \in [x_{tr}(t); L] \times \mathbb{R}^+$.

Составим асимптотическое приближение решения по методу Васильевой с соответствующей модификацией для задач с внутренними слоями (см. [22]) отдельно в областях $\bar{D}_T^l$ и $\bar{D}_T^r$:

$$u = \begin{cases} u^l, & (x, t) \in \bar{D}_T^l, \\ u^r, & (x, t) \in \bar{D}_T^r; \end{cases} \qquad v = \begin{cases} v^l, & (x, t) \in \bar{D}_T^l, \\ v^r, & (x, t) \in \bar{D}_T^r. \end{cases}$$

Решение представляется суммой функций, каждая из которых описывает кривую решения на определенной части сегмента $[0; L]$. Функции $u^{l,r}$, $v^{l,r}$ имеют вид

$$\begin{aligned} u^{l,r} &= \bar{u}^{l,r}(x, t, \varepsilon) + Q^{l,r}u(\xi, t, \varepsilon) + M^{l,r}u(\sigma, t, \varepsilon) + P^{l,r}u(\zeta_{l,r}, \varepsilon) + R^{l,r}u(\eta_{l,r}, \varepsilon), \\ v^{l,r} &= \bar{v}^{l,r}(x, t, \varepsilon) + Q^{l,r}v(\xi, t, \varepsilon) + M^{l,r}v(\sigma, t, \varepsilon) + P^{l,r}v(\zeta_{l,r}, \varepsilon) + R^{l,r}v(\eta_{l,r}, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь функции $\bar{u}^{l,r}(x, t, \varepsilon)$, $\bar{v}^{l,r}(x, t, \varepsilon)$ представляют регулярную часть решения; $Q^{l,r}u(\xi, t, \varepsilon)$, $Q^{l,r}v(\xi, t, \varepsilon)$, $M^{l,r}u(\sigma, t, \varepsilon)$, $M^{l,r}v(\sigma, t, \varepsilon)$ описывают внутренний переходный слой, $P^{l,r}u(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$, $P^{l,r}v(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$, $R^{l,r}u(\eta_{l,r}, \varepsilon)$, $R^{l,r}v(\eta_{l,r}, \varepsilon)$ – функции пограничного слоя, описывающие решение в окрестности точек $x = 0$ и $x = L$. Мы используем переменные переходного слоя $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x_{tr})$, $\sigma = \varepsilon^{-2}(x - x_{tr})$ и переменные пограничного слоя $\zeta_l = x/\varepsilon$, $\zeta_r = (L - x)/\varepsilon$, $\eta_l = x/\varepsilon^2$, $\eta_r = (L - x)/\varepsilon^2$.

Функции в представлениях (4) ищем в виде рядов по степеням малого параметра ε, например: $\bar{u}^l(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^l(x, t) + \varepsilon\bar{u}_1^l(x, t) + \varepsilon^2\bar{u}_2^l(x, t) + \ldots + \varepsilon^n\bar{u}_n^l(x, t) + \ldots$. Члены этих рядов могут быть получены по стандартной процедуре (см. [22]) отдельно справа и слева от точки x_{tr}.

Задача рассматривается в области $x \in [0; L]$, соответственно области изменения переменных ξ и σ: $\xi \in [-x_{tr}/\varepsilon; (L - x_{tr})/\varepsilon]$ и $\sigma \in [-x_{tr}/\varepsilon; (L - x_{tr})/\varepsilon^2]$, а области изменения переменных $\zeta_{l,r}$ и $\eta_{l,r}$: $\zeta_{l,r} \in [0; L/\varepsilon]$ и $\eta_{l,r} \in [0; L/\varepsilon^2]$.

Параметр ε появляется в модельных задачах после нормировки на характерный масштаб области изменения переменной x и его малость означает, что ширина фронта много меньше размеров области. Назначение погранслойных рядов в том, чтобы совместно с регулярной частью удовлетворять граничным условиям. Известно (см. [22]), что в подобных задачах функции пограничного слоя экспоненциально затухают с ростом погранслойной переменной. Тем самым они существенны лишь в малых окрестностях граничных точек – так называемых пограничных слоях и стремятся к нулю быстрее любой степени ε вне малой окрестности граничных точек. Аналогичные рассуждения справдливы для функций переходного слоя.

Предполагая, что асимптотика строится при $\varepsilon \to 0$, можно использовать допущение, что $L\varepsilon^{-1} \to +\infty$ и область изменения переменных $\zeta_{l,r}$ и $\eta_{l,r}$: $\zeta_{l,r}, \eta_{l,r} \in [0; +\infty)$. Аналогично, получаем область изменения переменных ξ и σ: $\xi, \sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Для функций переходного слоя потребуем выполнения условия убывания на бесконечности

$$\begin{gathered} Q_i^{l,r} u(\xi, t) \to 0, \quad Q_i^{l,r} v(\xi, t) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \mp\infty, \\ M_i^{l,r} u(\sigma, t) \to 0, \quad M_i^{l,r} v(\sigma, t) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to \mp\infty, \quad i = 0, 1, \ldots; \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{5}$$

Функции пограничных слоев также должны удовлетворять условию убывания к нулю при $\zeta_{l,r}, \eta_{l,r} \to +\infty$.

Обозначим через $v_{tr}(t)$ значение, которое принимает v-компонента решения в точке $x = x_{tr}(t)$ в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}^+$.

На плоскости (x, t) кривая $x = x_{tr}(t)$ определяется равенством $u(x_{tr}(t), t) = \varphi^0(v_{tr}(t), x_{tr}(t), t)$.

Функции u^l и u^r, v^l и v^r сшиваются непрерывно в точке $x = x_{tr}$:

$$\bar{v}^l(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + Q^l v(0, t, \varepsilon) + M^l v(0, t, \varepsilon) = \bar{v}^r(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + Q^r v(0, t, \varepsilon) + M^r v(0, t, \varepsilon) = v_{tr}(t); \tag{6}$$

$$\bar{u}^l(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + Q^l u(0, t, \varepsilon) + M^l u(0, t, \varepsilon) = \bar{u}^r(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + Q^r u(0, t, \varepsilon) + M^r u(0, t, \varepsilon)\varphi^0(v_{tr}(t), x_{tr}(t), t). \tag{7}$$

Функции $v_{tr}(t)$ и $x_{tr}(t)$ представляются рядами по степеням параметра ε:

$$v_{tr}(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \ldots, \tag{8}$$

$$x_{tr}(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots . \tag{9}$$

При этом производные рядов (4) также непрерывны на кривой $x = x_{tr}(t)$ (условие C^1-сшивания)

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{v}^l}{\partial x}(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + \frac{\partial Q^l v}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial M^l v}{\partial \sigma}(0, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial x}(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + \frac{\partial Q^r v}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial M^r v}{\partial \sigma}(0, t, \varepsilon); \tag{10}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial x}(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial Q^l u}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) + \frac{\partial M^l u}{\partial \sigma}(0, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial x}(x_{tr}(t), t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial Q^r u}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) + \frac{\partial M^r u}{\partial \sigma}(0, t, \varepsilon). \tag{11}$$

В дальнейшем в некоторых случаях мы будем опускать аргумент у функций $x_{tr}(t)$ и $v_{tr}(t)$.

Пограничные функции $P^{l,r}u(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$, $P^{l,r}v(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$, $R^{l,r}u(\eta_{l,r}, \varepsilon)$, $R^{l,r}v(\eta_{l,r}, \varepsilon)$ строятся стандартным способом (см. [22]). Ряды пограничных функций не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана, ряды $P^{l,r}u(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$, $P^{l,r}v(\zeta_{l,r}, \varepsilon)$ начинаются с членов порядка ε, ряды $R^{l,r}u(\eta_{1,2}, \varepsilon)$ – с членов порядка ε^2, а ряды $R^{l,r}v\left(\eta_{l,r}, \varepsilon\right)$ – с членов порядка ε^4. Функции $P_i^{l,r}u(\zeta_{l,r})$, $P_i^{l,r}v(\zeta_{l,r})$ экспоненциально убывают при $\zeta_{l,r} \to +\infty$, а функции $R_i^{l,r}u(\eta_{l,r})$, $R_i^{l,r}v(\eta_{l,r})$ экспоненциально убывают при $\eta_{l,r} \to +\infty$. Умножим все пограничные функции на срезающие функции (см. [23]), в результате чего пограничные функции станут равными нулю вне некоторых конечных окрестностей граничных точек и, таким образом, не войдут в левые части равенств (2), (7) и в равенства (10), (11).

