

УДК 519.6

## НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ МНОГОГРАННИКА ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ

© 2019 г. В. Н. Нефедов

(125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ, Россия)

e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.06.2018 г.

Переработанный вариант 24.02.2019 г.

Принята к публикации 11.03.2019 г.

Рассматривается задача вычисления многомерного интеграла с заданной точностью. На подынтегральную функцию накладываются некоторые ограничения. Особо рассматривается важный для приложений случай, когда подынтегральная функция является плотностью нормального распределения. Библ. 13. Табл. 1.

**Ключевые слова:** вычисление многомерного интеграла, заданная точность, многогранник, плотность нормального распределения.

**DOI:** 10.1134/S0044466919070123

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача вычисления значения многомерного интеграла с заданной точностью. Особо рассматривается важный для практических приложений случай, когда множеством интегрирования является многогранник, а подынтегральной функцией является плотность нормального распределения. Основные идеи предлагаемого подхода распространяются и на более общие случаи.

При решении сложных задач численного интегрирования с заданной точностью может иметь значение увеличение размерности решаемой задачи даже на единицу. Это может быть реализовано в случае, когда интеграл от подынтегральной функции легко вычисляется для области интегрирования, являющейся произвольным координатным параллелепипедом (т.е. имеющим вид (1.3)). В некоторых случаях, описанных ниже, для вычисления таких интегралов потребуется не более  $2n$  арифметических операций. Достаточно общим случаем, когда такие интегралы вычисляются сравнительно легко, является тот, когда подынтегральная функция является “псевдомногочленом”, т.е. имеет вид (1.14). В этом случае можно применить метод многоэтапного дробления исходного координатного куба (в общем случае – параллелепипеда; см. замечание 3) П, описанного около области интегрирования  $X$  (путем последовательного деления ребер куба П пополам), на координатные кубы меньшего размера и использовать так называемые условия “отсечения–погружения”, идейно близкие к методам “ветвей и границ”, используемым в задачах дискретной оптимизации (см., например, [1]), и некоторых непрерывных задачах глобальной оптимизации (см., например, [2]–[5]). Такой подход позволяет сузить область “сложного” интегрирования до границы интегрируемой области (см. рис. 8 из [4], или рис. 1 из [6]), т.е. снизить размерность задачи на 1. Впервые эти условия были описаны автором в случае многомерного интегрирования в работах [4], [6], [7].

Кроме того, метод многоэтапного дробления позволяет в случае, когда область интегрирования  $X$  имеет вид (1.2), где  $g_i(x)$  – достаточно гладкие функции, производить линейризацию ограничений  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , на кубах последнего этапа дробления, т.е. заменять их на линейные ограничения. Отметим, что с увеличением количества этапов дробления количество “активных” ограничений уменьшается и наибольший вклад дают кубы с количеством “активных” ограничений 0, затем – с количеством “активных” ограничений 1, затем с количеством “активных” ограничений 2 и т.д. Под “активным” или существенным ограничением для данного куба

будем понимать ограничение такое, что не все точки этого куба удовлетворяют этому ограничению. При этом нередко удается определить с высокой точностью нижнюю и верхнюю оценки для значения интеграла на кубах последнего этапа дробления с небольшим количеством (1–2) “активных” ограничений. В этом случае используются рекурсивные алгоритмы точного вычисления объема кубов с одним или двумя линейными ограничениями (см. алгоритмы 3, 4), и указанные интегралы вычисляются с достаточно малой погрешностью. Объем объединения остальных кубов весьма мал, и сумму интегралов по этим кубам (вычисляемых уже без учета ограничений) можно отнести к погрешности метода. Все это дает возможность в некоторых случаях организовать вычисление значения интеграла 2-го порядка точности, т.е. с точностью порядка  $O(\tau^2)$  при достаточно гладких функциях  $g_i(x)$  и подынтегральной функцией, являющейся достаточно гладким “псевдомногочленом”, и 3-го порядка точности в некоторых случаях, когда подынтегральная функция является достаточно гладким “псевдомногочленом” и областью интегрирования является многогранник, т.е. с точностью порядка  $O(\tau^3)$ , где  $\tau$  – полудлина ребер кубов последнего этапа дробления, что и показывается в настоящей работе на примере, когда подынтегральной функцией является плотность нормального распределения.

Решение многих практических задач приводит к вычислению значений вероятностных критериев, которые относятся к сложным статистическим критериям (см. [8]) качества систем управления при наличии случайных факторов. Наиболее распространенными вероятностными критериями качества технических систем при случайных воздействиях являются функционалы квантили (см. [9]) и вероятности. Например, квантильный критерий может характеризовать точность системы управления при случайных возмущениях, гарантируемую с заданной вероятностью (см. [9]), гарантируемую площадь взлетно-посадочной полосы, на которую летательный аппарат садится с заданной вероятностью в условиях ветровых помех (см. [10]) и т.д. Функционал вероятности характеризует обычно вероятность выполнения каких-либо условий рассматриваемой задачи.

Во многих случаях, как отмечено в [9], решение прямой вероятностной задачи анализа сводится к вычислению многомерного интеграла от плотности вероятности некоторого случайного вектора по заданному множеству, что представляет собой сложную вычислительную проблему. В инженерной практике в таких случаях часто используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), обладающий простотой и универсальностью. Однако при использовании этого метода требуются большие вычислительные затраты, и при этом заданная точность вычисления интеграла не гарантируется. В связи с этим имеет смысл разработка специальных методов, применимых к некоторым достаточно узким классам подынтегральных функций, но тем не менее достаточно важным для практических приложений.

Предлагаемый метод интегрирования применялся ранее в работах [4], [6], [7]. В работе [6] он применялся для случая, когда областью интегрирования является эллипсоид, а подынтегральной функцией – плотность нормального распределения. Для приведенного в работе [6] численного метода показано, что погрешность метода является величиной порядка  $O(\tau^2)$ , где  $\tau$  – полудлина ребер кубов последнего этапа дробления, т.е. при увеличении количества этапов дробления на 1 погрешность уменьшается примерно в 4 раза (см. табл. 1, 2 из [6]). Этот результат не зависит от размерности задачи  $n$  – числа переменных. В настоящей работе аналогичный результат описан для случая, когда областью интегрирования является многогранник (см. разд. 4). Более того, в разд. 5 для случая с многогранником приводится численный метод третьего порядка точности, т.е. с погрешностью, являющейся величиной порядка  $O(\tau^3)$  независимо от числа переменных  $n$ . В разд. 2 подробно излагается алгоритм “дробления–отсечения–погружения”, его модификации, приводятся двухсторонние оценки вычисляемого многомерного интеграла. В разд. 3 рассматривается случай, когда подынтегральная функция является гауссовской плотностью вероятности. Для этого случая (или аналогичного ему, когда подынтегральная функция имеет вид  $f(x) = \prod_{i=1}^n f_0(x_i)$ , где  $f_0(t)$  – непрерывная на соответствующем отрезке функция (см. разд. 3)) можно заранее сформировать массив значений соответствующих одномерных интегралов, и тогда вычисление значений интегралов для кубов произвольного этапа дробления будет сводиться к извлечению из массива заранее вычисленных значений и произведению над ними не более  $2n$  арифметических операций.

Следует однако отметить, что предлагаемые методы являются эффективными лишь для задач малой размерности  $n$  ( $n \leq 5$ ), поскольку при решении задач большей размерности вычислительные затраты неприемлемо велики и в этом случае следует искать более эффективные методы.

Аналогичные задачи рассматривались и в других работах, в частности, в работе [13], но при этом использовались иные алгоритмы, не позволяющие описывать их для произвольного  $n$ . Например, случай с эллипсоидом описан в [13] для  $n = 2$ , а с многогранником для  $n = 3$ . Между тем, в [6] приводятся результаты численного эксперимента для эллипсоида при  $n = 3$  (см. табл. 1, 2).

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Рассматривается задача приближенного вычисления интеграла

$$I = \int_X f(x) dx, \quad (1.1)$$

где

$$X = \{x \in \Pi \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_r(x) \leq 0\}, \quad (1.2)$$

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad a_i < b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

$f, g_1, \dots, g_r$  – непрерывные на  $\Pi$  функции,  $\Pi$  является  $n$ -мерным кубом (см. замечание 3). Пусть для простоты  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi$ . В дальнейшем это предположение будет снято.

Часто оказывается (см. замечание 4), что для произвольного куба  $Q \subseteq \Pi$  вида (1.3) сравнительно легко вычисляется значение

$$I = \int_Q f(x) dx. \quad (1.4)$$

В этом случае для приближенного вычисления величины  $I$  можно воспользоваться следующим алгоритмом.

