ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 7, с. 1243–1257

УДК 519.634

О ДИССИПАТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ[1)]

© 2019 г. А. В. Звягин[1,*], В. Г. Звягин[1,], Д. М. Поляков[2,***]**

([1] 394018 Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУн-т, Россия;

[2] 362027 Владикавказ, ул. Маркуса, 22, Южный матем. ин-т, Россия)

**e-mail: zvyagin.a@mail.ru*

***e-mail: zvg_vsu@mail.ru*

****e-mail: DmitryPolyakow@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.06.2017 г.
Переработанный вариант 26.06.2017 г.
Принята к публикации 11.03.2019 г.

В статье рассматривается разрешимость в некотором смысле начально-краевой задачи для альфа-модели жидкости с памятью, а именно, на основе аппроксимационно-топологического подхода устанавливается существование диссипативного решения. Библ. 31.

Ключевые слова: альфа-модель, жидкость с памятью, теорема существования, аппроксимационно-топологический подход.

DOI: 10.1134/S0044466919070147

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние тридцать лет интенсивное развитие и популярность получили альфа-модели гидродинамики. По сравнению с исходными моделями, они представляют собой своего рода аппроксимации, которые зависят от параметра α. Идея использовать для исследования исходных моделей такие аппроксимации впервые возникла в работе Ж. Лере [1]. Позднее на ее основе и была построена теория альфа-моделей. В этой теории альфа-модель стала рассматриваться не как аппроксимация исходной модели, а как независимая (новая) задача, в которой функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую u, связанную с v эллиптической системой $v = u - \alpha^2\Delta u$. Используемый оператор сглаживания – известный оператор Гельмгольца. Выбор такого оператора связан с его хорошими математическими свойствами. Пионерскими работами в этой теории были статьи по исследованию альфа-моделей Эйлера [2], [3] и Навье–Стокса [4].

Интерес к независимому от исходной модели изучению альфа-моделей также связан с их применением к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости [5]. Также делались шаги по использованию альфа-моделей в исследованиях движения потоков воды в Атлантическом океане, циркуляции атмосферы для глобального моделирования климата [6].

Большая часть работ по исследованию разрешимости альфа-моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости. Это уже упомянутые нами альфа-модели Эйлера и Навье–Стокса [7], а также Лере [8] и [9], Кларка [10], альфа-модель Бардина [11] и др. Только в последние несколько лет появились работы, посвященные альфа-моделям для неньютоновской жидкости [12], [13]. Данная работа продолжает исследования разрешимости альфа-моделей неньютоновских сред. А именно, будет рассматриваться альфа-модель, описывающая движение жидкости с памятью.

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i - \mu_0 \Delta u - \mu_1 \operatorname{Div} \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathscr{E}(u)(s, z(s;t,x))ds + \nabla p = f, \qquad (1.1)$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.4}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{1.5}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x))ds, \quad 0 \le t, \quad \tau \le T. \tag{1.6}$$

Здесь $u = (u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x))$ — вектор-функция скорости движения частиц жидкости, $v = (v_1(t, x), \ldots, v_n(t, x))$ — вектор-функция модифицированной скорости, $p = p(t, x)$ — функция давления, $f = f(t, x)$ — функция плотности внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij}(u))$ — девиатор тензора напряжений. Через

$$\mathscr{E} = (\mathscr{E}_{ij}(u)), \quad \mathscr{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = \overline{1, n},$$

обозначим тензор скоростей деформации, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, отражающий ширину шкалы пространственной фильтрации для модифицированной скорости, $\mu_1, \mu_2 > 0$ — реологические постоянные, u_0 — начальное значение. Уравнение (1.2) — действие оператора Гельмгольца на вектор-функцию u, (1.3) — условие несжимаемости жидкости, (1.4) — граничное условие “прилипания” , (1.5) — начальное условие и (1.6) — уравнение траектории движения частиц жидкости $z = z(\tau; t, x)$, определяемых полем скоростей u. Функция $z(\tau; t, x)$ показывает траекторию движения частицы за время τ, находящейся в момент времени t в точке $x \in \Omega$.

Как правило, для классической модели движения жидкостей с памятью (см. [14], [15]) исследование разрешимости начально-краевой задачи (1.1)–(1.6) наталкивается на следующую трудность. Поле скоростей не определяет траекторий движения частиц. Одним из возможных выходов из этой ситуации является сглаживание (регуляризация) поля скоростей и определение траекторий $z = Z_\delta(u)$ для сглаженного поля скоростей $S_\delta(u)$, где $\delta > 0$ — малый параметр. Причиной регуляризации является отсутствие необходимых результатов, касающихся разрешимости задачи Коши (1.6) при недостаточно гладкой скорости u. Однако в случае рассмотрения альфа-модели скорость движения частиц u обладает достаточной гладкостью. Таким образом, мы можем отказаться от регуляризации u в уравнении (1.6).

В настоящей работе устанавливается существование диссипативного решения, впервые введенное П.-Л. Лионсом для уравнения Эйлера движения идеальной жидкости (см. [16, § 4.4], а также обзорную статью [17]). Отметим, что понятие диссипативного решения играет ключевую роль в задаче перемещения кинетической энергии в гидродинамике.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 мы введем необходимые обозначения и функциональные пространства, сформулируем определение диссипативного решения и основную теорему, посвященную существованию этого решения для альфа-модели движения жидкости с памятью. В разд. 3 мы рассмотрим вспомогательную задачу с более хорошими свойствами и для этой задачи докажем существование слабого решения. Наконец, последний раздел посвящен предельному переходу и доказательству существования диссипативных решений у исходной альфа-модели.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНОГО РЕШЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Через $\mathbb{R}^{n\times n}$ обозначим пространство матриц размера $n \times n$ и через $\mathbb{R}_S^{n\times n}$ — его подпространство симметричных матриц. Всюду далее через E обозначается одно из следующих пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}_S^{n\times n}$.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, будем обозначать множество измеримых функций $u : \Omega \to E$, суммируемых с p-й степенью. Через $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$, $m \ge 1$, будем обозначать гильбертово пространство Соболева функций $u : \Omega \to E$, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)$.

Скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ будут обозначаться, соответственно, через $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_m$. Нормы в этих пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_m$ соответственно.

Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями в E с компактным носителем в Ω. Пусть $\mathcal{V}$ – множество $\{u \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$. Символами H и V обозначим замыкания $\mathcal{V}$ в $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно. Кроме того, будут использоваться пространства $V_i = V \cap H^i(\Omega)$, $i = 2,3$, со скалярным произведением, унаследованным от $H^i(\Omega)$, $i = 2,3$.

