ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 7, с. 1201–1229

УДК 517.925.8+517.928.4

АСИМПТОТИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ[1)]

В. Ф. Бутузов

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия)

e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 03.03.2019 г.
Переработанный вариант 03.03.2019 г.
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Построена и обоснована асимптотика по малому параметру погранслойного решения краевой задачи для сингулярно возмущенной частично диссипативной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых второго, а другое — первого порядка. Это решение является стационарным решением соответствующей эволюционной системы уравнений с частными производными. Доказана асимптотическая устойчивость стационарного погранслойного решения и найдена его локальная область притяжения. Библ. 10.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная частично диссипативная система уравнений, пограничный слой, асимптотическая устойчивость решения, асимптотический метод дифференциальных неравенств.

DOI: 10.1134/S0044466919070159

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+w(x)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+F(u,v,x,\varepsilon)=0,$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}+w(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\tilde f(u,v,x,\varepsilon)=0, \tag{1}$$

$$(x,t)\in D=(0<x<1)\times(t>0),$$

в которой u и v — искомые скалярные функции, $\varepsilon>0$ — малый параметр, $w(x)>0$ и F, $\tilde f$ — заданные достаточно гладкие функции соответственно на отрезке $0\le x\le 1$ и в области

$$G=\{(u,v,x,\varepsilon):u\in I_u,\ v\in I_v,\ x\in[0;1],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}, \tag{2}$$

где I_u и I_v — некоторые интервалы, $\varepsilon_0>0$.

Система вида (1) относится к классу так называемых *частично диссипативных систем*, поскольку член со второй производной (диссипативный член) содержится только в одном уравнении. Такие системы возникают, в частности, в задачах химической кинетики в случае быстрых реакций. В этом случае u и v — концентрации реагирующих веществ, ε^{-2} — так называемая константа скорости быстрой реакции (большая величина).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00424).

В стационарном случае, когда искомые функции u и v не зависят от времени, система (1) становится системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которую, положив

$$f(u,v,x,\varepsilon) = -w^{-1}(x)\tilde{f}(u,v,x,\varepsilon),$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} - w(x)\frac{du}{dx}\right) = F(u,v,x,\varepsilon), \\ &\varepsilon^2\frac{dv}{dx} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (0;1). \end{aligned} \tag{3}$$

Будем рассматривать систему (3) с краевыми условиями

$$u(0,\varepsilon) = u^0, \quad v(0,\varepsilon) = v^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ из (3) получаем вырожденную систему

$$F(u,v,x,0) = 0, \quad f(u,v,x,0) = 0. \tag{5}$$

Цели работы. 1. Установить условия, при которых существует погранслойное решение (обозначим его $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$) задачи (3), (4), т.е. такое решение, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится на интервале $0 < x < 1$ к решению вырожденной системы (5), и построить для этого решения асимптотическое приближение с произвольной точностью по параметру ε на всем отрезке $0 \le x \le 1$, включая пограничные слои – малые окрестности граничных точек $x = 0$ и $x = 1$, где решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ отлично от решения вырожденной системы.

2. Погранслойное решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ задачи (3), (4) является стационарным решением системы (1). Встают вопросы об устойчивости этого решения (по Ляпунову) при $t \to \infty$ и о его области притяжения, т.е. о том множестве функций $u_0(x,\varepsilon)$, $v_0(x,\varepsilon)$, $x \in [0;1]$, для которых решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ системы (1) с начальными условиями

$$u(x,0,\varepsilon) = u_0(x,\varepsilon), \quad v(x,0,\varepsilon) = v_0(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1],$$

и краевыми условиями, согласованными с условиями (4) (см. (92) в разд. 4), существует при $t > 0$ и удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon), \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1].$$

Получить ответы на эти вопросы также является целью работы.

В п. 1.2 представлены условия, обеспечивающие существование искомого погранслойного решения. В разд. 2 при этих условиях для задачи (3), (4) построены формальные асимптотические (при $\varepsilon \to 0$) ряды, а в разд. 3 доказано существование решения задачи (3), (4), обладающего построенной асимптотикой. В разд. 4 доказана асимптотическая устойчивость стационарного погранслойного решения и найдена его локальная область притяжения. В разд. 5 содержатся некоторые замечания, относящиеся к рассмотренной задаче и возможным ее продолжениям.

Отметим, что другие задачи для сингулярно возмущенных частично диссипативных систем рассматривались в работах [1], [2].