2.1. Регулярная часть решения

Функции регулярной части $\bar{u}_k^{l,r}(x,t)$, $\bar{v}_k^{l,r}(x,t)$, $k = 0, 1, \ldots$, определяются из следующих систем уравнений:

$$\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2\bar{u}^{l,r}}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar{u}^{l,r}}{\partial t}\right) = f(\bar{u}^{l,r}, \bar{v}^{l,r}, x, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\bar{v}^{l,r}}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar{v}^{l,r}}{\partial t}\right) = g(\bar{u}^{l,r}, \bar{v}^{l,r}, x, t, \varepsilon), \quad x \in [0; L], \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

В системы подставляем функции $\bar{u}^{l,r}$ и $\bar{v}^{l,r}$ в виде рядов $\bar{u}^{l,r}(x,t) = \bar{u}_0^{l,r}(x,t) + \varepsilon\bar{u}_1^{l,r}(x,t) + \ldots$ $\ldots + \varepsilon^n\bar{u}_n^{l,r}(x,t) + \ldots$, $\bar{v}^{l,r}(x,t) = \bar{v}_0^{l,r}(x,t) + \varepsilon\bar{v}_1^{l,r}(x,t) + \ldots + \varepsilon^n\bar{v}_n^{l,r}(x,t) + \ldots$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε и получаем уравнения для определения $\bar{u}_k^{l,r}(x,t)$, $\bar{v}_k^{l,r}(x,t)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Функции $\bar{u}_0^{l,r}(x,t)$, $\bar{v}_0^{l,r}(x,t)$ удовлетворяют вырожденной системе (1)

$$f(\bar{u}_0^{l,r}, \bar{v}_0^{l,r}, x, t, 0) = 0, \quad g(\bar{u}_0^{l,r}, \bar{v}_0^{l,r}, x, t, 0) = 0,$$

решения которой определены условиями H_1 и H_2

$$\bar{v}_0^l(x,t) = v^l(x,t), \quad \bar{v}_0^r(x,t) = v^r(x,t);$$

$$\bar{u}_0^l(x,t) = \varphi^l(v^l(x,t), x, t, 0) =: \bar{\varphi}^l(x,t), \quad \bar{u}_0^r(x,t) = \varphi^r(v^r(x,t), x, t, 0) =: \bar{\varphi}^r(x,t).$$

Функции $\bar{u}_k^{l,r}(x,t)$ и $\bar{v}_k^{l,r}(x,t)$ при $k \geq 1$ определяются из линейных систем

$$\bar{f}_u^{l,r}(x,t)\bar{u}_k^{l,r} + \bar{f}_v^{l,r}(x,t)\bar{v}_k^{l,r} = \bar{F}_k^{l,r}(x,t), \quad \bar{g}_u^{l,r}(x,t)\bar{u}_k^{l,r} + \bar{g}_v^{l,r}(x,t)\bar{v}_k^{l,r} = \bar{G}_k^{l,r}(x,t). \tag{12}$$

Здесь

$$\bar{f}_u^l(x,t) = f_u(\bar{\varphi}^l(x,t), v^l(x,t), x, t, 0), \quad \bar{f}_u^r(x,t) = f_u(\bar{\varphi}^r(x,t), v^r(x,t), x, t, 0),$$

аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{l,r}(x,t)$, $\bar{g}_u^{l,r}(x,t)$, $\bar{g}_v^{l,r}(x,t)$, а $\bar{F}_k^{l,r}(x,t)$ и $\bar{G}_k^{l,r}(x,t)$ – известные на k-м шаге функции, рекуррентно выражающиеся через $\bar{u}_i^{l,r}(x,t)$, $\bar{v}_i^{l,r}(x,t)$ с номерами $i < k$.

Системы (12) разрешимы единственным образом, поскольку определители $\Delta^{l,r}(x,t) = \bar{f}_u^{l,r}(x,t)\bar{g}_v^{l,r}(x,t) - \bar{f}_v^{l,r}(x,t)\bar{g}_u^{l,r}(x,t) = \bar{f}_u^{l,r}(x,t)h_v^{l,r}(x,t) > 0$ отличны от нуля всюду на сегменте $[0; L]$ по условиям H_1 и H_2.

2.2. Функции переходного слоя

Перепишем дифференциальные операторы системы (1) в переменных (ξ, t) и (σ, t). Например, оператор $\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)$ в переменных (ξ, t) принимает вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \varepsilon^3\frac{dx_{tr}}{dt}\frac{\partial}{\partial\xi} - \varepsilon^4\frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнения для функций $Q_i^{l,r}u(\xi,t)$, $Q_i^{l,r}v(\xi,t)$, $i = 0, 1, \ldots$, получаются по методу Васильевой с соответствующей модификацией для систем уравнений (см. [19], [22]). Будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенств

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 Q^{l,r}u}{\partial\xi^2} - \varepsilon^4\frac{\partial Q^{l,r}u}{\partial t} + \varepsilon^3 W\frac{\partial Q^{l,r}u}{\partial\xi} = Q^{l,r}f, \quad \frac{\partial^2 Q^{l,r}v}{\partial\xi^2} - \varepsilon^2\frac{\partial Q^{l,r}v}{\partial t} + \varepsilon W\frac{\partial Q^{l,r}v}{\partial\xi} = Q^{l,r}g, \tag{13}$$

считая, что функции $Q^{l,r}u$, $Q^{l,r}v$ – это ряды по степеням параметра ε. Здесь

$$Q^{l,r}f := f(\bar{u}^{l,r}(\varepsilon\xi + x_{tr}) + Q^{l,r}u, \bar{v}^{l,r}(\varepsilon\xi + x_{tr}) + Q^{l,r}v, \varepsilon\xi + x_{tr}, t, \varepsilon) - \\ - f(\bar{u}^{l,r}(\varepsilon\xi + x_{tr}), \bar{v}^{l,r}(\varepsilon\xi + x_{tr}), \varepsilon\xi + x_{tr}, t, \varepsilon).$$

Обозначение $Q^{l,r}g$ имеет тот же смысл. Через W обозначена производная dx_{tr}/dt, которая определяет скорость фронта.

Уравнения для функций $M_i^{l,r}u(\sigma,t)$, $M_i^{l,r}v(\sigma,t)$, $i = 0, 1, \ldots$, получаются приравниванием коэффициентов при ε^i в разложениях обеих частей равенств

$$\frac{\partial^2 M^{l,r}u}{\partial\sigma^2} - \varepsilon^4\frac{\partial M^{l,r}u}{\partial t} + \varepsilon^2 W\frac{\partial M^{l,r}u}{\partial\sigma} = M^{l,r}f, \quad \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 M^{l,r}v}{\partial\sigma^2} - \varepsilon^2\frac{\partial M^{l,r}v}{\partial t} + W\frac{\partial M^{l,r}v}{\partial\sigma} = M^{l,r}g, \tag{14}$$

где

$$M^{l,r}f := f(\bar{u}^{l,r} + Q^{l,r}u + M^{l,r}u, \bar{v}^{l,r} + Q^{l,r}v + M^{l,r}v, \varepsilon^2\sigma + x_{tr}, t, \varepsilon) - \\ - f(\bar{u}^{l,r} + Q^{l,r}u, \bar{v}^{l,r} + Q^{l,r}v, \varepsilon^2\sigma + x_{tr}, t, \varepsilon).$$

Обозначение $M^{l,r}g$ имеет тот же смысл. Заметим, что для функций $\bar{u}^{l,r}$ и $\bar{v}^{l,r}$ аргумент x заменяется на $\varepsilon^2\sigma + x_{tr}$, а для $Q^{l,r}u$, $Q^{l,r}v$ аргумент ξ заменяется на $\varepsilon\sigma$.

2.3. Функции переходного слоя нулевого порядка

Сформулируем задачи для функций $M_0^{l,r}v(\sigma,t)$ и $M_1^{l,r}v(\sigma,t)$. Уравнения получаются из (14) и условий (5)

$$\frac{\partial^2 M_i^l v}{\partial\sigma^2} = 0, \quad \sigma \le 0, \quad \frac{\partial^2 M_i^r v}{\partial\sigma^2} = 0, \quad \sigma \ge 0, \quad M_i^l v(-\infty,t) = 0, \quad M_i^r v(+\infty,t) = 0, \quad i = 0,1.$$

Здесь и далее переменная $t \in \mathbb{R}^+$ рассматривается как параметр. Задачи имеют только тривиальные решения $M_0^{l,r}v(\sigma,t) \equiv 0$, $M_1^{l,r}v(\sigma,t) \equiv 0$.

Систему уравнений для функций $Q_0^{l,r}u(\xi,t)$ и $Q_0^{l,r}v(\xi,t)$ получаем из (13)

$$f(\bar{\varphi}^{l,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}u, v^{l,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}v, x_{tr}(t), t, 0) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 Q_0^{l,r}v}{\partial\xi^2} = g(\bar{\varphi}^{l,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}u, v^{l,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}v, x_{tr}(t), t, 0). \tag{16}$$

Здесь индекс “l” соответствует $\xi \le 0$, а индекс “r” – условию $\xi \ge 0$.