В пространстве V наряду со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_1$ будем использовать другое скалярное произведение

$$(u,v)_V = (u,v) + (\alpha\nabla u, \alpha\nabla v),$$

и соответствующую норму $\|\cdot\|_V$. Здесь $\alpha > 0$ – скалярный параметр. Для этой нормы справедливо неравенство

$$\|u\|_1 \le \max\{1, 1/\alpha\}\|u\|_V.$$

Следуя [18], мы отождествим гильбертово пространство H и его сопряженное пространство H^*. Следовательно, имеют место следующие вложения:

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*.$$

Оба вложения здесь плотны и непрерывны. Через $\langle f, \phi\rangle$ будем обозначать действие функционала f из V^* на элемент ϕ из V.

Символами $C([0,T];F)$, $C_w([0,T];F)$, $L_2(0,T;F)$ обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с квадратом функций на $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве F.

Множество $C^1D(\bar{\Omega})$ состоит из взаимно однозначных отображений $z : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$, совпадающих с тождественным отображением на $\partial\Omega$ и имеющих непрерывные частные производные первого порядка такие, что $\det(\partial z/\partial x) = 1$ в каждой точке области $\bar{\Omega}$. Будем предполагать, что в этом множестве используется норма пространства непрерывных функций $C(\bar{\Omega})$. Далее мы будем рассматривать множество $CG = C([0,T]\times[0,T], C^1D(\bar{\Omega}))$. Заметим, что $CG \subset C([0,T]\times[0,T], C^1(\bar{\Omega}))$, поэтому далее CG рассматривается как метрическое пространство с метрикой, определяемой нормой пространства $C([0,T]\times[0,T], C(\bar{\Omega}))$.

Уравнение (1.1) включает интеграл, вычисляемый вдоль траекторий движения частиц жидкости. Поэтому траектории должны однозначно определяться полем скоростей u. Другими словами, необходимо, чтобы уравнение (1.6) имело единственное решение для поля скоростей u. Согласно теореме Пеано для каждого $u \in L_2(0,T;V_3)$ это уравнение имеет единственное решение $Z(u)$ в классе CG, т.е. $z(\tau;t,x) = Z(u)(\tau;t,x)$.

Теперь непосредственно перейдем к определению понятия диссипативного решения. Введем проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to H$, а также определим оператор Гельмгольца $\Delta_\alpha = I - \alpha^2\Delta$, где I – тождественный оператор. Рассмотрим следующее выражение, где $w = w(t,x)$ – векторно-значная функция:

$$E(w) = -\frac{\partial P\Delta_\alpha w}{\partial t} - P\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i} - P\sum_{i=1}^n (\Delta_\alpha w)_i \nabla w_i + \mu_0 P\Delta w +$$
$$+ \mu_1 P \operatorname{Div}\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathcal{E}(w)(s, z(s;t,x))ds + Pf.$$

Кроме того, для дальнейшего исследования потребуется аналогичное выражение, зависящее от скалярной величины $\xi > 0$:

$$E(w,\xi) = -\frac{\partial P\Delta_\alpha w}{\partial t} - \xi P\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i} - \xi P\sum_{i=1}^{n} (\Delta_\alpha w)_i \nabla w_i + \mu_0 P\Delta w +$$
$$+ \mu_1 \xi P \operatorname{Div}\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(w)(s, z(s;t,x))ds + Pf.$$

Всюду ниже символом C с индексами внизу будут обозначаться различные положительные константы. Индексация констант начинается с нуля в каждой новой теореме или лемме.

Следуя [16, § 4.4], введем определение диссипативного решения для альфа-модели движения жидкости с памятью.

Определение 1. Пусть $u_0 \in V$. Функция u из класса $C_w([0,\infty);V)$ называется *диссипативным решением* начально-краевой задачи (1.1)–(1.6), если для всех функций $\theta \in C^1([0,\infty);V_3)$ и почти всех $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|u(t) - \theta(t)\|_V^2 \leq \exp\left(\int_0^t \Gamma(s)ds\right)\left[\|u_0 - \theta(0)\|_V^2\right] + \int_0^t \exp\left(\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi\right) 2\left(E(\theta)(s), u(s) - \theta(s)\right)ds\Bigg], \qquad (2.1)$$

где

$$\Gamma(t) = C_0 \max\{1, 1/\alpha^2\}(\|\Delta_\alpha\theta(t)\|_1 + \|\theta(t)\|_1 + \alpha^2\|\theta(t)\|_3). \qquad (2.2)$$

Основным результатом для альфа-модели движения жидкости с памятью является следующая

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — *ограниченная область с достаточно гладкой границей* $\partial\Omega$. *Тогда*:

(а) *Для* $u_0 \in V$ *существует диссипативное решение начально-краевой задачи* (1)–(6).

(б) *Если для некоторого* $u_0 \in V$ *существует сильное решение* $u_T \in C^1([0,T];V_3)$ *начально-краевой задачи* (1)–(6), *то сужение любого диссипативного решения* (*с теми же начальными условиями) на* $[0,T]$ *совпадает с* u_T.

(в) *Каждое сильное решение* $u_T \in C^1([0,T];V_3)$ *является единственным диссипативным решением.*

Отметим, что для заданных начальных условий диссипативное решение не обязательно является единственным. Формулировка пункта (в) теоремы 1 означает, что если существует сильное решение, то диссипативное решение является единственным и совпадает с сильным.

Доказательство теоремы 1 основано на аппроксимационно-топологическом методе исследования задач гидродинамики, разработанным В.Г. Звягиным (см. [20] и [21]). Общая схема этого метода для эволюционных задач такова. Сначала дается операторная интерпретация рассматриваемой начально-краевой задачи в некоторых, естественных для данной задачи, функциональных пространствах. Затем приводятся аппроксимации полученного операторного уравнения, которые обладают более лучшими топологическими свойствами и которые определены в своих функциональных пространствах. Далее устанавливаются априорные оценки решений аппроксимационных уравнений как в новых функциональных пространствах, так и в исходных. На основе априорных оценок решений аппроксимационных уравнений в новых функциональных пространствах и теории топологической степени отображений бесконечномерных пространств доказывается разрешимость аппроксимационных уравнений. Наконец, на основе априорных оценок решений аппроксимационных уравнений уже в исходных функциональных пространствах с помощью предельного перехода доказывается разрешимость первоначального операторного уравнения, а следовательно, и разрешимость требуемой эволюционной задачи. Разработанный метод был успешно применен для целого ряда моделей гидродинамики в задачах существования решений [22]–[25], задачах оптимального управления с обратной связью [26], задачах существования аттракторов [27] и pullback-аттракторов [28]. В настоящей статье данный подход применяется для доказательства диссипативного решения рассматриваемой задачи.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Всюду в этом разделе будем предполагать, что $u_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^*)$. Как было отмечено в разд. 2, для $u \in L_2(0,T;V_3)$ уравнение (1.6) имеет единственное решение $Z(u)$ в классе CG. Таким образом, траектории однозначно определяются полем скоростей $u(t,x)$.