1.2. Условия

Сформулируем условия, при которых будет доказано для достаточно малых ε существование погранслойного решения задачи (3), (4) и построено его асимптотическое приближение. Будем нумеровать эти условия так: A1, A2, ...

В п. 1.1 говорилось о достаточной гладкости функций w, F, f. Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую хотят построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать эти функции бесконечно дифференцируемыми.

A1. $w(x) \in C^\infty[0;1]$, $F \in C^\infty(G)$, $f \in C^\infty(G)$, где область G определена в (2), и пусть

$$u^0 \in I_u, \quad v^0 \in I_v, \quad u^1 \in I_u,$$

где I_u и I_v – интервалы, фигурирующие в определении области G.

A2. Уравнение

$$f(u,v,x,0) = 0 \tag{6}$$

имеет бесконечно дифференцируемый корень

$$v = \varphi(u,x), \quad \text{причем} \quad \varphi(u,x) \in I_v \quad \text{при} \quad u \in I_u, \quad x \in [0;1],$$

а уравнение

$$g(u,x) := F\left(u, \varphi(u,x), x, 0\right) = 0 \tag{7}$$

имеет бесконечно дифференцируемый корень

$$u = \bar{u}_0(x), \quad \text{причем} \quad \bar{u}_0(x) \in I_u \quad \text{при} \quad x \in [0;1].$$

Положим $\bar{v}_0(x) := \varphi\left(\bar{u}_0(x), x\right)$.

Чтобы сформулировать остальные пять условий, определим несколько кривых в пространстве (u,v,x):

$$L_1 = \{(u,v,x) : u = u^0,\ v \in [v^0, \varphi(u^0,0)],\ x = 0\},$$

$$L_2 = \{(u,v,x) : u \in [u^0, \bar{u}_0(0)],\ v = \varphi(u,0),\ x = 0\},$$

$$L_3 = \{(u,v,x) : u = \bar{u}_0(x),\ v = \bar{v}_0(x),\ x \in [0;1]\},$$

$$L_4 = \{(u,v,x) :\ u \in [\bar{u}_0(1), u^1],\ v = \varphi(u,1),\ x = 1\}.$$

Заметим, что кривые L_1 и L_2 лежат в плоскости $x = 0$, а кривая L_4 лежит в плоскости $x = 1$. Каждая из этих кривых может вырождаться в точку. Например, если $v^0 = \varphi(u^0,0)$, то отрезок L_1 вырождается в точку $(u^0, v^0, 0)$. Такие вырождения упрощают задачу. Для определенности будем считать, что ни одна из этих кривых не вырождается в точку, т.е.

$$v^0 \neq \varphi(u^0,0), \quad u^0 \neq \bar{u}_0(0), \quad u^1 \neq \bar{u}_0(1).$$

Обозначим через l_i проекцию кривой L_i на плоскость (u,x) для $i = 2,3,4$ и положим

$$L = U_{i=1}^4 L_i. \tag{8}$$

Очевидно, что L является непрерывной кривой, составленной из четырех гладких звеньев.

Сформулируем теперь условия A3–A7.

A3. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,x,0) < 0$ в точках кривых L_2, L_3, L_4.

A4. $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,x) > 0$ в точках кривых l_2, l_3, l_4.

A5. $f(u,v,x,0) \neq 0$ в точках кривой L_1, кроме точки $(u^0,\varphi(u^0,0),0)$ т.е. $f(u^0,v,0,0) \neq 0$ при $v \in [v^0,\varphi(u^0,0))$.

A6. $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,x,0) < 0$ в точках кривой L.

A7. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) > 0$ в точках кривой L.

Заметим, что в силу условия A3 корень $v = \varphi(u,x)$ уравнения (6) является простым, а в силу условия A4 корень $u = \overline{u}_0(x)$ уравнения (7) также является простым. Отметим также, что условия A1–A5 понадобятся в разд. 2 при построении асимптотики решения. а условия A6 и A7 будут нужны в разд. 3 и разд. 4 при обосновании асимптотики и доказательстве устойчивости стационарного решения.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3), (4)