Из равенств (15) по условию H_1 получаем уравнения

$$\bar{\varphi}^{l,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}u(\xi,t) = \varphi^{l,r}(v^{1,r}(x_{tr}(t),t) + Q_0^{l,r}v(\xi,t), x_{tr}(t), t). \tag{17}$$

Подставим выражения (17) в уравнения (16) и получим уравнения для функций $Q_0^{l,r}v$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^l v}{\partial\xi^2} &= h^l(v^l(x_{tr}(t),t) + Q_0^l v, x_{tr}(t),t), \quad \xi \le 0, \\ \frac{\partial^2 Q_0^r v}{\partial\xi^2} &= h^r(v^r(x_{tr}(t),t) + Q_0^r v, x_{tr}(t),t), \quad \xi \ge 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $h^l(v,x,t)$, $h^r(v,x,t)$ – это функции, определенные условием H_2.

Граничные условия для $Q_0^{l,r}v$ при $\xi = 0$ получаются из (2), а условия на бесконечности – из (5)

$$\begin{gathered} Q_0^l v(0,t) = v_{tr}(t) - v^l(x_{tr}(t),t), \quad Q_0^r v(0,t) = v_{tr}(t) - v^r(x_{tr}(t),t), \\ Q_0^l v(-\infty,t) = 0, \quad Q_0^r v(+\infty,t) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Применим метод понижения степени в задачах (18)–(19) и придем к уравнениям первого порядка с условиями (19) при $\xi = 0$

$$\frac{\partial Q_0^l v}{\partial \xi} = \sqrt{2}\left(\int\limits_{v^l(x_{tr}(t),t)}^{v^l(x_{tr}(t),t)+Q_0^l v} h^l(v, x_{tr}(t), t)dv\right)^{1/2}, \quad \xi \le 0,$$

$$\frac{\partial Q_0^r v}{\partial \xi} = \sqrt{2}\left(\int\limits_{v^3(x_{tr}(t),t)}^{v^r(x_{tr}(t),t)+Q_0^r v} h^r(v, x_{tr}(t), t)dv\right)^{1/2}, \quad \xi \ge 0.$$

Для функций $Q_0^{l,r}u(\xi,t)$ и $Q_0^{l,r}v(\xi,t)$ имеют место экспоненциальные оценки (см. [24])

$$\left|Q_0^{l,r}u(\xi)\right| \le C\exp(-\kappa|\xi|), \quad \left|Q_0^{l,r}v(\xi)\right| \le C\exp(-\kappa|\xi|), \tag{20}$$

где C и κ – здесь и далее положительные числа, не зависящие от ε.

Уравнения для функций $M_0^{l,r}u(\sigma,t)$ получаются из первого уравнения (14) (мы использовали равенство (17), взятое при $\xi = 0$ и уравнения (19))

$$\frac{\partial^2 M_0^{l,r}u}{\partial \sigma^2} = f(\varphi^{l,r}(v_{tr}(t), x_{tr}(t), t) + M_0^{l,r}u, v_{tr}(t), x_{tr}(t), t, 0). \tag{21}$$

Начальные условия для функций $M_0^{l,r}u(\sigma,t)$ получаются из (7) в нулевом порядке разложения по степеням ε, а условия на бесконечности – из (5)

$$M_0^{l,r}u(0,t) = \varphi^0(v_{tr}(t), x_{tr}(t), t) - \varphi^{l,r}(v_{tr}(t), x_{tr}, t), \quad M_0^{l,r}u(\mp\infty, t) = 0. \tag{22}$$

Решения задач (21), (22) можно получить из уравнений первого порядка

$$\frac{\partial M_0^l u}{\partial \sigma} = \sqrt{2}\left(\int\limits_{\varphi^l(v_{tr},x_{tr},t)}^{\varphi^l(v_{tr},x_{tr},t)+M_0^l u(\sigma,t)} f(u, v_{tr}, x_{tr}, t, 0)du\right)^{1/2}, \quad \sigma \le 0,$$

$$\frac{\partial M_0^r u}{\partial \sigma} = \sqrt{2}\left(\int\limits_{\varphi^r(v_{tr},x_{tr},t)}^{\varphi^r(v_{tr},x_{tr},t)+M_0^r u(\sigma,t)} f(u, v_{tr}, x_{tr}, t, 0)du\right)^{1/2}, \quad \sigma > 0.$$

Функции $M_0^{l,r}u(\sigma,t)$ имеют экспоненциальные оценки (см. [24])

$$\left|M_0^{l,r}u(\sigma)\right| \le C\exp(-\kappa|\sigma|). \tag{23}$$

Введем обозначения, которые будут использованы ниже:

$$\Phi_l(\xi, t, v_{tr}, x_{tr}) := \frac{\partial Q_0^l v}{\partial \xi}, \quad \Phi_r(\xi, t, v_{tr}, x_{tr}) := \frac{\partial Q_0^r v}{\partial \xi};$$

$$\Psi_l(\sigma, t, v_{tr}, x_{tr}) := \frac{\partial M_0^l u}{\partial \sigma}, \quad \Psi_r(\sigma, t, v_{tr}, x_{tr}) := \frac{\partial M_0^r u}{\partial \sigma}.$$

Запишем равенства (10), (11), учитывая представление функций $\bar{u}^{l,v}$, $\bar{v}^{l,v}$, $Q^{l,r}u$, $Q^{l,r}v$, $M^{l,r}v$, $M^{l,r}v$ в виде рядов

$$\begin{gathered}
\Phi_l\big|_{\xi=0} - \Phi_r\big|_{\xi=0} + \sum_{i=0}\varepsilon^{i+1}\left(\frac{\partial\bar{v}_i^l}{\partial x} - \frac{\partial\bar{v}_i^r}{\partial x}\right)_{x=x_{tr}} + \sum_{i=1}\varepsilon^{i}\left(\frac{\partial Q_i^l v}{\partial\xi} - \frac{\partial Q_i^r v}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} + \sum_{i=2}\varepsilon^{i-1}\left(\frac{\partial M_i^l v}{\partial\sigma} - \frac{\partial M_i^r v}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} = 0,\\
\Psi_l\big|_{\sigma=0} - \Psi_r\big|_{\sigma=0} + \sum_{i=0}\varepsilon^{i+2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i^l}{\partial x} - \frac{\partial\bar{u}_i^r}{\partial x}\right)_{x=x_{tr}} + \sum_{i=1}\varepsilon^{i+1}\left(\frac{\partial Q_i^l u}{\partial\xi} - \frac{\partial Q_i^r u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} + \sum_{i=1}\varepsilon^{i}\left(\frac{\partial M_i^l u}{\partial\sigma} - \frac{\partial M_i^r u}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Функции x_{tr} и v_{tr} в выражениях (24) разложим в ряды (9) и (8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для нулевого порядка получим равенства

$$\Phi_l(0,t,v_0,x_0) - \Phi_r(0,t,v_0,x_0) = 0, \quad \Psi_l(0,t,v_0,x_0) - \Psi_r(0,t,v_0,x_0) = 0,$$

справедливые в силу условия H_4.

Введем непрерывные функции $\Phi(\xi,t)$ и $\Psi(\sigma,t)$ по формулам

$$\Phi(\xi,t) = \begin{cases}\Phi_l(\xi,t,v_0(t),x_0(t)), & \xi\le 0,\\ \Phi_r(\xi,t,v_0(t),x_0(t)), & \xi\ge 0;\end{cases} \quad \Psi(\sigma,t) = \begin{cases}\Psi_l(\sigma,t,v_0(t),x_0(t)), & \sigma\le 0,\\ \Psi_r(\sigma,t,v_0(t),x_0(t)), & \sigma\ge 0.\end{cases} \tag{25}$$

2.4. Функции переходного слоя n-го порядка

Функции переходного слоя следующих порядков определяются по алгоритму, описанному в работе [16].

Предполагается, что члены асимптотических рядов с номерами $i = \overline{0, n-1}$ уже известны.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
\tilde{\varphi}^{l,r}(\xi,t) := \varphi^{l,r}(v^{l,r}(x_{tr},t) + Q_0^{l,r}v(\xi,t), x_{tr}, t, 0),\\
\tilde{h}_v^{l,r}(\xi,t) := h_v^{l,r}(\tilde{\varphi}^{l,r}(\xi,t), \bar{v}_0^{l,r}(x_{tr},t) + Q_0^{l,r}v(\xi,t), x_{tr}, t, 0),\\
\hat{f}_u(\sigma,t) := \begin{cases} f_u(\varphi^l(v_{tr},x_{tr},t) + M_0^l u(\sigma,t), v_{tr}, x_{tr}, t, 0), & \sigma\le 0,\\ f_u(\varphi^r(v_{tr},x_{tr},t) + M_0^r u(\sigma,t), v_{tr}, x_{tr}, t, 0), & \sigma\ge 0.\end{cases}
\end{gathered}$$

Обозначения $\tilde{f}_u^{l,r}(\xi,t)$, $\tilde{g}_u^{l,r}(\xi,t)$ имеют тот же смысл.

Функции $M_n^{l,r}v(\sigma,t)$ определяются из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 M_n^{l,r}v}{\partial\sigma^2} = m_n^{l,r}g(\sigma,t), \quad M_n^{l,r}v(\mp\infty,t) = 0,$$

где функции $m_n^{l,r}g(\sigma,t)$ известны на n-м шаге.