### Алгоритм 1

**Шаг 1.** Положим  $\tilde{I} = 0, \delta = 0$ . Выберем  $k$  – количество этапов дробления куба  $\Pi$ . Затем дробим  $\Pi$  на  $2^n$  кубов (делением ребер куба  $\Pi$  пополам), которые назовем кубами первого этапа дробления (соответственно кубы, являющиеся элементами аналогичного дробления кубов первого этапа дробления, назовем кубами второго этапа дробления и т.д.). Положим  $j = 1$  ( $j$  – номер текущего этапа дробления,  $1 \leq j \leq k$ ). Пусть  $V_j$  – множество кубов первого этапа дробления.

**Шаг 2.** Если  $V_j \neq \emptyset$  ( $V_j$  – текущее множество кубов  $j$ -го этапа дробления, содержащее не более  $2^n$  кубов), то перейдем к шагу 3. В противном случае присвоим  $j := j - 1$ . Если  $j = 0$ , то закончим работу алгоритма; в противном случае повторим выполнение шага 2.

**Шаг 3.** Выбрав некоторый куб  $Q$  из  $V_j$ , проверим выполнение условия “погружения”

$$Q \subseteq X. \quad (1.5)$$

Если (1.5) выполняется, то положим

$$\tilde{I} := \tilde{I} + \int_Q f(x) dx, \quad (1.6)$$

исключим куб  $Q$  из  $V_j$  и перейдем к шагу 2. В противном случае проверим выполнение условия “отсечения”

$$X \cap \text{int } Q = \emptyset. \quad (1.7)$$

Если (1.7) выполняется, то исключим куб  $Q$  из  $V_j$  и перейдем к шагу 2. Если для куба  $Q$  не выполняется ни условие погружения (1.5), ни условие отсечения (1.7), то перейдем к шагу 4.

**Шаг 4.** В случае  $j = k$  положим

$$\delta := \delta + \int_Q f(x) dx, \quad (1.8)$$

исключим куб  $Q$  из  $V_k$  и перейдем к шагу 2. В противном случае дробим куб  $Q$  (аналогично дроблению куба  $\Pi$  на  $2^n$  кубов первого этапа дробления), в результате чего получим множество  $V_{j+1}$ , состоящее из  $2^n$  кубов  $(j + 1)$ -го этапа дробления. Присвоим  $j := j + 1$  и перейдем к шагу 3.

**Замечание 1.** В общем случае проверка условия (1.5) является очень сложной операцией. Однако, если область интегрирования является объединением небольшого числа выпуклых попарно не пересекающихся областей, то эта проверка осуществляется достаточно легко. Здесь важно, чтобы проверка принадлежности некоторой точки любой из этих областей была достаточно несложной.

**Замечание 2.** Нетрудно показать (см. утверждение 1 из [7]), что одновременное выполнение условий погружения (1.5) и отсечения (1.7) для некоторого куба  $Q \subseteq \Pi$  вида (1.3) равносильно тому, что  $\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset$ , где  $\partial X$  – граница множества  $X$ .

Оценим погрешность метода. После выполнения алгоритма 1 справедливо

$$\tilde{I} \leq I \leq \tilde{I} + \delta, \tag{1.9}$$

$$\delta = \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \int_Q f(x) dx. \tag{1.10}$$

Здесь и далее суммирование осуществляется по всем кубам  $Q$   $k$ -го (т.е. последнего) этапа дробления, для которых  $\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset$  (т.е. для которых не выполняется ни условие отсечения, ни условие погружения; см. замечание 2).

Нетрудно показать (см. утверждение 7 из [4]), что в случае  $\mu(\{x \in \Pi | g(x) = 0\}) = 0$ , где  $g(x) = \max\{g_1(x), \dots, g_r(x)\}$ ,  $\mu(Y)$  – мера Лебега множества  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , выполняется

$$\delta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \tag{1.11}$$

**Замечание 3.** Алгоритм 1 остается в силе, если  $\Pi$  является  $n$ -мерным параллелепипедом (т.е. в случае, когда для некоторых  $i \in \{2, \dots, n\}$   $b_i - a_i \neq b_1 - a_1$ ). В этом случае элементами многоэтапного дробления  $\Pi$  будут не кубы, а параллелепипеды. Однако наиболее удобные программные реализации алгоритма 1 описываются для случая, когда  $\Pi$  является  $n$ -мерным кубом и соответственно элементами многоэтапного дробления  $\Pi$  будут кубы. Приведем некоторые рассуждения, показывающие, что условие, когда  $\Pi$  – параллелепипед является мало ограничительным, и в этом случае небольшая модификация алгоритма 1 приводит к тому, что элементами многоэтапного дробления некоторого куба  $\Pi'$ , включающего в себя  $\Pi$  будут являться кубы. Действительно, в случае, когда  $\Pi$  – параллелепипед, рассмотрим куб  $\Pi' = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$ , где  $b'_i = a_i + \max_{1 \leq l \leq n} \{b_l - a_l\}$ . Тогда  $b'_i - a_i = \max_{1 \leq l \leq n} \{b_l - a_l\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\Pi \subseteq \Pi'$ , а следовательно,  $X = \{x \in \Pi' | x \in \Pi, g_1(x) \leq 0, \dots, g_r(x) \leq 0\}$ , и для нахождения приближенного значения интеграла  $I = \int_X f(x) dx$  можно использовать многоэтапное дробление куба  $\Pi'$ . Заметим, однако, что мера куба  $\Pi'$  может многократно превосходить меру параллелепипеда  $\Pi$ . В связи с этим модифицируем шаг 3 алгоритма 1. Будем теперь перед проверкой выполнения условий (1.5), (1.7) дополнительно проверять выполнение условия

$$\Pi' \cap \text{int } Q = \emptyset. \tag{1.12}$$

Если условие (1.12) выполняется, то справедливо условие (1.7), куб  $Q$  исключается на шаге 3 из  $V_j$  и тогда перейдем к шагу 2. Такая модификация шага 3 позволит за незначительное время отсечь “лишние” области в кубе  $\Pi'$  (по сравнению с  $\Pi$ ). Между тем, условие (1.12) проверяется тривиальным образом за  $O(n)$  простых операций. Действительно, пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$ . Тогда условие (1.12) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}: \alpha_i \geq b'_i \quad \text{или} \quad \beta_i \leq a_i. \tag{1.13}$$

**Замечание 4.** Сделанное выше предположение о наличии достаточно простой процедуры вычисления интеграла (1.4), где  $Q$  – произвольный  $n$ -мерный куб (или параллелепипед) выполняется в случае, когда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^s \prod_{j=1}^n f_{ij}(x_j), \tag{1.14}$$

где  $f_{ij}(t)$  – непрерывные на  $[a_j, b_j]$  функции. В частности, разложению (1.14) удовлетворяет произвольный многочлен, с переменными  $x_1, \dots, x_n$ . Заметим в связи с этим, что в некоторых случаях непрерывная функция может быть приближена многочленом с небольшим числом слагаемых. Другим важным для приложений является случай, когда подинтегральная функция является плотностью нормального распределения, т.е.  $f(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$ , где  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Алгоритм 1 (а также описанную в замечании 3 модификацию этого алгоритма) можно дополнительно модифицировать, с тем чтобы уменьшить погрешность  $\delta$  при том же количестве этапов дробления  $k$ .

Модифицируем шаг 4 алгоритма 1. Теперь в случае  $j = k$  определим величины  $\underline{s}_Q, \bar{s}_Q, \underline{b}_Q, \bar{b}_Q$ , удовлетворяющие условиям

$$0 \leq \underline{s}_Q \leq \mu(Q \cap X) \leq \bar{s}_Q \leq \mu(Q), \quad (1.15)$$

$$\underline{b}_Q \leq \min f(Q) = \min\{f(x)|x \in Q\}, \quad \bar{b}_Q \geq \max f(Q) = \max\{f(x)|x \in Q\}, \quad (1.16)$$

положим

$$\tilde{I} := \tilde{I} + \underline{b}_Q \underline{s}_Q, \quad \delta := \delta + (\bar{b}_Q \bar{s}_Q - \underline{b}_Q \underline{s}_Q), \quad (1.17)$$

исключим куб  $Q$  из  $V_k$  и перейдем к шагу 2.