2.1. Вид асимптотики

Формальную погранслойную асимптотику в задаче (3), (4) построим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi u(\xi,\varepsilon) + Pu(\zeta,\varepsilon) + Qu(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{9}$$

$$v(x,\varepsilon) = \overline{v}(x,\varepsilon) + \Pi v(\xi,\varepsilon) + Pv(\zeta,\varepsilon) + Qv(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{10}$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$ – регулярные части асимптотики; Πu, Πv и Pu, Pv – погранслойные части, описывающие погранслойное поведение решения в окрестности точки $x = 0$; $\xi = x/\varepsilon$ и $\zeta = x/\varepsilon^2$ – погранслойные переменные; Qu, Qv – погранслойные части асимптотики, описывающие поведение решения в окрестности точки $x = 1$; $\tilde{\xi} = (x-1)/\varepsilon$ – погранслойная переменная. Каждое слагаемое в правых частях (9) и (10) будет построено в виде ряда по целым степеням ε с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой (см. [3]).

2.2. Регулярные части асимптотики

Построим их в виде

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{u}_i(x), \quad \overline{v}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{v}_i(x). \tag{11}$$

Стандартным способом, т.е. подставив ряды (11) в систему (3) вместо u и v, разложив правые части уравнений в ряды по степеням ε и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой части каждого уравнения, получим последовательно для $i = 0,1,2\ldots$ системы уравнений относительно $\overline{u}_i(x)$, $\overline{v}_i(x)$.

Для $\overline{u}_0(x)$, $\overline{v}_0(x)$ получается вырожденная система (5):

$$F(\overline{u}_0,\overline{v}_0,x,0) = 0, \quad f(\overline{u}_0,\overline{v}_0,x,0) = 0.$$

В качестве ее решения возьмем (см. условие A2):

$$\overline{u}_0 = \overline{u}_0(x), \quad \overline{v}_0 = \overline{v}_0(x) := \varphi(\overline{u}_0(x),x).$$

Заметим, что в силу условия А3, относящегося к кривой L_3, справедливо неравенство

$$\bar{f}_v(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) < 0, \quad x \in [0;1], \tag{12}$$

а в силу условия А4, относящегося к кривой l_3, — неравенство

$$\bar{g}_u(x) := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_0(x), x) > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{13}$$

Для $\bar{u}_i(x)$, $\bar{v}_i(x)$ при $i \geq 1$ получается система линейных уравнений

$$\bar{F}_u(x)\bar{u}_i + \bar{F}_v(x)\bar{v}_i = F_i(x), \quad \bar{f}_u(x)\bar{u}_i + \bar{f}_v(x)\bar{v}_i = f_i(x), \tag{14}$$

где функция $\bar{f}_v(x)$ определена в (12), обозначения $\bar{F}_u(x)$, $\bar{F}_v(x)$ и $\bar{f}_u(x)$ имеют аналогичный смысл, а функции $F_i(x)$ и $f_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x)$, $\bar{v}_j(x)$, с номерами $j < i$. Используя равенства

$$\bar{\varphi}_u(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_0(x), x) = -\bar{f}_u(x)\bar{f}_v^{-1}(x), \quad \bar{g}_u(x) = \bar{F}_u(x) + \bar{F}_v(x)\bar{\varphi}_u(x),$$

преобразуем выражение для определителя $\Delta(x)$ системы (14):

$$\Delta(x) = \bar{F}_u(x)\bar{f}_v(x) - \bar{F}_v(x)\bar{f}_u(x) = \bar{f}_v(x)(\bar{F}_u(x) + \bar{F}_v(x)\bar{\varphi}_u(x)) = \bar{f}_v(x)\bar{g}_u(x).$$

В силу (12) и (13) $\Delta(x) < 0$, $x \in [0;1]$, и, следовательно, система (14) имеет единственное решение.

Таким образом, ряды (11) построены.

2.3. Погранслойные части асимптотики Πu, Πv *и* Pu, Pv

Построим их в виде

$$\Pi u(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i u(\xi), \quad \Pi v(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i v(\xi), \quad \xi = x/\varepsilon; \tag{15}$$

$$Pu(\zeta, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i u(\zeta), \quad Pv(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i v(\zeta), \quad \zeta = x/\varepsilon^2. \tag{16}$$

Стандартным способом (см. [3]) для Πu, Πv получается система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2 \Pi u}{d\xi^2} - \varepsilon w(\varepsilon\xi)\frac{d\Pi u}{d\xi} = \Pi F := F(\bar{u}(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \Pi u, \bar{v}(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \Pi v, \varepsilon\xi, \varepsilon) - \\ - F(\bar{u}(\varepsilon\xi, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi, \varepsilon), \varepsilon\xi, \varepsilon), \quad \varepsilon\frac{d\Pi v}{d\xi} = \Pi f,\end{gathered} \tag{17}$$