Задачи для определения функций $Q_n^{l,r}v(\xi,t)$ выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^2 Q_n^{l,r}v}{\partial\xi^2} = \tilde{h}_v^{l,r}(\xi,t)Q_n^{l,r}v + H_n^{l,r}(\xi,t), \quad Q_n^{l,r}v(0,t) = -\bar{v}_n^{l,r}(x_{tr},t) - M_n^{l,r}v(0,t), \quad Q_n^{l,r}v(\mp\infty,t) = 0,$$

где $H_n^{l,r}(\xi,t)$ – известные функции. Решения задач для функций $Q_n^{l,r}v(\xi,t)$ могут быть записаны в явном виде:

$$Q_n^{l,r}v(\xi,t) = -\Phi_{l,r}(\xi,t)\Phi_{l,r}^{-1}(0,t)(\bar{v}_n^{l,r}(x_{tr},t) + M_n^{l,r}v(0,t)) + \Phi_{l,r}(\xi,t)\int_0^{\xi}\Phi_{l,r}^{-2}(\xi_1,t)d\xi_1\int_{\mp\infty}^{\xi_1}\Phi_{l,r}(\xi_2,t)H_n^{l,r}(\xi_2,t)d\xi_2.$$

Функции $Q_n^{l,r}u(\xi,t)$ связаны с $Q_n^{l,r}v(\xi,t)$ равенствами

$$Q_n^{l,r}u + \bar{u}_n^{l,r}(x_{tr},t) = \tilde{\varphi}_v^{l,r}(\xi,t)(Q_n^{l,r}v + \bar{v}_n^{l,r}(x_{tr},t)) + q_n^{l,r}f(\xi,t),$$

где $q_n^{l,r}f(\xi,t)$ известны на n-м шаге.

Функции $M_n^{l,r}u(\sigma,t)$ являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 M_n^{l,r}u}{\partial\sigma^2} - \hat{f}_u^{l,r}(\sigma,t)M_n^{l,r}u = F_n^{l,r}(\sigma,t), \quad M_n^{l,r}u(0,t) = \chi_n^{l,r}(t), \quad M_n^{l,r}u(\mp\infty,t) = 0, \tag{26}$$

причем функции $F_n^{l,r}(\xi,t)$, $\chi_n^{l,r}(t)$ известны на n-м шаге.

Решения задач (26) могут быть записаны в явной форме:

$$M_n^{l,r}u(\sigma,t) = -\Psi_{l,r}(\sigma,t)\Psi_{l,r}^{-1}(0,t)\chi_n^{l,r}(0,t) + \Psi_{l,r}(\sigma,t)\int_0^{\sigma}\Psi_{l,r}^{-2}(\sigma_1,t)d\sigma_1\int_{\mp\infty}^{\sigma_1}\Psi_{l,r}(\sigma_2,t)F_n^{l,r}(\sigma_2,t)d\sigma_2.$$

Из вида функций $Q_n^{l,r}u(\xi,t)$, $Q_n^{(\mp)}v(\xi,t)$, $M_n^{(\mp)}u(\sigma,t)$, $M_n^{(\mp)}u(\sigma,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что для них имеют место экспоненциальные оценки типа (20) и (23).

2.5. Система уравнений для функций $v_n(t)$, $x_n(t)$

Соберем в равенствах (24) слагаемые порядка ε^n с учетом разложения функций $x_{tr}(t)$ и $v_{tr}(t)$ в ряды (9) и (8). Обозначим через $S_n(t)$ и $T_n(t)$ слагаемые, не содержащие x_n и v_n. Система уравнений относительно x_n и v_n имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\Phi_l - \Phi_r)}{\partial v}(0,t,v_0,x_0)v_n + \frac{\partial(\Phi_l - \Phi_r)}{\partial x}(0,t,v_0,x_0)x_n + S_n(t) = 0,\\ \frac{\partial(\Psi_l - \Psi_r)}{\partial v}(0,t,v_0,x_0)v_n + \frac{\partial(\Psi_l - \Psi_r)}{\partial x}(0,t,v_0,x_0)x_n + T_n(t) = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Система уравнений (27) имеет единственное решение, поскольку ее определитель совпадает с якобианом системы уравнений (3), отличным от нуля по условнию H_5.

2.6. Формальная асимптотика n-го порядка

Составим конечную сумму, представляющую собой формальное асимптотическое приближение n-го порядка по малому параметру. Предположим, что члены рядов (4), (9), (8) определены до номера n, а также известны функции $M_{n+1}^{l,r}v$, $M_{n+2}^{l,r}v$, $R_{n+1}^{l,r}v$, $R_{n+2}^{l,r}v$.

Обозначим через $v_n^{tr}(t)$ и $X_n(t)$ частичные суммы рядов v_{tr} и x_{tr}

$$X_n(t) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i x_i(t), \quad v_n^{tr}(t) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i(t). \tag{28}$$

Введем обозначения $\xi_n = \varepsilon^{-1}(x - X_n(t))$, $\sigma_n = \varepsilon^{-2}(x - X_n(t))$.

Кривая $X_n(t)$ разделяет область $\bar{D}_T : \{(x,t) \in [0,L]\times(0,T]\}$ на две подобласти $\bar{D}_n^l$ и $\bar{D}_n^r$ ($\bar{D}_n^l : \{(x,t) \in [0,X_n(t)]\times(0,T]\}$ и $\bar{D}_n^r : \{(x,t) \in [X_n(t),L]\times(0,T]\}$).

Составим суммы $U_n^l, V_n^l, U_n^r, V_n^r$:

$$U_n^{l,r}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i(\bar{u}_i^{l,r}(x) + Q_i^{l,r}u(\xi_n,t) + M_i^{l,r}u(\sigma_n,t) + P_i^{l,r}u(\zeta_{l,r}) + R_i^{l,r}u(\eta_{l,r})), \quad (x,t) \in \bar{D}_n^{l,r},$$

$$\begin{gathered}V_n^{l,r}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i(\bar{v}_i^{l,r}(x) + Q_i^{l,r}v(\xi_n,t) + M_i^{l,r}v(\sigma_n,t) + P_i^{l,r}v(\zeta_{l,r}) + R_i^{l,r}v(\eta_{l,r})) +\\ + \sum_{i=n+1}^{n+2}\varepsilon^i(M_i^{l,r}v(\sigma_n,t) + R_i^{l,r}v(\eta_{l,r})), \quad (x,t) \in \bar{D}_n^{l,r}.\end{gathered} \tag{29}$$

В этих суммах ряды x_{tr} и v_{tr}, которые входят в выражения для Q и M-функций заменены на частичные суммы $X_n(t)$ и $v_n^{tr}(t)$ (см. (28)) этих рядов.

Определим функции $U_n(x,t,\varepsilon)$ и $V_n(x,t,\varepsilon)$ равенствами

$$U_n(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^l(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_n^l, \\ U_n^r(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_n^r, \end{cases} \quad V_n(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^l(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_n^l, \\ V_n^r(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_n^r. \end{cases}$$

Функции U_n и V_n по построению удовлетворяют уравнениям (1) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ всюду в области $\bar{D}_T$, за исключением кривой $X_n(t)$, а на кривой они и их производные терпят разрыв.

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Теорема 1. *При выполнении условий H_1–H_5 при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует периодическое решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи* (1), (2)*, для которого функции $U_n(x,t,\varepsilon)$, $V_n(x,t,\varepsilon)$ являются равномерным на отрезке* $[0;L]$ *асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, т.е. при $(x,t) \in [0;L]\times(0;+\infty)$ выполняются неравенства*

$$|u(x,t,\varepsilon) - U_n(x,t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad |v(x,t,\varepsilon) - V_n(x,t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство. Составим периодические функции $U^\alpha(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\beta(x,t,\varepsilon)$ называемые соответственно *верхним и нижним* решениями задачи (1), (2), таким образом, чтобы при достаточно малых ε они удовлетворяли следующим условиям.

Условие 1. $U^\alpha(x,t,\varepsilon) \le U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon) \le V^\beta(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \bar{D}_T$.