В результате такой модификации получим из алгоритма 1 новый алгоритм 2, который будем считать основным алгоритмом. Очевидно, что после выполнения алгоритма 2 снова справедливы неравенства (1.9) и выполняется

$$\delta = \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} (\bar{b}_Q \bar{s}_Q - \underline{b}_Q \underline{s}_Q) = \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \bar{b}_Q (\bar{s}_Q - \underline{s}_Q) + \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \underline{s}_Q (\bar{b}_Q - \underline{b}_Q). \quad (1.18)$$

**Замечание 5.** Ранее предполагалось, что  $f(x) \geq 0, \forall x \in \Pi$ . Пусть теперь это условие не выполняется. В этом случае модифицируем алгоритм 2 и на шаге 4 этого алгоритма вместо (1.17) положим

$$\tilde{I} := \tilde{I} + \min\{0; \underline{b}_Q\} \bar{s}_Q + \max\{0; \underline{b}_Q\} \bar{s}_Q, \quad (1.19)$$

$$\delta := \delta + (\max\{0; \bar{b}_Q\} - \min\{0; \underline{b}_Q\}) \bar{s}_Q + (\min\{0; \bar{b}_Q\} - \max\{0; \underline{b}_Q\}) \underline{s}_Q. \quad (1.20)$$

Заметим, что выполняются неравенства

$$\min\{0; \underline{b}_Q\} \bar{s}_Q + \max\{0; \underline{b}_Q\} \underline{s}_Q \leq \int_Q f(x) dx \leq \max\{0; \bar{b}_Q\} \bar{s}_Q + \min\{0; \bar{b}_Q\} \underline{s}_Q,$$

из которых следует, что после выполнения модифицированного алгоритма 2, в котором при выполнении шага 4 вместо присвоения по формулам (1.17) осуществляется присвоение по формулам (1.19), (1.20) справедливы неравенства (1.9) и при этом

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} [(\max\{0; \bar{b}_Q\} - \min\{0; \underline{b}_Q\}) \bar{s}_Q + (\min\{0; \bar{b}_Q\} - \max\{0; \underline{b}_Q\}) \underline{s}_Q] = \\ &= \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} (\max\{0; \bar{b}_Q\} - \min\{0; \underline{b}_Q\}) (\bar{s}_Q - \underline{s}_Q) + \\ &+ \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \underline{s}_Q [(\min\{0; \bar{b}_Q\} - \max\{0; \underline{b}_Q\}) + (\max\{0; \bar{b}_Q\} - \min\{0; \underline{b}_Q\})] = \\ &= \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} (\max\{0; \bar{b}_Q\} - \min\{0; \underline{b}_Q\}) (\bar{s}_Q - \underline{s}_Q) + \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \underline{s}_Q (\bar{b}_Q - \underline{b}_Q). \end{aligned}$$

**Замечание 6.** В ряде случаев проверка выполнения условия погружения (1.5) или условия отсечения (1.7) оказывается очень трудоемкой (или даже практически невыполнимой). В этих случаях часто оказывается более выгодным заменить условия (1.5), (1.7) на легко проверяемые условия, достаточные для (1.5), (1.7) соответственно. Широкий набор таких условий приведен в работе [4]. Напротив, условия (1.5), (1.7) можно заменить на более слабые:  $\mu(Q \cap X) = \mu(Q)$ ,  $\mu(Q \cap X) = 0$  соответственно. Однако указанные условия являются практически проверяемыми лишь в очень редких случаях.

3. СЛУЧАЙ, КОГДА ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ПЛОТНОСТЬЮ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим теперь задачу вычисления величины  $I$ , удовлетворяющей (1.1), в случае, когда

$$f(x) = \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}, \quad |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Тогда, очевидно, справедливо разложение (1.14). Приведем некоторые уточнения алгоритма 2 для случая (2.1).

Заметим, что в случае (2.1) для практической реализации алгоритма 2 необходимо:

а) достаточно быстро находить величины  $\underline{b}_Q, \bar{b}_Q$ , удовлетворяющие (1.16), причем разность  $\bar{b}_Q - \underline{b}_Q$  должна быть как можно меньшей;

б) достаточно быстро вычислять  $\int_Q \varphi_n(x) dx$ , где  $Q$  – произвольный куб, являющийся элементом многоэтапного дробления куба  $\Pi$ ;

в) достаточно быстро находить величины  $\underline{s}_Q, \bar{s}_Q$ , удовлетворяющие (1.15), причем разность  $\bar{s}_Q - \underline{s}_Q$  должна быть как можно меньшей;

г) достаточно быстро проверять выполнение условий (1.5), (1.7) (или условий, достаточных для (1.5), (1.7) соответственно; см. замечание б).

Опишем методы решения перечисленных задач а)–г).

Рассмотрим сначала задачу нахождения величин  $\underline{b}_Q, \bar{b}_Q$ , удовлетворяющих (1.16), где  $Q$  – куб  $k$ -го (т.е. последнего) этапа дробления. Будем искать величины  $\underline{b}_Q, \bar{b}_Q$ , удовлетворяющие равенствам:

$$\underline{b}_Q = \min \varphi_n(Q), \quad \bar{b}_Q = \max \varphi_n(Q). \quad (2.2)$$

Эти величины находятся за  $O(n)$  арифметических операций. Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $c(Q) = ((\alpha_1 + \beta_1)/2, \dots, (\alpha_n + \beta_n)/2)$ ,

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } c_i(Q) < 0, \\ \beta_i, & \text{если } c_i(Q) \geq 0, \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \alpha_i \geq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i, \\ \beta_i, & \text{если } \beta_i < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\varphi_n(u) = \min \varphi_n(Q)$ ,  $\varphi_n(v) = \max \varphi_n(Q)$ , т.е. можно положить  $\underline{b}_Q = \varphi_n(u)$ ,  $\bar{b}_Q = \varphi_n(v)$ .

Используя (2.2), уточним для рассматриваемого случая (2.1) оценку погрешности  $\delta$ . Предварительно обозначим через  $\tau$  половину длины ребер кубов  $k$ -го (т.е. последнего) этапа дробления куба  $\Pi$  (указанное обозначение будем использовать и всюду далее), т.е.  $\tau = T/2^{k+1}$ , где  $T = b_1 - a_1$  – длина ребер куба  $\Pi$ . Заметим, что (см. утверждение 2 из [7]) для величины  $L = \sqrt{n}/[(2\pi)^{n/2} \sqrt{e}]$  выполняется  $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad |\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| \leq L \|x - x'\|$ , где  $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  – норма вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ , а следовательно, учитывая (2.2), получаем  $\bar{b}_Q \leq \max \varphi_n(\mathbb{R}^n) = 1/(2\pi)^{n/2}$ ,  $\underline{b}_Q - \bar{b}_Q \leq 2L\tau$ , откуда, используя (1.18), (1.15), имеем

$$\delta \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} (\bar{s}_Q - \underline{s}_Q) + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e}} \tau \sum_{\partial X \cap \text{int } Q \neq \emptyset} \mu(Q \cap X) \right]. \quad (2.3)$$

Опишем теперь следующий метод, обеспечивающий очень быстрое вычисление (в процессе работы алгоритма 2) интегралов  $\int_Q \varphi_n(x) dx$ , для кубов  $Q$ , являющихся элементами многоэтапного дробления куба  $\Pi$ . При этом будем считать, что  $\Pi$  является кубом следующего вида:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b, i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (2.4)$$

Рассуждения из замечания 3 показывают, что такое предположение не является ограничительным. Действительно, если первоначально  $\Pi$  в (1.2) является не кубом, а  $n$ -мерным параллелепи-

педом, то рассмотрим куб  $\Pi'$  вида (2.4), где  $a = \min\{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $b = \max\{b_1, \dots, b_n\}$ . Тогда  $\Pi \subseteq \Pi'$ , а следовательно,  $X = \{x \in \Pi' \mid x \in \Pi, g_1(x) \leq 0, \dots, g_r(x) \leq 0\}$ , и для нахождения приближенного значения интеграла  $I = \int_X \varphi_n(x) dx$  можно использовать многоэтапное дробление куба  $\Pi'$ . Заметим, однако, что мера куба  $\Pi'$  может многократно превосходить меру параллелепипеда  $\Pi$ . В связи с этим модифицируем шаг 3 алгоритма 1 (а следовательно, и алгоритма 2 в соответствии с замечанием 3).

Итак, пусть теперь куб  $\Pi$  имеет вид (2.4). Тогда перед началом работы алгоритма 2 сформируем множество (одномерный массив)  $\Omega = \{\Phi(a + (b - a)i/2^k) \mid i = 0, 1, \dots, 2^k\}$ , где  $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt$ .

Заметим теперь, что если  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  – куб, являющийся элементом многоэтапного дробления куба  $\Pi$  вида (2.4), то

$$\int_Q \varphi_n(x) dx = \prod_{i=1}^n [\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)], \quad (2.5)$$

и при этом  $\Phi(\beta_i), \Phi(\alpha_i) \in \Omega, i = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, для вычисления интеграла (2.5) достаточно извлечь  $2n$  элементов из заранее заготовленного множества  $\Omega$  и произвести над ними  $n$  операций вычитания и  $n - 1$  операций умножения.

Аналогичным приемом можно воспользоваться и в случае, когда имеет место более общее разложение подынтегральной функции  $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ , где  $f_i(t)$  – непрерывная на  $[a, b]$  функция. Соответственно, в случае, когда справедливо еще более общее разложение  $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ , где  $f_i(t)$  – непрерывные на  $[a, b]$  функции, нам понадобятся  $n$  множеств, аналогичных  $\Omega$ , а в случае (1.17) –  $sn$  множеств. Их можно вычислить заранее для достаточно большого  $k$  и хранить на цифровом накопителе для решения быть может не одной, а группы задач.