где Πf имеет выражение, аналогичное ΠF, а для Pu, Pv – система уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2Pu}{d\zeta^2}-w(\varepsilon^2\zeta)\frac{dPu}{d\zeta}=PF:=F\Big(\bar{u}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon)+\Pi u(\varepsilon\zeta,\varepsilon)+$$
$$+Pu,\bar{v}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon)+\Pi v(\varepsilon\zeta,\varepsilon)+Pv,\varepsilon^2\zeta,\varepsilon\Big)-F\Big(\bar{u}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon)+\Pi u(\varepsilon\zeta,\varepsilon),\bar{v}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon)+ \tag{18}$$
$$+\Pi v(\varepsilon\zeta,\varepsilon),\varepsilon^2\zeta,\varepsilon\Big),\quad \frac{dPv}{d\zeta}=Pf,$$

где Pf имеет выражение, аналогичное PF.

Подставив ряды (11), (15) и (16) в эти системы, будем стандартным способом извлекать из них уравнения для коэффициентов рядов (15) и (16).

Для Π_0u, Π_0v из (17) следует система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2\Pi_0u}{d\xi^2}=F(\bar{u}_0(0)+\Pi_0u,\bar{v}_0(0)+\Pi_0v,0,0),\\ 0=f(\bar{u}_0(0)+\Pi_0u,\bar{v}_0(0)+\Pi_0v,0,0),\quad \xi\ge 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Из второго уравнения в (19), используя условие A2, получаем

$$\bar{v}_0(0)+\Pi_0v=\varphi(\bar{u}_0(0)+\Pi_0u,0). \tag{20}$$

Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению для Π_0u:

$$\frac{d^2\Pi_0u}{d\xi^2}=g(\bar{u}_0(0)+\Pi_0u,0),\quad \xi\ge 0. \tag{21}$$

К этому уравнению нужно добавить граничные условия. Чтобы получить граничное условие при $\xi=0$, подставим выражение (9) для $u(x,\varepsilon)$ в первое краевое условие из (4), используя представления $\bar{u}$, Πu и Pu в виде рядов и учитывая тот факт, что все члены ряда Qu будут равны нулю при $x=0$ (см. замечание в конце п. 2.4). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i(\bar{u}_i(0)+\Pi_iu(0)+\varepsilon^2P_iu(0))=u^0. \tag{22}$$

Отсюда имеем $\bar{u}_0(0)+\Pi_0u(0)=u^0$, и, следовательно, граничное условие для $\Pi_0u(\xi)$ при $\xi=0$ имеет вид

$$\Pi_0u(0)=u^0-\bar{u}_0(0). \tag{23}$$

В качестве второго граничного условия для $\Pi_0u(\xi)$ и также для остальных функций $\Pi_iu(\xi)$ возьмем стандартное для пограничных функций условие на бесконечности

$$\Pi_iu(\infty)=0,\quad i=0,1,2,\ldots. \tag{24}$$

Итак, функция $\Pi_0 u(\xi)$ определяется как решение уравнения (21) с граничными условиями (23) и (24). Воспользуемся тем, что в силу условия A4 производная $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, x)$ положительна на кривой l_2, т.е.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) > 0 \quad \text{при} \quad u \in [u^0, \bar{u}_0(0)]. \tag{25}$$

Поэтому задача для $\Pi_0 u$ сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{d\Pi_0 u}{d\xi} = \pm\left[2\int_0^{\Pi_0 u} g(\bar{u}_0(0) + s, 0)ds\right]^{1/2}, \quad \xi \geq 0, \tag{26}$$

с начальным условием (23), причем в правой части (26) берется знак плюс, если $u^0 < \bar{u}_0(0)$, и знак минус, если $u^0 > \bar{u}_0(0)$. Если $u^0 = \bar{u}_0(0)$, то $\Pi_0 u(\xi) = 0$ при $\xi \geq 0$, это более простой случай. Но в п. 1.2 было оговорено, что рассматривается более общий случай, когда $u^0 \neq \bar{u}_0(0)$.