Условие 2. При $(x,t) \in \bar{D}_T$ выполнены неравенства

$$L_{1\varepsilon}(U^\beta, v) := \varepsilon^4 U_{xx}^\beta - \varepsilon^4 U_t^\beta - f(U^\beta, v, x, t, \varepsilon) < 0 < L_{1\varepsilon}(U^\alpha, v) \quad \text{при} \quad V^\alpha \le v \le V^\beta,$$
$$L_{2\varepsilon}(u, V^\beta) := \varepsilon^2 V_{xx}^\beta - \varepsilon^2 V_t^\beta - g(u, V^\beta, x, t, \varepsilon) < 0 < L_{2\varepsilon}(u, V^\alpha) \quad \text{при} \quad U^\alpha \le u \le U^\beta.$$

Условие 3.

$$\left.\frac{\partial U^\beta}{\partial x}\right|_{x=0} \le 0 \le \left.\frac{\partial U^\alpha}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial V^\beta}{\partial x}\right|_{x=0} \le 0 \le \left.\frac{\partial V^\alpha}{\partial x}\right|_{x=0},$$
$$\left.\frac{\partial U^\alpha}{\partial x}\right|_{x=L} \le 0 \le \left.\frac{\partial U^\beta}{\partial x}\right|_{x=L}, \quad \left.\frac{\partial V^\alpha}{\partial x}\right|_{x=L} \le 0 \le \left.\frac{\partial V^\beta}{\partial x}\right|_{x=L}.$$

Верхнее решение строится отдельно слева и справа от точки $x = X_\beta(t)$, а для нижнего решения точка сшивки определяется функцией $x = X_\alpha(t)$. Эти функции задаются равенствами

$$X_\beta(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) - \varepsilon^{n+1}\delta(t) = X_{n+1}(t) - \varepsilon^{n+1}\delta(t), \quad X_\alpha(t) = X_{n+1}(t) + \varepsilon^{n+1}\delta(t), \tag{30}$$

где функция $\delta(t)$ положительна и будет определена ниже.

Кривая $X_\beta(t)$ разделяет область $\bar{D}_T$ на две подобласти $\bar{D}_\beta^l$ и $\bar{D}_\beta^r$. Верхнее решение задачи (1), (2) составляется отдельно в этих подобластях

$$U^\beta(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} U_\beta^l(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\beta^l, \\ U_\beta^r(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\beta^r, \end{cases} \quad V^\beta(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} V_\beta^l(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\beta^l, \\ V_\beta^r(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\beta^r. \end{cases}$$

Аналогично, нижнее решение состоит из двух частей $U_\alpha^l(x,t,\varepsilon)$, $U_\alpha^r(x,t,\varepsilon)$ и $V_\alpha^l(x,t,\varepsilon)$, $V_\alpha^r(x,t,\varepsilon)$, которые строятся отдельно в областях $\bar{D}_\alpha^l$ и $\bar{D}_\alpha^r$.

Функции $U^{\alpha,\beta}(x,t,\varepsilon)$ и $V^{\alpha,\beta}(x,t,\varepsilon)$ непрерывны в области $\bar{D}$, со следующими условиями в точках сшивки $X_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{gathered} V_{\alpha,\beta}^l(X_{\alpha,\beta}(t),t,\varepsilon) = V_{\alpha,\beta}^r(X_{\alpha,\beta}(t),t,\varepsilon) = v_{\alpha,\beta}(t), \\ U_{\alpha,\beta}^l(X_{\alpha,\beta}(t),t,\varepsilon) = U_{\alpha,\beta}^r(X_{\alpha,\beta}(t),t,\varepsilon) = \varphi^0(v_{\alpha,\beta}(t), X_{\alpha,\beta}(t), t). \end{gathered} \tag{31}$$

Здесь

$$v_\alpha(t) = v_{n+1}^{tr}(t) - \varepsilon^{n+1}\mu(t), \quad v_\beta(t) = v_{n+1}^{tr}(t) + \varepsilon^{n+1}\mu(t), \tag{32}$$

$v_{n+1}^{tr}(t)$ — это частичная сумма ряда $v_{tr}(t)$ (см. (28)), а функция $\mu(t)$ будет выбрана ниже.

Если нижнее и верхнее решения на кривых $X_\alpha(t)$, $X_\beta(t)$ не являются гладкими, то должно выполняться условие 4:

$$\left(\frac{\partial U_\beta^l}{\partial x} - \frac{\partial U_\beta^r}{\partial x}\right)_{x=X_\beta(t)} \ge 0, \quad \left(\frac{\partial V_\beta^l}{\partial x} - \frac{\partial V_\beta^r}{\partial x}\right)_{x=X_\beta(t)} \ge 0;$$

$$\left(\frac{\partial U_\alpha^l}{\partial x} - \frac{\partial U_\alpha^r}{\partial x}\right)_{x=X_\alpha(t)} \le 0, \quad \left(\frac{\partial V_\alpha^l}{\partial x} - \frac{\partial V_\alpha^r}{\partial x}\right)_{x=X_\alpha(t)} \le 0.$$

Функции U_β^l, U_β^r и V_β^l, V_β^r составляются на основе асимптотического приближения $(n+1)$-го порядка. Обозначим через $K_{\alpha,\beta}^{l,r}u$ и $K_{\alpha,\beta}^{l,r}v$ добавки к асимптотике. Функции $K_{\alpha,\beta}^{l,r}u$ и $K_{\alpha,\beta}^{l,r}v$ имеют вид

$$K^{l,r}u(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(\tilde{u}^{l,r}(x,t) + \tilde{Q}_{n+1}^{l,r}u(\xi,t) + \tilde{M}_{n+1}^{l,r}u(\sigma,t))) + \varepsilon^{n+2}\exp(-\gamma\zeta_{l,r}),$$

$$K^l v(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(\tilde{v}^l(x,t) + \tilde{Q}_{n+1}^l v(\xi,t)) + \varepsilon^{n+2} + \varepsilon^{n+2}\exp(-\gamma\zeta_l) + \\ + \varepsilon^{n+3}\tilde{M}_{n+3}^l v(\sigma,t) + \varepsilon^{n+2}\omega_0(t) + \varepsilon^{n+3}\omega_1(t),$$

$$K^r v(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(\tilde{v}^r(x,t) + \tilde{Q}_{n+1}^r v(\xi,t)) + \varepsilon^{n+2} + \varepsilon^{n+2}\exp(-\gamma\zeta_r) + \varepsilon^{n+3}\tilde{M}_{n+3}^r v(\sigma,t),$$

где γ — положительная константа. Функции $U_{\alpha,\beta}^{l,r}(x,t,\varepsilon)$ и $V_{\alpha,\beta}^{l,r}(x,t,\varepsilon)$ определяются формулами

$$U_\beta^{l,r} = U_{n+1}^{l,r}\Big|_{\xi_\beta,\sigma_\beta} + K^{l,r}u\Big|_{\xi_\beta,\sigma_\beta}, \quad U_\alpha^{l,r} = U_{n+1}^{l,r}\Big|_{\xi_\alpha,\sigma_\alpha} - K^{l,r}u\Big|_{\xi_\alpha,\sigma_\alpha}. \tag{33}$$

$$V_\beta^{l,r} = V_{n+1}^{l,r}\Big|_{\xi_\beta,\sigma_\beta} + K^{l,r}v\Big|_{\xi_\beta,\sigma_\beta}, \quad V_\alpha^{l,r} = V_{n+1}^{l,r}\Big|_{\xi_\alpha,\sigma_\alpha} - K^{l,r}v\Big|_{\xi_\alpha,\sigma_\alpha}. \tag{34}$$

Растянутые переменные ξ_β, σ_β и ξ_α, σ_α вводятся по формулам $\xi_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{-1}(x - X_{\alpha,\beta}(t))$, $\sigma_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{-2}(x - X_{\alpha,\beta}(t))$.

Функции $U_{n+1}^{l,r}$, $V_{n+1}^{l,r}$ в суммах (33), (34) являются асимптотическими приближениями (29) порядка $(n+1)$, с той разницей, что аргументы функций переходного слоя ξ_{n+1} и σ_{n+1} заменены на $\xi_{\alpha,\beta}$ и $\sigma_{\alpha,\beta}$, а величины $X_{n+1}(t)$, $v_n^{tr}(t)$ заменены на $X_{\alpha,\beta}(t)$, $v_{\alpha,\beta}(t)$ (см. (30), (32)).

Функции $\tilde{u}^{l,r}(x,t)$, $\tilde{v}^{l,r}(x,t)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\bar{f}_u^{l,r}(x,t)\tilde{u}^{l,r} + \bar{f}_v^{l,r}(x,t)\tilde{v}^{l,r} = A, \quad \bar{g}_u^{l,r}(x,t)\tilde{u}^{l,r} + \bar{g}_v^{l,r}(x,t)\tilde{v}^{l,r} = B, \tag{35}$$

где A и B — некоторые положительные числа. Системы (35) разрешимы единственным образом, поскольку определитель $\Delta^{l,r}(x,t) = \bar{f}_u^{l,r}(x,t)h_v^{1,3}(x,t) > 0$ отличен от нуля всюду на сегменте $[0;L]$ по условиям H_1 и H_2.

Функции $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}u$, $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v$, $\tilde{M}_{n+1}^{l,r}u$, $\tilde{M}_{n+3}^{l,r}v$ направлены на устранение невязок, возникающих в результате модификации регулярной части асимптотики порядка $(n+1)$, т.е. добавок $\tilde{u}^{l,r}$ и $\tilde{v}^{l,r}$ и изменения граничных условий для функций переходного слоя за счет равенств (31).

Функции $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v(\xi,t)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v}{\partial\xi^2} = \tilde{h}_v^{l,r}(\xi,t)\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v + \tilde{h}_v^{l,r}(\xi,t)\tilde{v}^{l,r}(X_{n+1},t) + \tilde{g}_u^{l,r}(\xi,t)(\tilde{f}_u^{l,r}(\xi,t))^{-1}A - B,$$

с граничными условиями $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v(0,t) = -\tilde{v}^{l,r}(X_{n+1}(t),t)$, $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v(\mp\infty,t) = 0$.