Итак, рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial \Delta_\alpha u}{\partial t}+\xi\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial \Delta_\alpha u}{\partial x_i}+\xi\sum_{i=1}^{n}(\Delta_\alpha u)_i\nabla u_i-\mu_0\Delta u-\mu_1\xi\,\mathrm{Div}\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(u)(s,Z(u)(s;t,x))ds+\varepsilon N(u)+\nabla p=f, \quad (3.1)$$

$$\mathrm{div}\,u=0,\quad u\big|_{\partial\Omega}=0, \quad (3.2)$$

$$u\big|_{t=0}=u_0, \quad (3.3)$$

для всех $\varphi \in V_3$ почти всюду на $(0,T)$. Здесь $0<\varepsilon\le 1$, $0\le\xi\le 1$ — константы и оператор $N: V_3 \to V_3^*$ определяются следующим образом: $\langle N(u),\varphi\rangle = (u,\varphi)_3$, $\varphi\in V_3$.

Эта задача будет рассматриваться в классе

$$W_1=\{u\in L_2(0,T;V_3),\quad u'\in L_2(0,T;V_3^*)\}$$

с нормой $\|u\|_{W_1}=\|u\|_{L_2(0,T;V_3)}+\|u'\|_{L_2(0,T;V_3^*)}$.

Определение 2. Функция u из класса W_1 называется *слабым решением* вспомогательной задачи, если для любого $\varphi\in V_3$ и при почти всех $t\in[0,T]$ она удовлетворяет равенству

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(u,\varphi)_V-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\Delta_\alpha u,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+\xi\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha u)_i\nabla u_i,\varphi)+\mu_0(\nabla u,\nabla\varphi)+\\+\mu_1\xi\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(u)(s,Z(u)(s;t,x))ds,\mathscr{E}(\varphi)\right)+\varepsilon(u,\varphi)_3=\langle f,\varphi\rangle\end{gathered} \quad (3.4)$$

и начальному условию (3.3).

Замечание 1. Согласно [18, Глава 3, Теорема 1.2] справедливо вложение $W_1\subset C([0,T];V)$. Таким образом, начальное условие (3.3) имеет смысл.

Перепишем вспомогательную задачу в операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (3.4), мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$K_1: W_1\to L_2(0,T;V_3^*),\quad \langle K_1(u),\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\Delta_\alpha u,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right),\quad u\in W_1,\quad \varphi\in V_3,$$

$$K_2: W_1\to L_2(0,T;V_3^*),\quad \langle K_2(u),\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha u)_i\nabla u_i,\varphi),\quad u\in W_1,\quad \varphi\in V_3,$$

$$A: W_1\to L_2(0,T;V^*),\quad \langle A(u),\varphi\rangle=(\nabla u,\nabla\varphi),\quad u\in W_1,\quad \varphi\in V,$$

$$N: W_1\to L_2(0,T;V_3^*),\quad \langle N(u),\varphi\rangle=(u,\varphi)_3,\quad u\in L_2(0,T;V_3),\quad \varphi\in V_3.$$

Кроме того, для любого $\varphi\in V$ определим оператор $C: W_1\times CG\to L_2(0,T;V^*)$ в виде

$$\langle C(u,Z(u)),\varphi\rangle=\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(u)(s,Z(u)(s;t,x))ds,\mathscr{E}(\varphi)\right),\quad u\in W_1.$$

Также мы определим операторы при помощи следующих равенств:

$$\tilde{A}: W_1\to L_2(0,T;V_3^*)\times V_3,\quad \tilde{A}(u)=(u'+\varepsilon N(u)+\mu_0 A(u),u\big|_{t=0}),$$

$$G: W_1\to L_2(0,T;V_3^*)\times V_3,\quad G(u)=(\mu_1 C(u,Z(u)),0),$$

$$Q: W_1\to L_2(0,T;V_3^*)\times V_3,\quad Q(u)=(K_1(u)+K_2(u),0).$$

Таким образом, вспомогательная задача эквивалентна операторному уравнению

$$\tilde{A}(u) = \xi(Q(u) + G(u)) + (f, u_0). \tag{3.5}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в уравнение (3.5). Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одну и ту же букву для обозначений операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 1. *Оператор $A : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*)$ является непрерывным оператором.*

Доказательство. Известно (см. [29, лемма 2.5.1]), что оператор $A : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывен. Кроме того, вложение $V_3 \subset V$ является непрерывным. Таким образом, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$W_1 \subset L_2(0,T;V_3) \subset L_2(0,T;V) \xrightarrow{A} L_2(0,T;V^*) \subset L_2(0,T;V_3^*),$$

где первое, второе и последнее вложения непрерывны и отображение A – непрерывно. Следовательно, отображение $A : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*)$ непрерывно. Лемма доказана.

Лемма 2. *Оператор $N : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*)$ является непрерывным оператором.*

Доказательство. Сначала установим непрерывность оператора $N : L_2(0,T;V_3) \to L_2(0,T;V_3^*)$. Для доказательства непрерывности линейного оператора N необходимо установить его ограниченность. Используя неравенство Гёльдера, для любых $u \in L_2(0,T;V_3)$ и $\varphi \in V_3$ получаем

$$\left|\langle Nu, \varphi\rangle\right| = \left|(u, \varphi)_3\right| \le \|u\|_3 \|\varphi\|_3.$$

Следовательно, $\|Nu\|_{V_3^*} \le \|u\|_3$. Возведем в квадрат последнее неравенство и проинтегрируем его по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\|Nu\|^2_{L_2(0,T;V_3^*)} \le \|u\|^2_{L_2(0,T;V_3)}.$$

Таким образом, оператор $N : L_2(0,T;V_3) \to L_2(0,T;V_3^*)$ является непрерывным. Следовательно, имеет место следующая суперпозиция вложений:

$$W_1 \subset L_2(0,T;V_3) \xrightarrow{N} L_2(0,T;V_3^*),$$

где вложение непрерывно и отображение N также непрерывно. Таким образом, отображение $N : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*)$ – непрерывно. Лемма доказана.