Уравнение (26) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (23) является строго монотонной функцией при $\xi \geq 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0 u(\xi)| \leq c \exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{27}$$

буквами c и κ (иногда через c_1, κ_1, ...) здесь и далее обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, различные в разных оценках. Такие же оценки имеют производная $\dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}(\xi)$ и функция $\Pi_0 v(\xi)$, которая определяется теперь из (20):

$$\Pi_0 v(\xi) = \varphi(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0) - \bar{v}_0(0) = \varphi(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi),) - \varphi(\bar{u}_0(0), 0).$$

Для $P_0 u$, $P_0 v$ из (18) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_0 u}{d\xi^2} &= F(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(0), \bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(0) + P_0 v(\zeta), 0, 0) - \\ &\quad - F(\bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(0), \bar{v}_0(0) + \Pi_0 v(0), 0, 0) = \\ &= F(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0 v(\zeta), 0, 0) - F(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{dP_0 v}{d\zeta} = f(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0 v, 0, 0), \quad \zeta \geq 0. \tag{29}$$

Зададим для $P_0 u(\zeta)$ граничное условие на бесконечности

$$P_0 u(\infty) = 0, \tag{30}$$

а для $P_0 v(\zeta)$ зададим начальное условие при $\zeta = 0$. Чтобы его получить, подставим выражение (10) для $v(x, \varepsilon)$ во второе условие из (4) с учетом того, что все члены ряда Qv будут равны нулю при $x = 0$ (см. замечание в конце п. 2.4). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\bar{v}_i(0) + \Pi_i v(0) + P_i v(0)) = v^0, \tag{31}$$

откуда имеем

$$\overline{v}_0(0) + \Pi_0 v(0) + P_0 v(0) = v^0,$$

и, следовательно,

$$P_0 v(0) = v^0 - (\overline{v}_0(0) + \Pi_0 v(0)) = v^0 - \varphi(u^0, 0) =: P^0. \tag{32}$$

Таким образом, функция $P_0 v(\zeta)$ определяется как решение уравнения (29), которое интегрируется в квадратурах, с начальным условием (32).

Заметим, что $f(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0) = 0$ в силу условия A2, и, значит, $P_0 v = 0$ является точкой покоя уравнения (29), асимптотически устойчивой в силу неравенства $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0) < 0$ (см. условие A5, взятое в точке $(u^0, \varphi(u^0, 0), 0)$ – общей точке кривых L_1 и L_2). Так как в силу условия A5

$$f(u^0, \varphi(u^0, 0) + s, 0, 0) \neq 0 \quad \text{при} \quad s \in (0, P^0],$$

то решение задачи (29), (32) является строго монотонной функцией при $\zeta \geq 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$|P_0 v(\zeta)| \leq c \exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \geq 0. \tag{33}$$

Поскольку функция $P_0 v(\zeta)$ определена, то правая часть уравнения (28) является теперь известной функцией, имеющей такую же экспоненциальную оценку, как (33). Обозначив эту функцию $\chi_0(\zeta)$, запишем решение уравнения (28) с граничным условием (30) в виде

$$P_0 u(\zeta) = \int\limits_\infty^\zeta ds \int\limits_\infty^s \chi_0(t) dt. \tag{34}$$

Отсюда следует, что $P_0 u(\zeta)$ и ее производная $\dfrac{dP_0 u}{d\zeta}(\zeta)$ имеют оценки вида (33).

Таким образом, главные члены погранслойных рядов Πu, Πv и Pu, Pv определены.

При $i \geq 1$ для $\Pi_i u$, $\Pi_i v$ из (17) получается система уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d^2 \Pi_i u}{d\xi^2} = F_u(\xi)\Pi_i u + F_v(\xi)\Pi_i v + r_i(\xi), \\ f_u(\xi)\Pi_i u + f_v(\xi)\Pi_i v + \varrho_i(\xi) = 0, \quad \xi \geq 0, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$F_u(\xi) = \frac{\partial F}{\partial u}(\overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), \overline{v}_0(0) + \Pi_0 v(\xi), 0, 0) \tag{36}$$

и такой же смысл имеют обозначения $F_v(\xi)$, $f_u(\xi)$, $f_v(\xi)$, а $r_i(\xi)$ и $\varrho_i(\xi)$ – известные на i-м шаге функции, рекуррентно выражающиеся через уже найденные функции $\Pi_j u(\xi)$, $\Pi_j v(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеющие экспоненциальные оценки вида (27), если такие же оценки имеют функции $\Pi_j u$, $\dfrac{d\Pi_j u}{d\xi}$, $\Pi_j v$ с номерами $j < i$.