Функции $\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}u(\xi,t)$ определяются равенствами

$$\tilde{u}^{l,r}(X_{n+1}(t),t)+\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}u(\xi,t)=\tilde{\varphi}_v^{l,r}(\xi,t)(\tilde{v}^{l,r}(X_{n+1}(t),t)+\tilde{Q}_{n+1}^{l,r}v(\xi,t))+(\tilde{f}_u^{l,r}(\xi,t))^{-1}A.$$

Функции $\tilde{M}_{n+1}^{l,r}u$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2\tilde{M}_{n+1}^{l,r}u}{\partial\sigma^2}-\hat{f}_u(\sigma,t)\tilde{M}_{n+1}^{l,r}u=(\hat{f}_u(\sigma,t)(\tilde{f}_u^{l,r}(0,t))^{-1}-1)A,$$
$$\tilde{M}_{n+1}^{l,r}u(0,t)=-(\tilde{f}_u^{l,r}(0,t))^{-1}A,\quad \tilde{M}_{n+1}^{l,r}u(\mp\infty,t)=0.$$

Функции $\tilde{M}_{n+3}^{l,r}v(\sigma,t)$ задаются уравнениями $\dfrac{\partial^2\tilde{M}_{n+3}^{l,r}v}{\partial\sigma^2}=\tilde{m}_{n+1}^{l,r}g(\sigma,t)$ с условиями $\tilde{M}_{n+3}^{l,r}v(\mp\infty,t)=0$, где $\tilde{m}_{n+1}^{l,r}g(\sigma,t)$ – известные функции.

Введение функций $\omega_{0,1}(t)$ позволяет обеспечить непрерывность v-компоненты верхнего решения. Эти функции задаются равенствами: $\omega_0(t)=M_{n+2}^r v(0,t)-M_{n+2}^l v(0,t)$, $\omega_1(t)=M_{n+3}^r v(0,t)-M_{n+3}^l v(0,t)+\tilde{M}_{n+3}^r v(0,t)-\tilde{M}_{n+3}^l v(0,t)$.

Наконец, величины $\mu(t)$ и $\delta(t)$ являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial v}(v_0,x_0,t)\mu+\frac{\partial J}{\partial x}(v_0,x_0,t)(-\delta)=A_2,\quad \frac{\partial Y}{\partial v}(v_0,x_0,t)\mu+\frac{\partial Y}{\partial x}(v_0,x_0,t)(-\delta)=B_2, \tag{36}$$

где

$$A_2:=A_1+\Phi^{-1}(0,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi,t)(B-\tilde{g}_u(\xi,t)\tilde{f}_u^{-1}(\xi,t)A)d\xi,$$

$$B_2:=B_1+A\Psi^{-1}(0,t)(\varphi^r(v_0(t),x_0(t),t)-\varphi^l(v_0(t),x_0(t),t)),$$

функции $\Phi(\xi,t)$, $\Psi(\sigma,t)$ определены выражениями (25), A_1, B_1 – некоторые положительные числа. Выберем $B>A\tilde{g}_u^{l,r}(\xi,t)(\tilde{f}_u^{l,r}(\xi,t))^{-1}$ и поскольку $\Phi(\xi,t)>0$, $\Psi^{-1}(0,t)>0$, $\varphi^r(v_0(t),x_0(t),t)-\varphi^l(v_0(t),x_0(t),t)>0$ (по условию H_1), то $A_2>0$, $B_2>0$.

Решение системы (36) имеет вид

$$\mu(t)=\left(\left.\frac{D(J,Y)}{D(v,x)}\right|_{v_0,x_0}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}(v_0,x_0,t)\,A_2-\frac{\partial J}{\partial x}(v_0,x_0,t)\,B_2\right),$$

$$\delta(t)=\left(\left.\frac{D(J,Y)}{D(v,x)}\right|_{v_0,x_0}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial v}(v_0,x_0,t)\,A_2-\frac{\partial J}{\partial v}(v_0,x_0,t)\,B_2\right),$$

где определитель $\left.\dfrac{D(J,Y)}{D(v,x)}\right|_{v_0,x_0}<0$ по условию H_5. Можно показать, что функция $\delta(t)$ положительна (см. [16]).

Построенные функции $U^{\alpha,\beta}$, $V^{\alpha,\beta}$ удовлетворяют условиям 1–4.

Условие 1 упорядоченности выполняется на отрезке $[0;L]$ за счет выбора функции $\delta(t)>0$ и положительных функций $\tilde{u}^{l,r}(x)$, $\tilde{v}^{l,r}(x)$. Также при проверке условия 1 используются экспоненциальные оценки функций переходного слоя. С подробными выкладками можно ознакомиться в работе [16] (п. 3.2).

По способу построения функции $U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\beta(x,t,\varepsilon)$ и $U^\alpha(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяют равенствам:

$$L_{1\varepsilon}(U^\beta,V^\beta)=-\varepsilon^{n+1}A+O(\varepsilon^{n+2})<0,\quad L_{1\varepsilon}(U^\alpha,V^\alpha)=\varepsilon^{n+1}A+O(\varepsilon^{n+2})>0,$$
$$L_{2\varepsilon}(U^\beta,V^\beta)=-\varepsilon^{n+1}B+O(\varepsilon^{n+2})<0,\quad L_{2\varepsilon}(U^\alpha,V^\alpha)=\varepsilon^{n+1}B+O(\varepsilon^{n+2})>0.$$

В силу условия H_3 данные выражения доказывают выполнение неравенств условия 2.

В граничных точках отрезка $[0; L]$ частные производные функций U^β, V^β и U^α, V^α по переменной x имеют вид

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1}\left(-\gamma + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x}(0,t)\right) + O(\varepsilon^{n+2}), \quad \frac{\partial U^\alpha}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1}\left(\gamma - \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x}(0,t)\right) + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Неравенства условия 3 выполняются для функций U^β, U^α при $x = 0$ за счет выбора достаточно большого положительного γ. Аналогично проверяются остальные неравенства условия 3.

Можно показать, что для функций $U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\beta(x,t,\varepsilon)$ при $x = X_\beta(t)$ и для функций $U^\alpha(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon)$ при $x = X_\alpha(t)$ справедливы равенства

$$\left(\frac{\partial U_\beta^l}{\partial x} - \frac{\partial U_\beta^r}{\partial x}\right)_{x=X_\beta} = \varepsilon^{n-1}B_1 + O(\varepsilon^n) > 0, \quad \left(\frac{\partial V_\beta^l}{\partial x} - \frac{\partial V_\beta^r}{\partial x}\right)_{x=X_\beta} = \varepsilon^n A_1 + O(\varepsilon^{n+1}) > 0,$$

$$\left(\frac{\partial U_\alpha^l}{\partial x} - \frac{\partial U_\alpha^r}{\partial x}\right)_{x=X_\alpha} = -\varepsilon^{n-1}B_1 + O(\varepsilon^n) < 0, \quad \left(\frac{\partial V_\alpha^l}{\partial x} - \frac{\partial V_\alpha^r}{\partial x}\right)_{x=X_\alpha} = -\varepsilon^n A_1 + O(\varepsilon^{n+1}) < 0.$$

Условие 4 выполняется.

Согласно статье [15, теорема 2.2] существование верхнего и нижнего решений — непрерывных и гладких в области $\bar{D}_T$ функций, гарантирует существование классического решения задачи (1), (2). Доказательство основано на принципе максимума для верхнего и нижнего решений из класса $C^{2,1}(\bar{D}_T)$. В данном случае функции $U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\beta(x,t,\varepsilon)$ и $U^\alpha(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon)$ принадлежат классу $C^{1,1}(\bar{D}_T)$, если в условии 4 выполнено равенство. Тогда можно повторить рассуждения работы [15], основываясь на принципе максимума для функций из $C^{1,1}(\bar{D}_T)$, доказанном в работе [25]. Если же функции $U^\beta(x,t,\varepsilon)$, $V^\beta(x,t,\varepsilon)$ и $U^\alpha(x,t,\varepsilon)$, $V^\alpha(x,t,\varepsilon)$ принадлежат классу $C^{0,0}(\bar{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T^l \cup D_T^r)$ и имеют единственную точку разрыва производной, тогда для доказательства можно использовать принцип максимума из работы [26, лемма 4].

Приведенные рассуждения утверждают справедливость теоремы 1.