#### 4. СЛУЧАЙ, КОГДА ОБЛАСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ МНОГОГРАННИКОМ

Пусть  $X = \{x \in \Pi \mid l_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r\}$ ,  $l_i(x) = \langle e^{(i)}, x \rangle + d_i$ ,  $e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $e^{(i)} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Будем предполагать, что выполняются условия:

$$\text{int } X \neq \emptyset, \quad (3.1)$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, r\} \quad X \neq \{x \in \Pi \mid l_i(x) \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{j\}\}. \quad (3.2)$$

Выполнение условия (3.2) означает, что каждое из ограничений  $l_i(x) \leq 0$ , где  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , является существенным, так как в результате отбрасывания этого ограничения получаем множество, отличное от  $X$ . Проверка выполнения условий (3.1), (3.2) осуществляется в результате решения нескольких задач линейного программирования (ЗЛП).

Для выполнения (3.1) необходимо и достаточно, чтобы значение минимума в ЗЛП

$$v \rightarrow \min; \quad x \in \Pi, \quad l_i(x) - v \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

было отрицательным.

Соответственно, для выполнения (3.2) необходима и достаточна строгая положительность значений максимума в ЗЛП

$$l_j(x) \rightarrow \max; \quad x \in \Pi, \quad l_i(x) \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{j\},$$

где  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Рассмотрим вопрос о проверке условия погружения (1.5). Пусть

$$X_j = \{x \in \Pi \mid l_j(x) \leq 0\}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Тогда для произвольного куба (или параллелепипеда)

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \Pi,$$

очевидно, выполняется  $Q \subseteq X \Leftrightarrow Q \subseteq X_j, j = 1, 2, \dots, r$ , а следовательно, для проверки условия погружения (1.5) достаточно выполнить следующие действия. Для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  находим угловую точку  $v(j)$  куба  $Q$ , на которой достигается максимум в задаче  $l_j(x) \rightarrow \max; x \in Q$ . Очевидно, что

$$v_i(j) = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } e_i^{(j)} \geq 0, \\ \alpha_i, & \text{если } e_i^{(j)} < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , т.е. точка  $v(j)$  находится за  $O(n)$  элементарных операций. Тогда, если  $l_j(v(j)) \leq 0$ , то  $Q \subseteq X_j$ , в противном случае

$$Q \setminus X_j \neq \emptyset. \tag{3.3}$$

В случае выполнения (3.3) условие (1.5) не является выполненным. Если же  $Q \subseteq X_j$  при всех  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ , то условие (1.5) выполняется.

Будем называть ограничение  $l_j(x) \leq 0$  такое, что выполняется (3.3), *существенным* для  $Q$ , а множество номеров существенных для  $Q$  ограничений обозначать через  $J_Q$ , т.е.  $J_Q = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | Q \setminus X_j \neq \emptyset\}$ . Заметим, что если для некоторого куба  $Q$ , являющегося элементом многоэтапного дробления куба  $\Pi$ , выполняется  $Q \subseteq X_j$  (где  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ ), то для любого куба  $Q'$ , являющегося элементом дальнейшего дробления куба  $Q$ , тем более будет выполняться включение  $Q' \subseteq X_j$  и поэтому при проверке условия  $Q' \subseteq X$  достаточно ограничиться проверкой включений  $Q' \subseteq X_j, j \in J_Q$ . При таком подходе получаем существенную экономию в вычислениях при проверке условия погружения (1.5). Таким образом, проверка условия погружения (1.5) осуществляется точно и достаточно экономично.

Для проверки выполнения условия отсечения (1.7) достаточно решить задачу

$$\max\{l_i(x) | i \in J_Q\} \rightarrow \min(= \gamma); \quad x \in Q.$$

Тогда, если  $\gamma \geq 0$ , то (1.7) выполняется, а если  $\gamma < 0$ , то нет. Заметим, что эта задача сводится к ЗЛП, которая может быть точно решена с помощью симплекс-метода. Однако при этом проверка условия (1.7) оказывается весьма трудоемкой операцией. В связи с этим имеет смысл заменить проверку условия (1.7) на проверку легко проверяемого условия, достаточного для (1.7) (см. замечание б). Действительно, рассмотрим следующее легко проверяемое условие:

$$\exists j \in J_Q : X_j \cap \text{int } Q = \emptyset \tag{3.4}$$

(в этом условии участвуют только существенные на  $Q$  ограничения). Очевидно, что из (3.4) следует (1.7), т.е. условие (3.4) является достаточным для (1.7). Проверка выполнения условия (3.4) осуществляется следующим образом. Для каждого  $j \in J_Q$  находим угловую точку  $u(j)$  куба  $Q$ , на которой достигается минимум в задаче  $l_j(x) \rightarrow \min; x \in Q$ . Очевидно, что

$$u_i(j) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } e_i^{(j)} \geq 0, \\ \beta_i, & \text{если } e_i^{(j)} < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , т.е. эта точка находится за  $O(n)$  элементарных операций. Тогда, если  $l_j(u(j)) \geq 0$ , то условие (3.4) (а следовательно, и условие (1.7)) выполняется. Если же  $l_j(u(j)) < 0$  при всех  $j \in J_Q$ , то условие (3.4) не выполняется.

Обозначим через  $G_\tau$  множество кубов  $Q$  последнего этапа дробления куба  $\Pi$ , для которых не выполняется ни условие погружения (1.5), ни условие (3.4) (являющееся достаточным для условия отсечения (1.7)). Тогда, если заменить на шаге 3 алгоритма 2 проверку выполнения условия (1.7) на проверку выполнения условия (3.4) (в соответствии с замечанием б), то после выполнения алгоритма 2, очевидно, будут справедливы неравенства (1.9), а погрешность  $\delta$  будет удовлетворять равенству, аналогичному (1.18), но в котором суммирование производится по кубам



$Q \in G_\tau$ . Соответственно, в рассматриваемом случае (2.1) будет выполняться неравенство (аналогичное неравенству (2.3))

$$\delta \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \sum_{Q \in G_\tau} (\bar{s}_Q - \underline{s}_Q) + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e}} \tau \sum_{Q \in G_\tau} \mu(Q \cap X) \right]. \tag{3.5}$$

**Замечание 7.** В случае  $|J_Q| = 1$  справедливо следующее: (3.4)  $\Leftrightarrow$  (1.7), т.е. в этом случае (наиболее частом; см. утверждения 16, 17 из [7]) замена (1.7) на (3.4) тем не менее обеспечивает точную проверку выполнения условия (1.7). В случае же нескольких существенных ограничений может оказаться, что условие (3.4) не справедливо, но условие (1.7) выполняется, и тогда нам придется производить дополнительные дробления куба  $Q$  (в случае, если  $Q$  не является кубом последнего этапа дробления), или дополнительно вычислять для  $Q$  величины  $\underline{s}_Q, \bar{s}_Q, \underline{b}_Q, \bar{b}_Q$  (в случае, если  $Q$  является кубом последнего этапа дробления). Практика показывает, что таких дополнительных дроблений обычно оказывается не более двух. На рис. 3 из [7] приведен пример, когда выполняется условие (1.7), но не выполняется условие (3.4). Однако для кубов, являющихся элементами дробления куба, изображенного на этом рисунке, условие (3.4) уже выполняется.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении для кубов  $Q \in G_\tau$  величин  $\underline{s}_Q, \bar{s}_Q$ , удовлетворяющих (1.15). Предварительно опишем алгоритм вычисления меры множества вида  $V^{(n)} = \{x \in Q | \langle e, x \rangle + d \leq 0\}$ , где  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  – произвольный  $n$ -мерный куб (или параллелепипед),  $\alpha_i < \beta_i, i = 1, 2, \dots, n, e \in \mathbb{R}^n, |e| > 0$  (случай, когда  $|e| = 0$  тривиален).

**Алгоритм 3**

**Шаг 1.** Определим точки  $u, v$ , на которых соответственно достигаются минимум и максимум функции  $\langle e, x \rangle + d$  на  $Q$ :

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } e_i \geq 0, \\ \beta_i, & \text{если } e_i < 0, \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } e_i \geq 0, \\ \alpha_i, & \text{если } e_i < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $\langle e, v \rangle + d \leq 0$ , то  $V^{(n)} = Q$  и тогда  $\mu(V^{(n)}) = \mu(Q)$ . Если  $\langle e, u \rangle + d \geq 0$ , то  $V^{(n)} \cap \text{int } Q = \emptyset$  и тогда  $\mu(V^{(n)}) = 0$ . Если нам еще не удалось определить  $\mu(V^{(n)})$ , то перейдем к шагу 2.

**Шаг 2.** Если  $n = 1$ , то  $V^{(n)}$  является прямолинейным отрезком, а  $\mu(V^{(n)})$  – разностью его верхней и нижней границ, которые находятся тривиальным образом. Если  $n > 1$ , то перейдем к шагу 3.