Лемма 3. *Операторы $K_1, K_2 : W_1 \to L_2(0,T;V_3)$ являются вполне непрерывными операторами.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы для оператора K_1. Сначала установим непрерывность билинейного оператора $\tilde{K}_1 : L_6(0,T;V) \times L_3(0,T;V_2) \to L_2(0,T;V_3^*)$ вида

$$\left\langle \tilde{K}_1(u,w), \varphi\right\rangle = \sum_{i=1}^n \left(u_i \Delta_\alpha w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

Используя неравенство Гёльдера, для $\varphi \in V_3$ получаем

$$\left|\left\langle \tilde{K}_1(u,w), \varphi\right\rangle\right| = \left|\sum_{i,j=1}^n \left(u_i \Delta_\alpha w_j, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)\right| = \left|\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i \Delta_\alpha w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \le \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega \left|u_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\Delta_\alpha w_j\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$
$$\le C_0 \|\nabla\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta_\alpha w\|_{L_2(\Omega)} \le C_1 \|u\|_1 \|w\|_2 \|\varphi\|_3.$$

Кроме того, здесь мы пользовались тем фактом, что из непрерывного вложения $V_3 \subset V$ следует неравенство $\|u\|_1 \le C_2 \|u\|_3$, $u \in V_3$. Следовательно, $\left\|\tilde{K}_1(u,w)\right\|_{V_3^*} \le C_1 \|u\|_1 \|w\|_2$. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат и проинтегрируем его по t в пределах от 0 до T. Тогда, вновь используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left\|\tilde{K}_1(u,w)\right\|^2_{L_2(0,T;V_3^*)} = \int_0^T \left\|\tilde{K}_1(u,w)\right\|^2_{V_3^*} dt \le C_1^2 \int_0^T \|u\|_1^2 \|w\|_2^2 \, dt \le C_1^2 \left(\int_0^T \|u\|_1^6 dt\right)^{2/6} \left(\int_0^T \|w\|_2^3 dt\right)^{2/3} =$$
$$= C_1^2 \|u\|^2_{L_6(0,T;V)} \|w\|^2_{L_3(0,T;V_2)}.$$

Таким образом, билинейный оператор $\tilde{K}_1$ является непрерывным.

По теореме Симона (см. [30, следствие 8]) вложения

$$W_1 \subset L_p(0,T;V), \quad W_1 \subset L_q(0,T;V_2),$$

являются вполне непрерывными для любых $p < \infty$ и $q < 4$. Следовательно, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$W_1 \times W_1 \subset L_6(0,T;V) \times L_3(0,T;V_2) \xrightarrow{\tilde{K}_1} L_2(0,T;V_3^*),$$

где первое вложение является вполне непрерывным, оператор $\tilde{K}_1$ – непрерывен. Таким образом, билинейный оператор $\tilde{K}_1(u,w)$ является вполне непрерывным. Следовательно, для $u = w$ оператор $K_1 : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*)$ также является вполне непрерывным.

Вполне непрерывность оператора K_2 устанавливается аналогичным образом. Лемма доказана.

Для формулировки следующей леммы нам необходимо ввести понятие эквивалентной нормы. Пусть $k \ge 0$. Для функции $u \in L_2(0,T;V)$ определим эквивалентную норму $\|u\|_{k,V} = \|\bar{u}\|_1$, где $\bar{u}(t) = e^{-kt}u(t)$.

Лемма 4. *Для любых $u \in L_2(0,T;V)$, $z \in CG$, выполнено $C(u,z) \in L_2(0,T;V^*)$ и отображение $C : L_2(0,T;V) \times CG \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывно и ограничено. Кроме того, для любой фиксированной функции $z \in CG$ и произвольных u, $v, h \in L_2(0,T;V)$ справедлива оценка*

$$\left|\left\langle e^{-kt}C(u,z)(t) - e^{-kt}C(v,z)(t), h(t)\right\rangle\right| \le \mu_1\sqrt{T/(2k)}\|u-v\|_{k,L_2(0,T;V)}\|h\|_{k,L_2(0,T;V)}. \tag{3.6}$$

Приведенные факты содержатся в [15, Лемма 2.2, Лемма 2.4].

Лемма 5. *Отображение $G : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*) \times V_3$ является вполне непрерывным.*

Доказательство. По лемме 4 оператор $C : L_2(0,T;V) \times CG \to L_2(0,T;V^*)$ является непрерывным. Кроме того, вложение $V_3 \subset V$ является вполне непрерывным. Следовательно, имеет место следующая суперпозиция вложений:

$$W_1 \subset L_2(0,T;V_3) \subset L_2(0,T;V) \xrightarrow{C} L_2(0,T;V^*) \subset L_2(0,T;V_3^*),$$

где первое и последнее вложения непрерывны, второе – вполне непрерывно, отображение C – непрерывно. Следовательно, отображение $G : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*) \times V_3$ является вполне непрерывным. Лемма доказана.

Теперь мы готовы перейти к получению необходимых оценок.

Лемма 6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $u \in W_1$ – слабое решение вспомогательной задачи. Тогда для любой $\theta \in C^1([0,\infty);V_3)$ и почти всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\|u(t)-\theta(t)\|_V^2 + 2\varepsilon\int_0^t\|u(s)-\theta(s)\|_3^2ds + \frac{3\mu_0}{2}\int_0^t\|u(s)-\theta(s)\|_1^2ds \le \exp\left(\int_0^t\Gamma(s)ds\right)\times \\ \times\left\{\|u_0-\theta(0)\|_V^2 + \int_0^t\exp\left(\int_s^0\Gamma(\psi)d\psi\right)\left[2(E(\theta,\xi)(s),u(s)-\theta(s)) - 2\varepsilon(\theta(s),u(s)-\theta(s))_3\right]ds\right\},\end{gathered} \tag{3.7}$$

где Γ определяется формулой (2.2).