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

4.1. Существование решения начально-краевой задачи

Рассмотрим систему уравнений (1) с начальными условиями по времени

$$\begin{gathered}\varepsilon^4(u_{xx} - u_t) = f(u,v,x,t,\varepsilon), \quad \varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = g(u,v,x,t,\varepsilon), \quad x \in (0;L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_x(0,t,\varepsilon) = u_x(L,t,\varepsilon) = 0, \quad v_x(0,t,\varepsilon) = v_x(L,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0,\varepsilon) = u_{\text{init}}(x), \quad v(x,0,\varepsilon) = v_{\text{init}}(x), \quad x \in [0;L].\end{gathered} \tag{37}$$

Определим функции $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ и $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$ равенствами

$$\begin{gathered}U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon) = u^*(x,t,\varepsilon) + (U^\beta(x,t,\varepsilon) - u^*(x,t,\varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) = u^*(x,t,\varepsilon) + (U^\alpha(x,t,\varepsilon) - u^*(x,t,\varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon) = v^*(x,t,\varepsilon) + (V^\beta(x,t,\varepsilon) - v^*(x,t,\varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) = v^*(x,t,\varepsilon) + (V^\alpha(x,t,\varepsilon) - v^*(x,t,\varepsilon))e^{-\lambda t}.\end{gathered} \tag{38}$$

Здесь U^α, V^α и U^β, V^β — это нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), заданные выражениями (34). Через $u^*(x,t,\varepsilon)$, $v^*(x,t,\varepsilon)$ обозначено некоторое решение задачи (1), (2), лежащие между U^α, U^β и V^α, V^β соответственно (решение существует согласно теореме 1).

Теорема 2. *При выполнении условий H_1–H_5 для произвольных достаточно гладких начальных функций $u_{\text{init}}(x)$, $v_{\text{init}}(x)$ таких, что*

$$U_{\text{down}}(x,0,\varepsilon) < u_{\text{init}}(x) < U_{\text{up}}(x,0,\varepsilon), \quad V_{\text{down}}(x,0,\varepsilon) < v_{\text{init}}(x) < V_{\text{up}}(x,0,\varepsilon), \quad x \in [0;L],$$

существует решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ начально-краевой задачи (37)*, лежащее между верхним и нижним решениями $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ для u-компоненты и $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ — для v-компоненты при $x \in [0;L]$ и $t \in (0;+\infty)$:*

$$U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon), \quad V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) < v(x,t,\varepsilon) < V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon).$$

Доказательство. Воспользуемся определением верхнего и нижнего решений, введенным в разд. 3, исключая условие периодичности. Можно показать, что функции $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ и $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$ являются верхним и нижним решениями задачи (37). В работах [27], [28] аналогичное утверждение доказано для случая уравнения реакция-диффузия с разрывной неоднородностью.

Условие 1 выполняется на сегменте $x \in [0;L]$, так как по способу построения функций $U^{\alpha,\beta}(x,t,\varepsilon)$ справедливо равенство $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon) - U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) = e^{-\lambda t}(U^{\beta}(x,t,\varepsilon) - U^{\alpha}(x,t,\varepsilon)) \geq 0$. Аналогичное равенство справедливо для $V^{\alpha,\beta}(x,t,\varepsilon)$.

Функции $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ и $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам условия 2. Неравенство $L_{1\varepsilon}(U_{\text{up}},v) < 0$ достаточно проверить при $v = V_{\text{up}}$ в силу условия H_3:

$$\begin{aligned} L_{1\varepsilon}(U_{\text{up}},V_{\text{up}}) &= \varepsilon^4 u^*_{xx} - \varepsilon^4 u^*_t + \varepsilon^4(U^{\beta}_{xx} - U^{\beta}_t)e^{-\lambda t} - \varepsilon^4(u^*_{xx} - u^*_t)e^{-\lambda t} + \lambda(U^{\beta} - u^*)e^{-\lambda t} - \\ &- f(u^* + (U^{\beta} - u^*)e^{-\lambda t}, v^* + (V^{\beta} - v^*)e^{-\lambda t}, x,t,\varepsilon) = f(u^*,v^*,x,t,\varepsilon) + f(U^{\beta},V^{\beta},x,t,\varepsilon)e^{-\lambda t} - \varepsilon^{n+1}Ae^{-\lambda t} - \\ &- f(u^*,v^*,x,t,\varepsilon)e^{-\lambda t} + \lambda(U^{\beta} - u^*)e^{-\lambda t} - f(u^*,v^*,x,t,\varepsilon) - f_u(u^*,v^*,x,t,\varepsilon)(U^{\beta} - u^*)e^{-\lambda t} - \\ &- f_v(u^*,v^*,x,t,\varepsilon)(V^{\beta} - v^*)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}O(\varepsilon^{n+2}) = -\varepsilon^{n+1}Ae^{-\lambda t} + \lambda(U^{\beta} - u^*)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}O(\varepsilon^{n+2}). \end{aligned}$$

В ходе преобразования мы использовали утверждение теоремы 1 и равенство $L_{1\varepsilon}(U^{\beta},V^{\beta}) = -\varepsilon^{n+1}A + e^{-\lambda t}O(\varepsilon^{n+2})$. Согласно теореме 1 разность $\left(U^{\beta} - u^*\right)$ является величиной порядка $O(\varepsilon^{n+1})$. Можно выбрать $\lambda > 0$ достаточно малым и получить

$$L_{1\varepsilon}(U_{\text{up}},V_{\text{up}}) = -\varepsilon^{n+1}Ae^{-\lambda t} + \lambda O(\varepsilon^{n+1})e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}O(\varepsilon^{n+2}) < 0.$$

Аналогичным образом, можно показать, что неравенства условия 2 выполняются для дифференциальных операторов $L_{1\varepsilon}(U_{\text{down}},V_{\text{down}})$, $L_{2\varepsilon}(U_{\text{up}},V_{\text{up}})$, $L_{2\varepsilon}(U_{\text{down}},V_{\text{down}})$.

В граничных точках сегмента $[0;L]$ для функции $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ выполнено равенство:

$$\frac{\partial U_{\text{up}}}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \frac{\partial u^*}{\partial x}(0,t,\varepsilon)(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial x}(0,t) \leq 0,$$
$$\frac{\partial U_{up}}{\partial x}(L,t,\varepsilon) = \frac{\partial u^*}{\partial x}(L,t,\varepsilon)(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial x}(L,t,\varepsilon) \geq 0,$$

согласно граничным условиям для периодических решений задачи (1), (2) и методу построения функции $U^{\beta}(x,t,\varepsilon)$. Таким образом, для функции $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ выполнено условие 3. Аналогично можно показать, что функции $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ и $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$ также удовлетворяют условию 3.

Пользуясь теоремой 3.1 из работы [15] и рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 1, можно показать, что из существования нижних $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$ и верхних $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ решений задачи (37) следует, что решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (37) существует и удовлетворяет неравенствам: $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) \leq u(x,t,\varepsilon) \leq U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon) \leq v(x,t,\varepsilon) \leq V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$, $x \in [0;L]$, $t \in (0;+\infty)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия H_1–H_5. Тогда гладкое периодическое решение задачи* (1), (2)*, для которого суммы* (29) *являются асимптотическим приближением, единственно и асимптотиче-*

ски устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[U^{\alpha}, U^{\beta}]$ *для* u*-компоненты и* $[V^{\alpha}, V^{\beta}]$ *для* v*-компоненты.*

Доказательство. Выберем начальные функции $u_{\text{init}}(x)$, $v_{\text{init}}(x)$ задачи (37) таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$U^{\alpha}(x,0,\varepsilon) < u_{\text{init}}(x) < U^{\beta}(x,0,\varepsilon), \quad V^{\alpha}(x,0,\varepsilon) < v_{\text{init}}(x) < V^{\beta}(x,0,\varepsilon), \quad x \in [0;L]. \tag{39}$$

Из равенств (38) следует, что $U_{\text{down}}(x,0,\varepsilon) = U^{\alpha}(x,0,\varepsilon)$, $U_{\text{up}}(x,0,\varepsilon) = U^{\beta}(x,0,\varepsilon)$ и $V_{\text{down}}(x,0,\varepsilon) = V^{\alpha}(x,0,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,0,\varepsilon) = V^{\beta}(x,0,\varepsilon)$. Таким образом, функции $u_{\text{init}}(x)$ и $v_{\text{init}}(x)$, удовлетворяющие неравенствам (39), лежат между нижним и верхним решениями U_{down}, U_{up} и V_{down}, V_{up} при $x \in [0;L]$. Условия теоремы 2 выполнены и существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ начальной задачи (37), лежащее между $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ и $V_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $V_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$.

Функции $U_{\text{down}}(x,t,\varepsilon)$, $U_{\text{up}}(x,t,\varepsilon)$ сходятся к функции $u^*(x,t,\varepsilon)$ при $t \to +\infty$. В этом случае функция $u(x,t,\varepsilon)$ также стремится к $u^*(x,t,\varepsilon)$. Поскольку решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (37) единственно, то функция $u^*(x,t,\varepsilon)$ является единственным решением задачи (1), (2), расположенным между $U^{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{\beta}(x,t,\varepsilon)$. Аналогично для v-компоненты функция $v^*(x,t,\varepsilon)$ является единственным решением задачи (1), (2), расположенным между $V^{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $V^{\beta}(x,t,\varepsilon)$.