**Шаг 3.** Определим любую точку  $w$  на гиперплоскости, заданной равенством  $\langle e, x \rangle + d = 0$  (например, точку пересечения этой гиперплоскости с прямой, проходящей через точки  $u, v$ ). Она найдется, поскольку  $\langle e, v \rangle + d > 0, \langle e, u \rangle + d < 0$  (см. шаг 1 алгоритма 3). Пусть

$$H_{ij} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = \alpha_i\}, & \text{если } j = 1, \\ \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = \beta_i\}, & \text{если } j = 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

( $H_{ij}$  являются  $(n - 1)$ -мерными гиперплоскостями, проходящими через грани куба  $Q$ ), где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$ . Определим числа

$$h_{ij} = \begin{cases} w_i - \alpha_i, & \text{если } j = 1, \\ \beta_i - w_i, & \text{если } j = 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

( $|h_{ij}| = \rho(w, H_{ij})$  – расстояние от  $w$  до  $H_{ij}$ ), где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$ .

**Шаг 4** (рекурсия по  $n$ ). Осуществим сведение задачи вычисления  $\mu(V^{(n)})$  к  $2n$  аналогичным задачам размерности  $n - 1$  (см. рис. 2 из [7])

$$\mu(V^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 h_{ij} \mu(V_{ij}^{(n-1)}), \tag{3.8}$$

Таблица

$k$	$\tilde{I}$	$\tilde{I} + \delta$	$\delta$
4	0.781744375667924	0.792289376178296	0.0105450005103716
5	0.784924691133069	0.787097696396805	0.00217300526373691
6	0.785685556863937	0.786183881161937	0.00049832429799992

где

$$V_{ij}^{(n-1)} = V^{(n)} \cap H_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2. \tag{3.9}$$

При вычислении  $\mu(V_{ij}^{(n-1)})$  снова действуем согласно шагам 1–4, присвоив  $n := n - 1$ , и т.д.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении для кубов  $Q \in G_\tau$  величин  $\underline{s}_Q, \bar{s}_Q$ .

В случае  $|J_Q| = 1$  положим

$$\underline{s}_Q = \bar{s}_Q = \mu(Q \cap X), \tag{3.10}$$

где в этом случае  $\mu(Q \cap X)$  вычисляется точно с помощью алгоритма 3. А в случае  $Q \in G_\tau, |J_Q| \geq 2$  положим

$$\underline{s}_Q = 0, \quad \bar{s}_Q = \mu(Q). \tag{3.11}$$

Оценим погрешность метода. Из утверждений 16, 17 из [7] следует, что при  $\tau \rightarrow 0+$  выполняется

$$\sum_{Q \in G_\tau} \mu(Q) = O(\tau), \quad \sum_{Q \in G_\tau, |J_Q|=1} \mu(Q) = O(\tau), \quad \sum_{Q \in G_\tau, |J_Q| \geq 2} \mu(Q) = O(\tau^2), \tag{3.12}$$

откуда, используя (3.5) и выполнение (3.10), (3.11) при  $|J_Q| = 1, |J_Q| \geq 2$  соответственно (где  $Q \in G_\tau$ ), получаем, что  $\delta = O(\tau^2)$  при  $\tau \rightarrow 0+$ .

Таким образом, описан метод второго порядка точности для случая, когда множеством интегрирования является многогранник, а подынтегральная функция является плотностью нормального распределения. Ранее в работе [6] был описан метод второго порядка точности для случая, когда область интегрирования является эллипсоидом. В [6] приведены результаты вычислительных экспериментов, из которых видно, что при увеличении количества этапов дробления на 1 (что соответствует уменьшению  $\tau$  ровно в два раза) погрешность  $\delta$  уменьшалась примерно в 4 раза.

Автором была составлена программа для вычисления  $I = \int_X \varphi_n(x) dx$  для случая, когда  $X$  – многогранник, реализующая описанный метод второго порядка точности. Рассматривался пример, когда  $n = 5, X = \{x \in \Pi | x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 7 \leq 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 8 \leq 0, x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 9 \leq 0, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 7 \leq 0\}, \Pi = \{x \in \mathbb{R}^5 | -2 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ , т.е. при  $r = 4$ . Результаты вычислений величин  $\tilde{I}, \tilde{I} + \delta, \delta$ , удовлетворяющих (1.9), приведены в таблице при различных  $k = 4, 5, 6$ .

Из этой таблицы видно, что погрешность  $\delta$  уменьшается примерно в 4 раза при каждом увеличении  $k$  на 1.

### 5. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

В случае, когда множеством интегрирования является многогранник, а подынтегральная функция является плотностью нормального распределения (последнее совсем не обязательно) удастся описать метод третьего порядка точности, т.е. при использовании этого метода при увеличении количества этапов дробления на 1 (что соответствует уменьшению  $\tau$  ровно в два раза) погрешность  $\delta$  должна уменьшаться примерно в 8 раз.

Опишем метод третьего порядка точности. Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\} \in G_\tau$ . Обозначим  $\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(c(Q)) + \langle \varphi'_n(c(Q)), x - c(Q) \rangle$ ;  $\eta_i = \max\{|t^2 - 1| : t \in [\alpha_i, \beta_i]\}, i = 1, 2, \dots, n$ . Оче-

видно, что  $\eta_i = \max\{|\alpha_i^2 - 1|; |\beta_i^2 - 1|\}$ , если  $0 \notin [\alpha_i, \beta_i]$ , и  $\eta_i = \max\{|\alpha_i^2 - 1|; |\beta_i^2 - 1|; 1\}$ , если  $0 \in [\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Нетрудно показать (см. утверждение 25 из [7]), что  $\forall x \in Q \quad |\tilde{\varphi}_n(x) - \varphi_n(x)| \leq a_Q \tau^2$ , где

$$a_Q = \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i + \left( \sum_{i=1}^n \max\{|\alpha_i|; |\beta_i|\} \right)^2 - \sum_{i=1}^n (\max\{|\alpha_i|; |\beta_i|\})^2 \right] \max \varphi_n(Q)$$

(очевидно, что для любого куба  $Q \subseteq \Pi$  справедливо  $a_Q \subseteq a_\Pi$ , т.е. величина  $a_Q$  ограничена сверху).

Обозначим  $\underline{\varphi}_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x) - a_Q \tau^2$ ,  $\overline{\varphi}_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x) + a_Q \tau^2$ . Тогда

$$\forall x \in Q \quad \underline{\varphi}_n(x) \leq \varphi_n(x) \leq \overline{\varphi}_n(x), \quad \overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) \leq 2a_Q \tau^2,$$

и при этом  $\underline{\varphi}_n(x)$ ,  $\overline{\varphi}_n(x)$  являются линейными функциями.

Модифицируем теперь алгоритм 2 следующим образом (в результате получим алгоритм 4). Для каждого куба  $Q \in G_\tau$ , такого, что  $|J_Q| = 1$ , присвоим

$$\tilde{I} := \tilde{I} + \int_{Q \cap X} \underline{\varphi}_n(x) dx, \tag{4.1}$$

$$\delta := \delta + \left( \int_{Q \cap X} \overline{\varphi}_n(x) dx - \int_{Q \cap X} \underline{\varphi}_n(x) dx \right), \tag{4.2}$$

а с остальными кубами (являющимися элементами многоэтапного дробления куба  $\Pi$ ) поступим согласно алгоритму 2. Очевидно, что после выполнения алгоритма 4 справедливы неравенства (1.9). Оценим погрешность метода (для простоты будем опускать запись  $Q \in G_\tau$  под знаком сумм). Заметим, что (аналогично (2.3))

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{|J_Q|=1} \int_{Q \cap X} [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)] dx + \sum_{|J_Q| \geq 2} (\overline{s}_Q \overline{b}_Q - \underline{s}_Q \underline{b}_Q) \leq \\ &\leq \sum_{|J_Q|=1} 2a_Q \tau^2 \mu(Q \cap X) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \sum_{|J_Q| \geq 2} (\overline{s}_Q - \underline{s}_Q) + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e}} \tau \sum_{|J_Q| \geq 2} \mu(Q \cap X) \right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Пусть для кубов  $Q \in G_\tau$  таких, что  $|J_Q| \leq 2$ , имеет место (3.10), а при  $|J_Q| \geq 3$  – (3.11) (что обеспечивается использованием описанного ниже алгоритма 5). Тогда из (4.3), используя утверждения 16–18 из [7], имеем

$$\delta \leq 2a_\Pi \tau^2 \sum_{|J_Q|=1} \mu(Q) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \sum_{|J_Q| \geq 3} \mu(Q) + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e}} \tau \sum_{|J_Q| \geq 2} \mu(Q) \right] = O(\tau^3) \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0+.$$

Таким образом, для описания метода третьего порядка точности необходимо указать метод точного вычисления интеграла (см. (4.1))

$$I = \int_{Q \cap X} (\langle e', x \rangle + d') dx, \tag{4.4}$$

где  $e' \in \mathbb{R}^n$ ,  $d' \in \mathbb{R}$ ,  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  – некоторый куб (или в общем случае – параллелепипед),  $Q \subseteq \Pi$ ,  $|J_Q| = 1$ , и не выполняется условие (3.4).