Доказательство. Рассмотрим равенство (3.4) от функции $\theta \in C^1([0,\infty);V_3)$ с дополнительными слагаемыми:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\theta,\varphi)_V - \xi\sum_{i=1}^n\left(\theta_i\Delta_\alpha\theta, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \xi\sum_{i=1}^n((\Delta_\alpha\theta)_i\nabla\theta_i,\varphi) + \mu_0(\nabla\theta,\nabla\varphi) + \varepsilon(\theta,\varphi)_3 + \\ + \mu_1\xi\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(\theta)(s,Z(u)(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\varphi)\right) + (E(\theta,\xi),\varphi) = \langle f,\varphi\rangle + \varepsilon(\theta,\varphi)_3,\end{gathered} \tag{3.8}$$

для $\varphi \in V_3$ и почти всех $t \in (0,T)$. Обозначим через w величину $w = u - \theta$. Для почти всех $t \in (0,T)$ положим $\varphi = w(t)$ и вычтем из (3.4) равенство (3.8). Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w)_V - \xi\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - \xi\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - \xi\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\Delta_\alpha \theta, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \xi\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha w)_i\nabla w_i, w) +$$
$$+\ \xi\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha w)_i\nabla \theta_i, w) + \xi\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha \theta)_i\nabla w_i, w) + \mu_0(\nabla w, \nabla w) + \tag{3.9}$$
$$+\ \mu_1\xi\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(w)(s;Z(w)(s;t,x))ds, \mathscr{E}(w)\right) + \varepsilon(w,w)_3 = -\varepsilon(\theta,w)_3 + (E(\theta,\xi),w).$$

Приступим к оценке всех имеющихся в последнем равенстве слагаемых. Отметим очевидное равенство

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha w)_i\nabla w_i, w) = 0.$$

Далее рассмотрим следующее слагаемое в левой части (3.9). Интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \le \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \theta_i\Delta_\alpha w_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \theta_i(w_j - \alpha^2\Delta w_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_i w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla\theta_i\nabla w_j, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) + \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\theta_i\nabla w_j, \frac{\partial\nabla w_j}{\partial x_i}\right)\right|. \tag{3.10}$$

Рассмотрим первое слагаемое в последнем неравенстве. Учитывая, что $\theta \in C^1([0,\infty);V_3)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\theta_i w, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \theta_i w_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \theta_i\frac{\partial w_j^2}{\partial x_i}dx = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega w_j^2\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i}dx = 0. \tag{3.11}$$

Отметим, что третье слагаемое в последнем неравенстве (3.10) аналогично равно 0. Оценим второе слагаемое. В дальнейшем нам понадобятся два известных неравенства (см. [23, следствие 2.1.1]):

$$\|uv\| \le C_0\|u\|_1\|v\|_1, \quad u,v \in H^1(\Omega), \tag{3.12}$$

$$\|uv\| \le C_1\|u\|_2\|v\|, \quad u \in H^2(\Omega), \quad v \in L_2(\Omega). \tag{3.13}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и неравенство (3.13), получаем

$$\left|\alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla\theta_i\nabla w_j, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)\right| = \alpha^2\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \nabla\theta_i\nabla w_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx\right| \le \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_\Omega\left|\nabla\theta_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla w_j|^2dx\right)^{1/2} \le$$
$$\le \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\nabla\theta_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right\|\|\nabla w_j\| \le \alpha^2 C_1\|\nabla\theta\|_2\|\nabla w\|\|w\|_1 = \alpha^2 C_1\|\theta\|_3\|w\|_1^2.$$

Вернемся к равенству (3.9). Проведем аналогичные преобразования и оценки со следующими слагаемыми. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha w)_i\nabla\theta_i, w) = \sum_{i=1}^{n}((w_i - \alpha^2\Delta w_i)\nabla\theta_i, w) = \sum_{i=1}^{n}(w_i\nabla\theta_i, w) + \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla w_i\nabla\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}, w_j\right) +$$
$$+\ \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla w_i\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}, \nabla w_j\right) \le \left|\sum_{i=1}^{n}(w_i\nabla\theta_i, w)\right| + \alpha^2\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla w_i\nabla\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}, w_j\right)\right| + \alpha^2\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla w_i\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}, \nabla w_j\right)\right| \le$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|w_i w_j|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|\nabla\theta_i|^2dx\right)^{1/2} + \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left|w_j\nabla\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|\nabla w_i|^2dx\right)^{1/2} + \alpha^2C_1\|\theta\|_3\|w\|_1^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\|w_iw_j\|\|\nabla\theta_i\| + \alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\nabla\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}w_j\right\|\|\nabla w_i\| + \alpha^2C_1\|\theta\|_3\|w\|_1^2 \leq C_2\|\theta\|_1\|w\|_1^2 + \alpha^2C_3\|\theta\|_3\|w\|_1^2.$$

Применяя неравенство (3.12) и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\Delta_\alpha\theta,\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}w_i\Delta_\alpha\theta_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx\right| \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|w_i\Delta_\alpha\theta_j|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\|w_i\Delta_\alpha\theta_j\|\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right\| \leq C_0\|\Delta_\alpha\theta\|_1\|w\|_1^2.$$

Аналогичным образом оценивается следующее слагаемое:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}((\Delta_\alpha\theta)_i\nabla w_i, w)\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(\Delta_\alpha\theta)_i\nabla w_iw_jdx\right| \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|(\Delta_\alpha\theta)_iw_j|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|\nabla w_i|^2dx\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha\theta)_iw_j\|\|\nabla w_i\| \leq C_0\|\Delta_\alpha\theta\|_1\|w\|_1^2.$$

Наконец, оценим интегральное слагаемое в (3.9). Согласно лемме 2.4. из [15], получим

$$\mu_1\left|\xi\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(w)(s;Z(w)(s;t,x))ds,\mathscr{E}(w)\right)\right| \leq \mu_1\left|e^{kt}\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda-kt}\mathscr{E}(w)(s;Z(w)(s;t,x))ds,\mathscr{E}(w)\right)\right| \leq$$

$$\leq \mu_1\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t e^{2(s-t)(1/\lambda+k)}ds\right)^{1/2} = C_4(k,t)\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2},$$

где $C_4(k,t)$ обозначена величина $C_4(k,t) = \dfrac{\mu_1\lambda(1-e^{-2t(1/\lambda+k)})}{2+2k\lambda}$.

Вновь вернемся к равенству (3.9). Умножим обе части этого равенства на 2 и оценим по модулю обе части этого равенства. Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{d}{dt}\|w\|_V^2 + 2\varepsilon\|w\|_3^2 + 2\mu_0\|w\|_1^2 \leq (2\alpha^2C_1 + 2\alpha^2C_3)\|\theta\|_3\|w\|_1^2 + 2C_2\|\theta\|_1\|w\|_1^2 + 4C_0\|\Delta_\alpha\theta\|_1\|w\|_1^2 -$$

$$- 2\varepsilon(\theta,w)_3 + 2\big(E(\theta,\xi),w\big) + 2C_4(k,t)\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2} \leq C_5\|w\|_1^2(\|\Delta_\alpha\theta\|_1 + \|\theta\|_1 + \alpha^2\|\theta\|_3) -$$

$$- 2\varepsilon(\theta,w)_3 + 2\big(E(\theta,\xi),w\big) + 2C_4(k,t)\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2} \leq C_5\max\{1,1/\alpha^2\}\|w\|_V^2(\|\Delta_\alpha\theta\|_1 + \|\theta\|_1 + \alpha^2\|\theta\|_3) - \tag{3.14}$$

$$- 2\varepsilon(\theta,w)_3 + 2(E(\theta,\xi),w) + 2C_4(k,t)\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2} \leq \Gamma(\|w\|_V^2) - 2\varepsilon(\theta,w)_3 +$$

$$+ 2(E(\theta,\xi),w) + 2C_4(k,t)\|w\|_1\left(\int_0^t\|w\|_1^2ds\right)^{1/2},$$

где Γ определено в (2.2).