Отсюда следует, что если неравенства (39) выполнены, то справедливы предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\left|u(x,t,\varepsilon) - u^*(x,t,\varepsilon)\right| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\left|v(x,t,\varepsilon) - v^*(x,t,\varepsilon)\right| = 0$$

и периодическое решение $u^*(x,t,\varepsilon)$, $v^*(x,t,\varepsilon)$ локально устойчиво по Ляпунову с областью влияния, по крайней мере, $[U^{\alpha}, U^{\beta}]$ для u-компоненты и $[V^{\alpha}, V^{\beta}]$ для v-компоненты.

5. ПРИМЕР

Приведем пример модельной системы, для которой выполнены условия H_1–H_5, и выпишем асимптотическое приближение нулевого порядка. Задача имеет вид

$$\varepsilon^4(u_{xx} - u_t) = (u + 0.125v + 0.5x - 1)(u - (4 + \varepsilon x(\cos(2\pi t) + 2)))(u - (-4 + \varepsilon x(\cos(2\pi t) + 2))),$$

$$\varepsilon^2(v_{xx} - v_t) = v - 0.5(0.25u + 3)(x + 1.4)(\cos(2\pi t) + 2), \quad x \in (0;2), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u_x(0,t,\varepsilon) = u_x(2,t,\varepsilon) = 0, \quad v_x(0,t,\varepsilon) = v_x(2,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Для функций регулярной части нулевого порядка получаем следующие выражения:

$$\bar{u}_0^l(x,t) = -4, \quad \bar{v}_0^l(x,t) = (x + 1.4)(\cos(2\pi t) + 2),$$
$$\bar{u}_0^r(x,t) = 4, \quad \bar{v}_0^r(x,t) = 2(x + 1.4)(\cos(2\pi t) + 2).$$

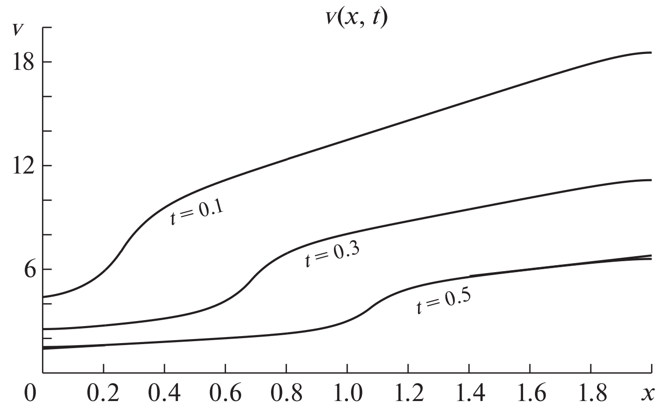
Положение фронта с точностью $O(\varepsilon)$ определяется функцией $x_0(t)$:

$$x_0(t) = \frac{27.2}{3\cos(2\pi t) + 14} - 1.4.$$

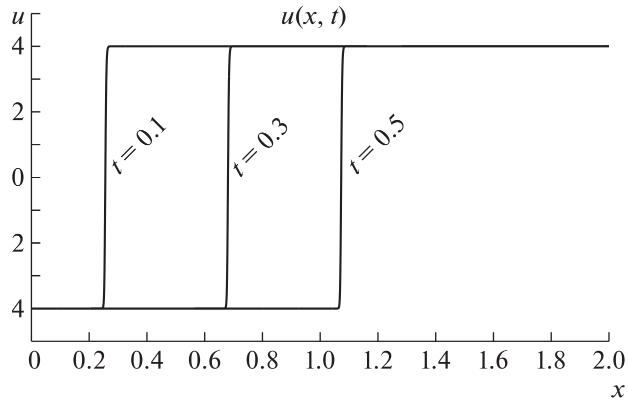
Запишем выражение для v-компоненты решения с точностью $O(\varepsilon)$:

$$v(x,t) = \begin{cases} (x + 1.4)(\cos(2\pi t) + 2) + (v_0(t) - v^1(x_0(t),t))\exp((x - x_0(t))/\varepsilon) + \\ + \varepsilon(\cos(2\pi t) + 2)\exp(-x/\varepsilon), \quad 0 \le x \le x_0(t); \\ 2(x + 1.4)(\cos(2\pi t) + 2) + (v_0(t) - v^3(x_0(t),t))\exp(-(x - x_0(t))/\varepsilon) - \\ - 2\varepsilon(\cos(2\pi t) + 2)\exp(-(2 - x)/\varepsilon), \quad x_0(t) \le x \le 2. \end{cases}$$

График функции $v(x,t)$ представлен на фиг. 1.



Фиг. 1. График v-компоненты решения с точностью $O(\varepsilon)$ в различные моменты времени. Параметр $\varepsilon = 0.2$.



Фиг. 2. График u-компоненты решения с точностью $O(\varepsilon)$ в различные моменты времени. Параметр $\varepsilon = 0.2$.

Введем функцию $\tilde{u}(\sigma, t)$:

$$\tilde{u}(\sigma, t) = \begin{cases} -4 + M_0^l(\sigma, t), & x \le x_0(t), \\ 4 + M_0^r(\sigma, t), & x \ge x_0(t). \end{cases}$$

Функция $\tilde{u}(\sigma, t)$ в данном примере определяется из задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} = (\tilde{u} + 0.125 v_0(t) + 0.5 x_0(t) - 1)(\tilde{u} - 4)(\tilde{u} + 4),$$

$$\tilde{u}(0, t) = 1 - 0.125 v_0(t) - 0.5 x_0(t), \quad \tilde{u}(-\infty, t) = -4, \quad \tilde{u}(+\infty, t) = 4,$$

где $v_0(t) = 13.6(1 - 8(3\cos(2\pi t) + 14)^{-1})$. (Задача для $\tilde{u}(\sigma, t)$ получается из уравнений (21) с условиями (22).)

Тогда приближенное решение для u-компоненты при $\varepsilon \to 0$ можно записать в виде

$$u(x, t) = \tilde{u}((x - x_0(t))/\varepsilon^2, t) + O(\varepsilon).$$

График решения представлен на фиг. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wu S.L., Zhao H.Q.* Traveling fronts for a delayed reaction-diffusion system with a quiescent stage // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2011. V. 16. № 9. P. 3610–3621.

2. *Larralde H., Araujo M., Havlin S.* Diffusion-reaction kinetics for $A + B - C$ for one-dimensional systems with initially separated reactants // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. № 10. P. 855–859.
3. *Kessler D., Levine H.* Fluctuation-induced diffusive instabilities // Nat. Mater. 1998. V. 394. P. 556–558.
4. *Prum R.O., Williamson S.* Reaction-diffusion models of within-feather pigmentation patterning // Proc. R. Soc. B Biol. Sci. 2002. V. 269. № 1493. P. 781–792.
5. *Levashova N., Melnikova A., Sidorova A., Semina A.* Autowave mechanisms of structure formation in urban ecosystems as the process of self-organization in active media // Commun. Appl. Math. Comput. 2017. V. 31. № 1. P. 32–42.
6. *Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н., Семина А.Е.* Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах // Вестн. Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2016. Т. № 6. С. 39–45.
7. *Orlov A., Levashova N., Burbaev T.* The use of asymptotic methods for modelling of the carriers wave functions in the Si/SiGe heterostructures with quantum-confined layers // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. V. 586. № 012003.
8. *Ham Y.* Internal layer oscillations in FitzHugh-Nagumo equation // J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 103. P. 287–295.
9. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемехан. 1997. № 7. С. 4–32.
10. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Стационарное уравнение реакции-диффузии с разрывным реактивным членом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 5. С. 854–866.
11. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.* Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations // Lect. Notes in Comp. Sc. 2017. V. 10187. P. 107–118.
12. *Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D.* Front dynamics in an activator-inhibitor system of equations // Lect. Notes in Computer Science. 2017. V. 10187. P. 492–499.
13. *Мельникова А.А., Чэнь М.* Существование и асимптотика автоволнового решения системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 5. С. 705–715.
14. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992. P. 56–69.
15. *Pao C.V.* Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 234. № 2. P. 695–716.
16. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
17. *Nefedov N.N.* An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: existence, asymptotics, and stability // Differ. Equations. 2000. V. 36. № 2. P. 298–305.
18. *Nefedov N.* Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // Lect. Notes in Comp. Sc. 2013. V. 8236. P. 62–72.
19. *Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 3. С. 339–358.
20. *Васильева А.Б.* Об устойчивости контрастных структур // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 4. С. 114–123.
21. *Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Быцюра С.В.* Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта //Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 317–325.
22. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990. С. 27–34.
23. *Бутузов В.Ф.* Контрастные структуры типа всплеска в параболической системе двух сингулярно возмущенных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 4. С. 415–428.
24. *Васильева А.Б., Плотников А.А.* Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М.: Физический факультет МГУ, 2008. С. 38–42.
25. *Dong G.* Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order. Providence, Rhode Island, 2008.
26. *Levashova N., Nefedov N., Nikolaeva O., Orlov A., Panin A.* The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. V. 41. № 18. P. 1–15.
27. *Орлов А.О., Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т.* Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 673–690.
28. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 76–85.