Выведем формулу для вычисления интеграла (4.4). Обозначим

$$S^{(n)}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq t \right\}, \quad S^{(n,v)}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^v x_i \leq t \right\},$$

$$R_\geq^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\},$$

где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq v \leq n$ .

Приведем сначала формулы для вычисления интегралов

$$I^{(n)}(t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap \mathbb{R}_+^n} 1 \cdot dx, \quad I_i^{(n)}(t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap \mathbb{R}_+^n} x_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что  $I^{(n)}(t) = 0$ , если  $t \leq 0$  и  $I^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} t^n$ , если  $t > 0$ . Эта формула легко доказывается методом математической индукции. Кроме того,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  в случае  $t \leq 0$   $I_i^{(n)}(t) = 0$ , а в случае  $t > 0$  имеем

$$\begin{aligned} I_i^{(n)}(t) &= I_n^{(n)}(t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap \mathbb{R}_+^n} x_n dx = \int_0^t x_n \left( \int_{S^{(n-1)}(t-x_n) \cap \mathbb{R}_+^{n-1}} 1 \cdot dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t x_n (t-x_n)^{n-1} dx_n = (\text{используем подстановку } x_n = t-u) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^0 (t-u) u^{n-1} du = \frac{1}{(n-1)!} \left[ t \int_0^t u^{n-1} du - \int_0^t u^n du \right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n+1} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1}. \end{aligned}$$

Приведем теперь формулы для вычисления интегралов

$$I^{(n)}(y, t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap (\mathbb{R}_+^{n+y})} 1 \cdot dx, \quad I_i^{(n)}(y, t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap (\mathbb{R}_+^{n+y})} x_i dx,$$

$i = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$ . Используя подстановку вида  $x = v + y$ , где  $v \in \mathbb{R}^n$  – новые переменные, нетрудно показать, что

$$I^{(n)}(y, t) = I^{(n)}\left(t - \sum_{j=1}^n y_j\right), \quad I_i^{(n)}(y, t) = I_i^{(n)}\left(t - \sum_{j=1}^n y_j\right) + y_i I^{(n)}\left(t - \sum_{j=1}^n y_j\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Приведем теперь формулы для вычисления интегралов

$$I^{(n)}(Q, t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap Q} 1 \cdot dx, \quad I_i^{(n)}(Q, t) = \int_{S^{(n)}(t) \cap Q} x_i dx,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{R}, Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  – прямоугольный параллелепипед ( $\alpha_i < \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ ). Для любых номеров  $i_1, \dots, i_m$  таких, что  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ , обозначим через  $y(i_1, \dots, i_m)$  вектор из  $\mathbb{R}^n$  с координатами

$$y_i(i_1, \dots, i_m) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}, \\ \beta_i, & \text{если } i \in \{i_1, \dots, i_m\}, \end{cases}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть, кроме того,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда по формуле включений и исключений (см., например, [11])

$$I^{(n)}(Q, t) = I^{(n)}(\alpha, t) + \sum_{m=1}^n \left[ (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} I^{(n)}(y(i_1, \dots, i_m), t) \right],$$

и  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$I_i^{(n)}(Q, t) = I_i^{(n)}(\alpha, t) + \sum_{m=1}^n \left[ (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} I_i^{(n)}(y(i_1, \dots, i_m), t) \right].$$

**Замечание 8.** Множество точек вида  $y(i_1, \dots, i_m)$  в приведенных формулах представляет собой множество всех угловых точек прямоугольного параллелепипеда  $Q$  (за исключением  $\alpha$ ). При этом в случае  $\sum_{i=1}^n y(i_1, \dots, i_m) \geq t$  справедливы равенства  $I^{(n)}(y(i_1, \dots, i_m), t) = 0, I_i^{(n)}(y(i_1, \dots, i_m), t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , что дает возможность для уменьшения объема вычислений.

Приведем далее формулы для вычисления интегралов

$$I^{(n,v)}(Q,t) = \int_{S^{(n,v)}(t) \cap Q} 1 \cdot dx, \quad I_i^{(n,v)}(Q,t) = \int_{S^{(n,v)}(t) \cap Q} x_i dx,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{R}, 1 \leq v \leq n, Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Обозначим  $Q^{(v)} = \{v \in \mathbb{R}^v \mid \alpha_i \leq v_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, v\}$ . Тогда, как нетрудно видеть,

$$I^{(n,v)}(Q,t) = I^{(v)}(Q^{(v)},t) \prod_{j=v+1}^n (\beta_j - \alpha_j) \quad \text{и} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$I_i^{(n,v)}(Q,t) = \begin{cases} I_i^{(v)}(Q^{(v)},t) \prod_{j=v+1}^n (\beta_j - \alpha_j), & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, v\}, \\ \frac{1}{2} I^{(v)}(Q^{(v)},t) (\beta_i^2 - \alpha_i^2) \prod_{j=v+1, j \neq i}^n (\beta_j - \alpha_j), & \text{если } i \in \{v+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Пусть  $\gamma \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ . Обозначим  $S^{(n)}(\gamma,t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \leq t \right\}$ . Рассмотрим задачу вычисления интегралов

$$I^{(n)}(Q,\gamma,t) = \int_{S^{(n)}(\gamma,t) \cap Q} 1 \cdot dx, \quad I_i^{(n)}(Q,\gamma,t) = \int_{S^{(n)}(\gamma,t) \cap Q} x_i dx,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{R}, |\gamma| \neq 0, Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Не теряя общности, можно считать, что для некоторого  $v \in \{1, 2, \dots, n\}$  выполняется  $\gamma_1 \neq 0, \dots, \gamma_v \neq 0, \gamma_{v+1} = \dots = \gamma_n = 0$  (иначе перенумеруем переменные). Обозначим  $Q' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha'_i \leq x_i \leq \beta'_i, i = 1, 2, \dots, v; \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, j = v+1, \dots, n\}$ , где

$$\alpha'_i = \begin{cases} \gamma_i \alpha_i, & \text{если } \gamma_i > 0, \\ \gamma_i \beta_i, & \text{если } \gamma_i < 0, \end{cases} \quad \beta'_i = \begin{cases} \gamma_i \beta_i, & \text{если } \gamma_i > 0, \\ \gamma_i \alpha_i, & \text{если } \gamma_i < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, v.$$

Тогда, используя подстановки  $x_i = \frac{1}{\gamma_i} u_i, i = 1, 2, \dots, v$ , нетрудно показать, что

$$I^{(n)}(Q,\gamma,t) = I^{(n,v)}(Q',t) \left| \prod_{j=1}^v (1/\gamma_j) \right|,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad I_i^{(n)}(Q,\gamma,t) = \begin{cases} I_i^{(n,v)}(Q',t) \left| \prod_{j=1}^v (1/\gamma_j) \right|, & \text{если } i > v, \\ I_i^{(n,v)}(Q',t) (1/\gamma_i) \left| \prod_{j=1}^v (1/\gamma_j) \right|, & \text{если } i \leq v. \end{cases}$$

Заметим теперь, что, если  $Q \cap X = \{x \in Q \mid \langle e, x \rangle + d \leq 0\}$ , где  $e \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}, |e| \neq 0$ , то

$$\int_{Q \cap X} (\langle e', x \rangle + d') dx = d' I^{(n)}(Q, e, -d) + \sum_{i=1}^n e'_i I_i^{(n)}(Q, e, -d),$$

или

$$\int_{Q \cap X} (\langle e', x \rangle + d') dx = \int_Q (\langle e', x \rangle + d') dx - \left[ d' I^{(n)}(Q, -e, d) + \sum_{i=1}^n e'_i I_i^{(n)}(Q, -e, d) \right].$$

Для экономии объема вычислений формулу включений и исключений можно применять сразу ко всей сумме в правой части первой формулы или к вычитаемой сумме в правой части второй формулы, совершая последовательный обход угловых точек параллелепипеда  $Q'$  (см. замечание 14

из [7]), которые с помощью простых линейных преобразований получаются из угловых точек параллелепипеда  $Q$  (угловые точки  $w'$  параллелепипеда  $Q'$  определяются по формуле  $w' = \Lambda w$ , где  $\Lambda$  – диагональная матрица порядка  $n$  с элементами  $\Lambda_{ii} = \gamma_i$ ).

Если количество угловых точек параллелепипеда  $Q$ , содержащихся в множестве  $\{x \in Q | \langle e, x \rangle + d < 0\}$ , не превосходит  $2^{n-1}$  (что заведомо выполняется в случае  $\langle e, c(Q) \rangle + d \geq 0$ , где  $c(Q)$  – центр параллелепипеда  $Q$ , то для вычисления интеграла (4.4) имеет смысл использовать первую формулу. Соответственно, если количество угловых точек параллелепипеда  $Q$ , содержащихся в множестве  $\{x \in Q | \langle e, x \rangle + d > 0\}$ , не превосходит  $2^{n-1}$  (что заведомо выполняется в случае  $\langle e, c(Q) \rangle + d \leq 0$ ), то для вычисления интеграла (4.4) имеет смысл использовать вторую формулу (см. рис. 7 из [7]).