Далее нам потребуется

Лемма 7 (см. [31, лемма 3.1]). *Пусть* $f, \chi, L, M : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *скалярные функции, причем* χ, L, $M \in L_1(0,1)$ *и* $f \in W_1^1(0,T)$. *Если*

$$\chi(t) \geq 0, \quad L(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad f'(t) + \chi(t) \leq L(t)f(t) + M(t)$$

для почти всех $t \in (0,T)$, *то*

$$f(t) + \int_0^t \chi(s)ds \leq \exp\left(\int_0^t L(s)ds\right)\left[f(0) + \int_0^t \exp\left(\int_s^0 L(\xi)d\xi\right)M(s)ds\right]$$

для почти всех $t \in [0,T]$.

Применим эту лемму к последнему неравенству в (3.14). Тогда

$$\|w(t)\|_V^2 + 2\varepsilon\int_0^t \|w(s)\|_3^2 ds + 2\mu_0\int_0^t \|w(s)\|_1^2 ds \leq e^{\int_0^t \Gamma(s)ds} \times$$

$$\times\left\{\|u_0 - \theta(0)\|_V^2 + \int_0^t e^{\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi}\left[2(E(\theta,\xi)(s), w(s)) - 2\varepsilon(\theta(s), w(s))_3\right]ds\right\} +$$

$$+ e^{\int_0^t \Gamma(s)ds}\int_0^t e^{\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi} 2C_4(k,s)\|w(s)\|_1\left(\int_0^s \|w(s)\|_1^2 d\psi\right)^{1/2} ds.$$

Оценим последнее слагаемое. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$e^{\int_0^t \Gamma(s)ds}\int_0^t e^{\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi} 2C_4(k,s)\|w(s)\|_1\left(\int_0^s \|w(s)\|_1^2 d\psi\right)^{1/2} ds \leq$$

$$\leq e^{\int_0^t \Gamma(s)ds}\left(\int_0^t \|w(s)\|_1^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\left(e^{\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi} 2C_4(k,s)\right)^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|w(s)\|_1^2 ds\right)^{1/2} = \tilde{c}(k,t,\Gamma)\int_0^t \|w(s)\|_1^2 ds,$$

где через $\tilde{c}(k,t,\Gamma)$ обозначена величина

$$\tilde{c}(k,t,\Gamma) = \exp\left[\int_0^t \Gamma(s)ds\right]\left(\int_0^t\left(\exp\left[\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi\right]2C_4(k,s)\right)^2 ds\right)^{1/2}.$$

Считая число k достаточно большим, что $\tilde{c}(k,t,\Gamma) < \mu_0/2$, приходим к оценке (3.7). Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $u \in W_1$ — *слабое решение вспомогательной задачи. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;V)}^2 \leq C_0\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2\right), \tag{3.15}$$

$$\varepsilon\|u\|_{L_2(0,T;V_3)}^2 \leq C_0\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2\right), \tag{3.16}$$

$$\|u\|_{L_2(0,T;V)}^2 \leq C_0\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2\right), \tag{3.17}$$

$$\|u'\|_{L_2(0,T;V_3^*)} \leq C_1(1 + \sqrt{\varepsilon})\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2\right), \tag{3.18}$$

где постоянные C_0, $C_1 > 0$ *не зависит от* ε *и* ξ.

Доказательство. Для доказательства первых трех оценок рассмотрим неравенство (3.7) при $\theta = 0$. Тогда

$$\|u(t)\|_V^2 + 2\varepsilon\int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds + \frac{3\mu_0}{2}\int_0^t \|u(s)\|_1^2 ds \leq \|u_0\|_V^2 + 2\int_0^t \langle f, u\rangle ds. \tag{3.19}$$

Интеграл в правой части можно оценить следующим образом. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle ds \le \left|\int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle ds\right| \le \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}\|u(s)\|_1\, dt \le \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}\|u(t)\|_1\, dt \le \left(\int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt\right)^{1/2} = \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}\|u\|_{L_2(0,T;V)} \le \frac{2}{\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \frac{\mu_0}{8}\|u\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши

$$bc \le \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 4/\nu$.

Следовательно, неравенство (3.19) перепишется в виде

$$\|u(t)\|_V^2 + 2\varepsilon\int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds + \frac{3\mu_0}{2}\int_0^t \|u(s)\|_1^2 ds \le \|u_0\|_V^2 + \frac{4}{\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \frac{\mu_0}{4}\|u\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Так как правая часть в последнем неравенстве не зависит от t, то перейдем к существенному супремуму по $t \in [0,T]$ в левой части. Тогда

$$\frac{1}{3}\|u(t)\|^2_{L_\infty(0,T;V)} + \frac{2\varepsilon}{3}\int_0^T \|u(t)\|_3^2 ds + \frac{\mu_0}{2}\int_0^T \|u(t)\|_1^2 ds \le \|u_0\|_V^2 + \frac{4}{\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \frac{\mu_0}{4}\|u\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Следовательно,

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;V)} + \varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;V_3)} + \|u\|^2_{L_2(0,T;V)} \le C_0\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)}\right).$$

Откуда непосредственно следуют оценки (3.15)–(3.17).