Итак, для описания алгоритма третьего порядка точности осталось привести алгоритм точного вычисления  $\mu(Q \cap X)$  в случае  $|J_Q| \leq 2$ . Нам понадобится следующая

**Лемма 1** (см. [12, с. 74]). Пусть  $V = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle c^{(i)}, x \rangle = b_i, i = 1, 2, \dots, r_1, \langle c^{(j)}, x \rangle \leq b_j, j = r_1 + 1, \dots, r\}$  – выпуклое полиэдральное множество, где  $c^{(i)} \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, r, 0 \leq r_1 \leq r, r \geq n$ . Пусть, далее,  $v^0$  – угловая точка множества  $V$ . Тогда найдется множество номеров  $J_0 \subseteq \{1, \dots, r\}$  такое, что  $|J_0| = n$ , точка  $v^0$  удовлетворяет системе равенств  $\langle c^{(i)}, v^0 \rangle = b_i, i \in J_0$ , и определитель матрицы этой системы отличен от нуля (т.е.  $v^0$  – единственное решение этой системы).

Обозначим

$$S_v = \{x \in Q | l_v(x) \leq 0\}, \quad P_v = \{x \in Q | l_v(x) = 0\}, \quad v \in J_0. \tag{4.5}$$

Опишем алгоритм точного вычисления  $\mu(Q \cap X)$  для случая  $|J_Q| \leq 2$ . Будем для простоты обозначений считать, что  $J_Q \subseteq \{1, 2\}$ . Предварительно докажем следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 2.** Пусть  $J_Q = \{1, 2\}, \bar{M} = \max l_2(P_1) < 0$ . Тогда возможны случаи:

- 1)  $\exists x' \in Q : l_1(x') > 0, l_2(x') \geq 0$ ;
- 2)  $\forall x \in Q : l_2(x) \geq 0 \Rightarrow l_1(x) \leq 0$ ,

и при этом в случае 1)  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1)$  и  $\forall v \in \text{Arg max } l_2(Q)$  выполнено  $l_1(v) > 0$ ; а в случае 2)  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2) - \mu(Q), \forall v \in \text{Arg max } l_2(Q)$  выполнено  $l_1(v) < 0$ .

**Доказательство.** Случаи 1), 2), очевидно, взаимно исключают, а также дополняют друг друга. Рассмотрим сначала случай 1). Возможны подслучаи:

$$\exists x'' \in Q : l_2(x'') \geq 0, \quad l_1(x'') < 0, \tag{4.6}$$

$$\forall x \in Q : l_2(x) \geq 0 \Rightarrow l_1(x) \geq 0. \tag{4.7}$$

Заметим, что из условий 1), (4.6) следует, что  $\exists x^* \in Q : l_1(x^*) = 0, l_2(x^*) \geq 0$ , что противоречит условию  $\bar{M} < 0$ . Рассмотрим оставшийся подслучай (4.7). Из (4.7) следует, что  $\{x \in Q | l_2(x) \geq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \geq 0\}$ , а в силу  $\max l_2(P_1) < 0$  не существует  $x \in Q : l_1(x) = 0, l_2(x) \geq 0$ , а следовательно,

$$\{x \in Q | l_2(x) \geq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) > 0\}. \tag{4.8}$$

Но тогда, используя (4.8), получаем

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Arg max } l_2(Q) \quad & \text{выполнено } l_1(v) > 0, \\ \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \geq 0\} & \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_1(x) > 0\} = \emptyset, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\} = \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\} \cap [\{x \in Q | l_2(x) \leq 0\} \cup \{x \in Q | l_2(x) \geq 0\}] = \\ &= \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} \cup \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \geq 0\} = \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} = S_1 \cap S_2. \end{aligned}$$

В случае 2) имеем  $\{x \in Q | l_2(x) \geq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\}$ , а в силу  $\bar{M} < 0$ , не существует  $x \in Q : l_1(x) = 0, l_2(x) \geq 0$ , а следовательно,

$$\{x \in Q | l_2(x) \geq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) < 0\}. \quad (4.9)$$

Но тогда, используя (4.9), получаем

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Arg max } l_2(Q) \quad & \text{выполнено} \quad l_1(v) < 0, \\ \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) > 0\} &= \{x \in Q | l_2(x) > 0\}, \\ \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\} &= \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} \cup \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, \\ & l_2(x) > 0\} = \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} \cup \{x \in Q | l_2(x) > 0\}, \end{aligned}$$

при этом пересечение множеств в последнем объединении, очевидно, является пустым, а следовательно,  $\mu(S_1) = \mu(S_1 \cap S_2) + (\mu(Q) - \mu(S_2))$ , откуда  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2) - \mu(Q)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $J_Q = \{1, 2\}$ ,  $\underline{M} = \min l_2(P_1) > 0$ . Тогда возможны следующие случаи:

- 1)  $\exists x' \in Q : l_1(x') > 0, l_2(x') \leq 0$ ;
- 2)  $\forall x \in Q : l_2(x) \leq 0 \Rightarrow l_1(x) \leq 0$ ,

и при этом в случае 1) верно  $\mu(S_1 \cap S_2) = 0$ , и  $\forall v \in \text{Arg min } l_2(Q)$  выполнено  $l_1(v) > 0$ ; а в случае 2) верно  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_2)$ ,  $\forall v \in \text{Arg min } l_2(Q)$  выполнено  $l_1(v) < 0$ .

**Доказательство.** Случаи 1), 2), очевидно, взаимно исключают, а также дополняют друг друга. Рассмотрим сначала случай 1). Возможны подслучаи:

$$\exists x'' \in Q : l_2(x'') \leq 0, \quad l_1(x'') < 0, \quad (4.10)$$

$$\forall x \in Q : l_2(x) \leq 0 \Rightarrow l_1(x) \geq 0. \quad (4.11)$$

Заметим, что из условий 1), (4.10) следует, что  $\exists x^* \in Q : l_1(x^*) = 0, l_2(x^*) \leq 0$ , что противоречит условию  $\underline{M} > 0$ . Рассмотрим оставшийся подслучай (4.11). Из (4.11) следует, что  $\{x \in Q | l_2(x) \leq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \geq 0\}$ , а в силу  $\underline{M} > 0$ , не существует  $x \in Q : l_1(x) = 0, l_2(x) \leq 0$ , а следовательно,

$$\{x \in Q | l_2(x) \leq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) > 0\}. \quad (4.12)$$

Но тогда, используя (4.12), получаем

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Arg min } l_2(Q) \quad & \text{выполнено} \quad l_1(v) > 0, \\ S_1 \cap S_2 &= \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_1(x) > 0\} = \emptyset, \\ \mu(S_1 \cap S_2) &= 0. \end{aligned}$$

В случае 2) имеем  $\{x \in Q | l_2(x) \leq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\}$ , а в силу  $\underline{M} > 0$ , не существует  $x \in Q : l_1(x) = 0, l_2(x) \leq 0$ , а следовательно,

$$\{x \in Q | l_2(x) \geq 0\} \subseteq \{x \in Q | l_1(x) < 0\}. \quad (4.13)$$

Но тогда, используя (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Arg min } l_2(Q) \quad & \text{выполнено} \quad l_1(v) < 0, \\ \{x \in Q | l_1(x) \leq 0, l_2(x) \leq 0\} &= \{x \in Q | l_1(x) \leq 0\} \cap \{x \in Q | l_2(x) \leq 0\} = \{x \in Q | l_2(x) \leq 0\}, \\ \mu(S_1 \cap S_2) &= \mu(S_2). \end{aligned}$$

Опишем теперь алгоритм точного вычисления  $\mu(Q \cap X)$  в случае  $J_Q \subseteq \{1, 2\}$ . Обозначим  $V^{(n)} = Q \cap X$ .

**Алгоритм 4**

**Шаг 1.** Определим точки  $u(1), u(2)$ , на которых соответственно достигается минимум функций  $l_1(x), l_2(x)$  на  $Q$  (см. шаг 1 алгоритма 3), а также точки  $v(1), v(2)$ , на которых соответственно достигается максимум функций  $l_1(x), l_2(x)$  на  $Q$  (см. шаг 1 алгоритма 3). Если  $l_1(v(1)) \leq 0$  или  $l_2(v(2)) \leq 0$  (т.е., если  $|J_Q| \leq 1$ ), то применим для определения  $\mu(V^{(n)})$  алгоритм 3. Если  $l_1(u(1)) \geq 0$  или  $l_2(u(2)) \geq 0$ , то  $V^{(n)} \cap \text{int } Q = \emptyset$ , и тогда положим  $\mu(V^{(n)}) = 0$ . Если нам еще не удалось определить  $\mu(V^{(n)})$ , то перейдем к шагу 2.