Осталось установить оценку (3.18). Используя равенство (3.4), получаем

$$\begin{gathered}
|\langle u', \varphi\rangle| \le \left|\xi\sum_{i=1}^n \left(u_i\Delta_\alpha u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right| + \left|\xi\sum_{i=1}^n ((\Delta_\alpha u)_i\nabla u_i, \varphi)\right| + \mu_0|(\nabla u, \nabla\varphi)| + \\
+ \mu_1\left|\xi\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(u)(s, Z(u)(s;t,x))ds, \mathscr{E}(\varphi)\right)\right| + \varepsilon|(u,\varphi)_3| + |\langle f, \varphi\rangle| \le \left|\sum_{i=1}^n \left(u_i u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^n (u_i\nabla u_i, \varphi)\right| + \\
+ \alpha^2\left|\sum_{i=1}^n \left(u_i\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right| + \alpha^2\left|\sum_{i=1}^n (\Delta u_i\nabla u_i, \varphi)\right| + \mu_0|(\nabla u, \nabla\varphi)| + \varepsilon|(u,\varphi)_3| + |\langle f, \varphi\rangle| + \\
+ \mu_1\left|\left(\int_0^t e^{(s-t)/\lambda}\mathscr{E}(u)\left(s, Z(u)(s;t,x)\right)ds, \mathscr{E}(\varphi)\right)\right|.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Рассмотрим третье слагаемое в последнем неравенстве (3.20). Интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{i=1}^n \left(u_i\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}u_i, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right). \tag{3.21}$$

Аналогично рассуждая для четвертого слагаемого в правой части (3.20), имеем

$$\sum_{i=1}^n (\Delta u_i\nabla u, \varphi) = -\sum_{i,j,k=1}^n \left(\varphi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_j}\right) - \sum_{i,j,k=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right). \tag{3.22}$$

Проводя те же рассуждения, что и в (3.11), получаем, что первое слагаемое в последнем равенстве равно 0.

Учитывая равенства (3.21) и (3.22), переходим к оценке этих слагаемых. С учетом неравенства Гёльдера, а также непрерывного вложения $V \subset L_4(\Omega)$, для $\varphi \in V_3$ будут справедливы соотношения:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right| \le \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\right| + \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}dx\right| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left|u_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2} \le C_2\|\nabla\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ C_3\|u\|_{L_4(\Omega)}\left\|\nabla^2\varphi\right\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \le C_4\|\nabla\varphi\|_1\|u\|_1^2 + C_5\|u\|_1^2\left\|\nabla^2\varphi\right\|_1 \le C_6\|u\|_1^2\|\varphi\|_3.$$

Проводя аналогичные рассуждения со вторым слагаемым, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\Delta u_i\nabla u, \varphi)\right| = \left|\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}dx\right| \le C_7\|\nabla\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_8\|u\|_1^2\|\varphi\|_3.$$

Перейдем к оценке остальных слагаемых в (3.20). Вновь, используя неравенство Гёльдера и непрерывность вложения $V \subset L_4(\Omega)$, будем иметь справедливость следующих неравенств:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(u_iu, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|u_iu_j|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le C_9\|u\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \le C_{10}\|u\|_1^2\|\varphi\|_3.$$

Аналогичным образом мы оценим следующее слагаемое в (3.20). Имеют место соотношения

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(u_i\nabla u_i, \varphi)\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\nabla u_i\varphi_jdx\right| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|u_i\varphi_j|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|\nabla u_i|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le C_{11}\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \le C_{12}\|u\|_1^2\|\varphi\|_1 \le C_{13}\|u\|_1^2\|\varphi\|_3.$$

Наконец, перейдем к оценке последних слагаемых. Справедливы следующие неравенства:

$$\mu_0|(\nabla u, \nabla\varphi)| + \varepsilon|(u,\varphi)_3| + |\langle f,\varphi\rangle| \le \mu_0\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|_3\|\varphi\|_3 +$$

$$+ \|f\|_{V^*}\|\varphi\|_1 \le C_{14}\left(\|u\|_1 + \varepsilon\|u\|_3 + \|f\|_{V^*}\right)\|\varphi\|_3.$$

Таким образом, учитывая все полученные оценки, а также неравенство (3.6) леммы 4 для $v = 0$, получаем

$$|\langle u', \varphi\rangle| \le C_{15}\left(\|u\|_1^2 + 2\|u\|_1 + \|u\|_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon\|u\|_3 + \|f\|_{V^*}\right)\|\varphi\|_3.$$

Следовательно, $\|u'\|_{V_3^*} \le C_{15}\left(\|u\|_1^2 + \|u\|_1 + \|u\|_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon\|u\|_3 + \|f\|_{V^*}\right)$. Возведем в квадрат полученное неравенство и проинтегрируем в пределах от 0 до T. Тогда

$$\|u'\|^2_{L_2(0,T;V_3^*)} = \int_0^T\|u'\|^2_{V_3^*}dt \le C_{15}^2\left(\int_0^T\|u\|_1^4dt + \int_0^T\|u\|_1^2dt + \|u\|^2_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon^2\int_0^T\|u\|_3^2dt + \int_0^T\|f\|^2_{V^*}dt\right) \le$$

$$\le C_{15}^2\left(\|u\|^4_{L_\infty(0,T;V)} + 2\|u\|^2_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon^2\|u\|^2_{L_2(0,T;V_3^*)} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)}\right).$$

Применяя оценки (3.15)–(3.17), получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $u_0 \in V$, $f \in L_2(0,T;V^*)$. Тогда существует слабое решение $u \in W_1$ вспомогательной задачи.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение (3.5), которое соответствует начально-краевой задаче (3.1)–(3.3):

$$\tilde{A}(u) - \xi(Q(u) + G(u)) = (f, u_0), \quad \xi \in [0,1]. \tag{3.23}$$

Из оценок (3.16) и (3.18) следует, что

$$\|v\|_{W_1} \le C_0,$$

где $C_0 > 0$ – некоторая постоянная. Тогда все решения уравнения (3.23) лежат в шаре $B_R \subset W_1$ с центром в нуле и радиусом $R = C_0 + 1$. По леммам 1 и 2 операторы A и N являются непрерывными. Тогда, согласно [23, лемма 3.1.3], оператор $\tilde{A}$ является непрерывно обратимым. Следовательно, ни одно решение семейства уравнений

$$u - \xi\tilde{A}^{-1}(Q(u) + G(u)) = \tilde{A}^{-1}(f, u_0), \quad \xi \in [0,1], \tag{3.24}$$

не принадлежит границе того же шара B_R.

Оператор $Q : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*) \times V_3$ является вполне непрерывным как сумма вполне непрерывных операторов (см. лемму 3). По лемме 5 оператор $G : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*) \times V_3$ также является вполне непрерывным. Тогда оператор $Q(u) + G(u) : W_1 \to L_2(0,T;V_3^*) \times V_3$ – вполне непрерывный и, следовательно, оператор $\tilde{A}^{-1}(Q(u) + G(u)) : W_1 \to W_1$ является вполне непрерывным как произведение непрерывного и вполне непрерывного операторов.