**Шаг 2.** Если  $n = 1$ , то  $V^{(n)}$  является прямолинейным отрезком, а  $\mu(V^{(n)})$  – разностью его верхней и нижней границ, которые находятся тривиальным образом. Если  $n > 1$ , то перейдем к шагу 3.

**Шаг 3.** Ищем множество угловых точек  $\Omega_1$  многогранника  $P_1$ . Из леммы 1 следует, что любая угловая точка  $w \in \Omega_1$  является либо угловой точкой куба  $Q$ , либо принадлежит одному из  $n2^{n-1}$  ребер куба  $Q$ , т.е. удовлетворяет равенству  $l_1(w) = 0$  и  $n - 1$  равенствам вида  $w_i = \gamma_i$ , где  $\gamma_i \in \{\alpha_i, \beta_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Но тогда для нахождения искомых угловых точек достаточно осуществить перебор (он может оказаться неполным) этих ребер. Для каждого ребра  $\Gamma$  куба  $Q$  вычисляем значения функции  $l_1(x)$  на концах  $\Gamma', \Gamma''$  этого ребра, т.е. значения  $r_1 = l_1(\Gamma')$ ,  $r_2 = l_1(\Gamma'')$ . Если  $r_1 = 0$ , то  $\Gamma'$  (угловая точка  $Q$ ) включается в  $\Omega_1$ . Если  $r_2 = 0$ , то  $\Gamma''$  включается в  $\Omega_1$ . Если одновременно выполняется  $r_1 > 0, r_2 > 0$  (или  $r_1 < 0, r_2 < 0$ ), то на ребре  $\Gamma$  нет угловых точек множества  $P_1$  (т.к.  $\Gamma \cap P_1 = \emptyset$ ) и переходим к следующему ребру. Если  $r_1 < 0, r_2 > 0$  (или  $r_1 > 0, r_2 < 0$ ), то находим очередную угловую точку  $\hat{\Gamma} = \Gamma'' + \xi(\Gamma' - \Gamma'') \in \Omega_1$ , где  $\xi = r_2/(r_2 - r_1) > 0$  (очевидно, что  $l_1(\hat{\Gamma}) = 0$ ).

**Шаг 4.** В процессе нахождения множества  $\Omega_1$  проверяем выполнение для каждой очередной точки  $w \in \Omega_1$  значение  $l_2(w)$ . Если  $l_2(w) = 0$ , то переходим к шагу 6. Пусть  $\hat{l}_2 = l_2(\hat{w})$ , где  $\hat{w} \in \Omega_1$ , – максимальное, а  $\check{l}_2 = l_2(\check{w})$ , где  $\check{w} \in \Omega_1$ , – минимальное из уже вычисленных значений  $l_2(w)$  в точках  $w \in \Omega_1$ . Тогда в первом же случае выполнения  $\hat{l}_2 > 0, \check{l}_2 < 0$  полагаем  $w = \hat{w} + \eta(\hat{w} - \check{w})$ , где  $\eta = \hat{l}_2/(\check{l}_2 - \hat{l}_2)$ . Очевидно, что  $l_2(w) = 0$ , и тогда переходим к шагу 6.

В противном случае переходим к следующей точке из  $\Omega_1$ . Если все точки из  $\Omega_1$  перебраны, то переходим к шагу 5.

**Шаг 5.** Переход к этому шагу означает, что либо  $\hat{l}_2 = \max l_2(\Omega_1) = \max l_2(P_1) < 0$ , либо  $\check{l}_2 = \min l_2(\Omega_1) = \min l_2(P_1) > 0$ . В случае  $\hat{l}_2 < 0$  находим точку  $v \in Q$  такую, что  $l_2(v) = \max l_2(Q)$  (находится за  $O(n)$  арифметических операций). Тогда в силу леммы 2, если  $l_1(v) > 0$ , то  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1)$ , а в случае  $l_1(v) < 0$  выполняется  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2) - \mu(Q)$ . В случае  $\check{l}_2 > 0$  находим точку  $u \in Q$  такую, что  $l_2(u) = \min l_2(Q)$ . Тогда в силу леммы 3, если  $l_1(u) > 0$ , то  $\mu(S_1 \cap S_2) = 0$ , а в случае  $l_1(u) < 0$  выполняется  $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_2)$ .

**Шаг 6** (рекурсия по  $n$ ). Переход к этому шагу означает, что найдена точка  $w \in Q : l_1(w) = 0, l_2(w) = 0$ . Пусть  $H_{ij}$  удовлетворяют (3.6), где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$ . Определяем числа  $h_{ij}$  по формулам (3.7). Осуществляем сведение задачи вычисления  $\mu(V^{(n)})$  к  $2n$  аналогичным задачам меньшей размерности согласно формулам (3.8), (3.9). При вычислении  $\mu(V_{ij}^{(n-1)})$  снова действуем согласно шагам 1–4, присвоив  $n := n - 1$ , и т.д.

**Замечание 9.** Алгоритм 4, а также леммы 2, 3 (как и алгоритм 3) справедливы и в случае, когда  $Q$  – произвольный параллелепипед вида (1.3).

**Замечание 10.** Отметим, что предложенный в [4], [7] подход позволяет, например, описать простой конечный алгоритм нахождения точного объема любого многогранника (см. алгоритм 6 из [7]).

**Замечание 11.** Отметим, что при программной реализации метода имеется возможность для распараллеливания вычислительного процесса на этапе дробления кубов ( $k-1$ )-го этапа дробления на кубы  $k$ -го этапа.



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ [4], [6], [7], которые дают достаточно общие схемы решения для достаточно широкого класса задач многомерного интегрирования, что не отразилось в названии статьи. Это связано с тем, что в практическом смысле эти схемы работают лишь на достаточно узких классах задач. Например, если подынтегральная функция не будет являться “псевдомногочленом”, то проверка условия “погружения” на кубах промежуточных этапов дробления будет представлять из себя достаточно сложную вычислительную задачу, что может не позволить уменьшить размерность задачи на 1. Далее, в случае, когда подынтегральной функцией является гауссовская плотность вероятности, очень легко определяются величины  $\underline{b}_0$ ,  $\bar{b}_0$ , используемые в основном алгоритме 2. Для более сложных подынтегральных функций вычисление этих величин может оказаться достаточно трудоемкой задачей. То же относится и к множеству интегрирования. Отметим, однако, что в случае многогранного множества весьма эффективно использовались оценки общей меры кубов (последнего этапа дробления) с небольшим числом “активных” ограничений (0, 1, 2) для получения оценок погрешности вычисления искомого многомерного интеграла (см. (3.12)). Аналогичные результаты при определенных условиях могут быть получены и в случае нескольких гладких ограничений. Большую роль в оценках погрешности в работах [6], [7] сыграли рекурсивные алгоритмы точного вычисления объема координатного куба (или параллелепипеда) с одним или двумя линейными ограничениями. Очевидно, что в случае с подынтегральным множеством, определяемым несколькими гладкими ограничениями, также будут использованы эти алгоритмы. Таким образом, работы [4], [6], [7] вместе с настоящей работой описывают практически реализуемые алгоритмы решения некоторых весьма важных для практического приложения задач, а также несут в себе идеи для некоторых более общих приложений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. *Нефедов В.Н.* Об одном методе глобальной максимизации функции нескольких переменных на параллелепипеде. Деп. в ВИНТИ 14.01.85, № 377-85 ДЕП.
3. *Pinter J.* Branch-and-Bound algorithm for solving multiextremal mathematical programming problems with Lipschitzian structure: Working Paper, VITUKI. Budapest, 1987.
4. *Нефедов В.Н.* К вопросу об отыскании глобального экстремума в липшицевых и полиномиальных задачах оптимизации. М., 1991. Деп. в ВИНТИ 26.04.91, № 1759-В91. <https://yadi.sk/i/kWqMPU2N3VbT9H>.
5. *Нефедов В.Н.* Некоторые вопросы решения липшицевых задач глобальной оптимизации с использованием метода ветвей и границ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 31. № 4. С. 512–529.
6. *Нефедов В.Н.* К вопросу о вычислении вероятностного критерия оптимизации с использованием методов ветвления и отсечения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1993. № 4. С. 51–60. <https://yadi.sk/i/WKouWR3A3VbERz>.
7. *Нефедов В.Н.* О приближенном вычислении многомерного интеграла с заданной точностью. М., 1991. Деп. в ВИНТИ 11.11.91, № 4838-В91. <https://yadi.sk/i/jGUgWyUO3UsdAZ>.
8. *Андреев Н.И.* Теория статистических оптимальных систем управления. М.: Наука, 1980.
9. *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностр., 1987.
10. *Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1991. № 1.
11. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1981.
12. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.
13. *Травин А.А.* Алгоритмы оценки квантильного критерия с заданной точностью в задачах стохастического программирования с кусочно-линейными и квадратичными функциями потерь. Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МАИ, 2015.