Таким образом, вполне непрерывное векторное поле $u - \xi\tilde{A}^{-1}(Q(u) + G(u))$ невырожденно на границе шара B_R, а значит, для этого векторного поля определена степень Лере–Шаудера $\deg_{\mathrm{LS}}(I - \xi\tilde{A}^{-1}(Q + G), B_R, \tilde{A}^{-1}(f, u_0))$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg_{\mathrm{LS}}(I - \xi\tilde{A}^{-1}(Q + G), B_R, \tilde{A}^{-1}(f, u_0)) = \deg_{\mathrm{LS}}(I, B_R, \tilde{A}^{-1}(f, u_0)) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $u \in W_1$ уравнения (3.24), а следовательно, и вспомогательной задачи (3.1)–(3.3). Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $T_m \to \infty$ и убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_m \to 0$. По лемме 9 существует решение вспомогательной задачи $u_m \in W_1$, где $T = T_m$, $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\xi = 1$. Обозначим через $\tilde{u}_m$ функцию, которая совпадает с u_m на отрезке $[0, T_m]$ и равна нулю на (T_m, ∞) соответственно.

По лемме 6 для любой $\theta \in C^1([0,\infty); V_3)$ и $0 \le t \le T \le T_m$, справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}_m(t) - \theta(t)\|_V^2 \le \exp\left(\int_0^t \Gamma(s)ds\right)\left\{\|u_0 - \theta(0)\|_V^2 + \int_0^t \exp\left(\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[2(E(\theta)(s), \tilde{u}_m(s) - \theta(s)) - 2\varepsilon_m(\theta(s), \tilde{u}_m(s) - \theta(s))_3\right]ds\right\},$$

где Γ определяется формулой (2.2).

Зафиксируем произвольный интервал $[0, T]$. Согласно априорным оценкам (3.15) и (3.17), без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности), получим, что $\tilde{u}_m \to u_*$ *-слабо в $L_\infty(0,\infty;V)$ и $\tilde{u}_m \to u$ слабо в $L_2(0,T;V)$.

Кроме того, из (3.18) без ограничения общности можно предположить, что $\tilde{u}_m \to u'$ слабо в $L_2(0,T;V_3^*)$. Следовательно, $u \in C_w([0,T]; V_3^*)$ и по лемме Лионса–Мадженеса (см. [18, Глава III, Лемма 1.4]) получим, что $u \in C_w([0,T]; V)$.

Используя неравенство (25) и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получаем

$$\|u_m(t)-\theta(t)\|_V^2 \le \exp\left(\int_0^t \Gamma(s)ds\right)\left\{\|u_0-\theta(0)\|_V^2 + \int_0^t \exp\left(\int_s^0 \Gamma(\psi)d\psi\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,[2(E(\theta)(s), u_m(s)-\theta(s)) + C_0\varepsilon_m(1+1/\sqrt{\varepsilon_m})]ds\right\}. \tag{4.1}$$

Переходя к пределу в (4.1) при $m\to\infty$, получаем соотношение (2.1). Таким образом, доказано существование диссипативного решения задачи (1.1)–(1.6).

Докажем пункт (б). Предположим, что существует сильное решение u_T с теми же начальными значениями, что и диссипативное решение u. Положим $\theta = u_T$ в (2.1) для $t\in[0,T]$. Учитывая, что $E(u_T)=0$ на $[0,T]$, то мы получаем, что правая часть (2.1) равна нулю. Таким образом, и левая часть равна нулю, что и доказывает (б).

Пункт (в) прямо следует из (а) и (б). А именно, любое достаточно гладкое решение, если оно существует, будет совпадать со всеми диссипативными решениями. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leray J.* Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'space // Acta Math. 1934. V. 63. P. 193–248.
2. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S.* The Euler-Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 349. P. 4173–4177.
3. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S.* The Euler-Poincare Equations and semidirect products with applications to continuum theories // Adv. Math. 1998. V. 137. P. 1–81.
4. *Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S.* Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 5338–5341.
5. *Holm D.D., Jeffery C., Kurien S., Livescu D., Taylor M.A., Wingate B.A.* The LANS-α model for computing turbulence origins, results, and open problems // Los Alamos Science. 2005. V. 29. P. 152–172.
6. *Hecht M.W., Holm D.D., Petersen M.R., Wingate B.A.* Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. № 11. P. 5691–5716.
7. *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory // J. Dyn. Diff. Equat. 2002. V. 14. P. 1–35.
8. *Cheskidov A., Holm D.D., Olson E., Titi E.S.* On Leray-α model of turbulence // Proc. R. Soc. London. A. 2005. V. 461. P. 629–649.
9. *Ilyin A.A., Lunashin E., Titi E.S.* A modified Leray-α subgrid scale model of turbulence // Nonlinearity. 2006. V. 19. P. 879–897.
10. *Cao C., Holm D.D., Titi E.S.* On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics // J. Turbul. 2005. V. 6. P. 1–11.
11. *Cao Y., Lunasin E.M., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models // Comm. Math. Sciences. 2006. V. 4. № 4. P. 823–884.
12. *Vorotnikov D.A.* Global generalized solutions for Maxwell-alpha and Euler-alpha equations // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 309–327.
13. *Звягин А.В., Поляков Д.М.* О разрешимости альфа-модели Джеффриса-Олдройда // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 6. С. 782–787.
14. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости // Докл. АН. 2001. Т. 380. № 3. С. 308–311.
15. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1633–1645.
16. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. V. 1. N.Y.: Oxford University Press, 1996. 248 p.
17. *Бардос К., Тити Э.С.* Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи матем. наук. 2007. Т. 62. № 3(375). С. 5–46.
18. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1971. 408 с.
19. *Orlov V.P., Sobolevskii P.E.* On mathematical models of a viscoelasticity with a memory // Differential Integral Equations. 1991. № 4. P. 103–115.
20. *Zvyagin V.G.* Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics // J. Math. Sci. (N. Y.). 2014. V. 201. № 6. P. 830–858.

21. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. М.: УРСС, 2004. 112 с.
22. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics // J. Fixed Point Theory Appl. 2008. V. 3. P. 23–49.
23. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics (de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications vol. 12). Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2008. 245 p.
24. *Орлов В.П., Паршин М.И.* Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 4. С. 653–668.
25. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* Об одной модели термовязкоупругости Джеффриса-Олдройда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1821–1830.
26. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. V. 16. P. 27–82.
27. *Звягин В.Г., Кондратьев С.К.* Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики // Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. № 5(419). С. 81–156.
28. *Zvyagin V., Kondratyev S.* Pullback attractors of the Jeffreys-Oldroyd equations // J. Diff. Equat. 2016. V. 260. P. 5026–5042.
29. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД УРСС, 2012. 412 с.
30. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. № 4. P. 65–96.
31. *Vorotnikov D.A.* Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 339. P. 876–888.