Используя равенство (20), запишем производную $f_v(\xi)$ в виде

$$f_v(\xi) = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), \varphi(\overline{u}_0(0) + \Pi_0 v(\xi), 0), 0, 0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}(u, \varphi(u, 0), 0, 0) \quad \text{при} \quad u = \overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi).$$

Так как $\Pi_0 u(\xi)$ – монотонная функция, то ее значения принадлежат промежутку $[u^0 - \overline{u}_0(0), 0)$ при $\xi \in [0, \infty)$, и, следовательно,

$$u = (\overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi)) \in [u^0, \overline{u}_0(0)) \quad \text{при} \quad \xi \in [0, \infty).$$

Поэтому значения производной $f_v(\xi)$ при $\xi \geq 0$ совпадают со значениями $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v, x, 0)$ на кривой L_2, и, значит, в силу условия А3

$$f_v(\xi) \leq -\kappa < 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 0. \tag{37}$$

Попутно отметим, что в силу условий А6, А7 имеют место аналогичные неравенства

$$F_v(\xi) \leq -\kappa < 0, \quad f_u(\xi) \geq \kappa > 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 0. \tag{38}$$

Неравенство (37) позволяет выразить $\Pi_i v$ через $\Pi_i u$ из второго уравнения в (35):

$$\Pi_i v = -f_v^{-1}(\xi)(f_u(\xi)\Pi_i u + \varrho_i(\xi)). \tag{39}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (35), приходим к уравнению для $\Pi_i u(\xi)$:

$$\frac{d^2 \Pi_i u}{d\xi^2} = g_u(\xi)\Pi_i u + \pi_i(\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} g_u(\xi) &:= \frac{\partial g}{\partial u}(\overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0) = F_u(\xi) + F_v(\xi)\varphi_u(\xi) = \\ &= F_u(\xi) - F_v(\xi) f_u(\xi) f_v^{-1}(\xi) \geq c > 0, \end{aligned} \tag{41}$$

(неравенство имеет место в силу (25)), $\pi_i(\xi)$ – известная функция, имеющая оценку типа (27):

$$|\pi_i(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0.$$

Из (22) и (24) получаем граничные условия для $\Pi_i u(\xi)$:

$$\Pi_i u(0) = -\overline{u}_i(0) - P_{i-2}u(0) =: \Pi_i^0, \quad \Pi_i u(\infty) = 0, \tag{42}$$

где $P_{-1}u(0) = 0$.

Решение задачи (40), (42) запишем в виде

$$\Pi_i u(\xi) = \Phi(\xi)\Pi_i^0 + \Phi(\xi)\int_0^{\xi} \Phi^{-2}(s)\int_{\infty}^{s} \Phi(t)\pi_i(t)dtds, \tag{43}$$

где $\Phi(\xi) = \dfrac{d\Pi_0 u}{d\xi}$. Из этой формулы непосредственно следует экспоненциальная оценка

$$\left|\Pi_i u(\xi)\right| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0, \tag{44}$$

и такую же оценку имеют $\dfrac{d\Pi_i u}{d\xi}(\xi)$ и функция $\Pi_i v(\xi)$, которая находится теперь по формуле (39).

Перейдем к функциям $P_i u(\zeta)$, $P_i v(\zeta)$ при $i \ge 1$. Для них из (18) стандартным образом получается система уравнений

$$\frac{d^2 P_i u}{d\zeta^2} = \hat{F}_v(\zeta) P_i v(\zeta) + \chi_i(\zeta), \tag{45}$$

$$\frac{dP_i v}{d\zeta} = \hat{f}_v(\zeta) P_i v + p_i(\zeta), \quad \zeta \ge 0, \tag{46}$$

где

$$\hat{F}_v(\zeta) := \frac{\partial F}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0 v(\zeta), 0, 0)$$

и такой же смысл имеет обозначение $\hat{f}_v(\zeta)$, а $\chi_i(\zeta)$, $p_i(\zeta)$ – известные на i-м шаге функции, рекуррентно выражающиеся через $P_j u(a)$, $P_j v(\zeta)$ с номерами $j < i$ и имеющие экспоненциальные оценки вида (33), если такие же оценки имеют функции $P_j u$, $\dfrac{dP_j u}{d\zeta}$, $P_j v$ с номерами $j < i$.

Зададим для $P_j u$ граничное условие, аналогичное (30):

$$P_j u(\infty) = 0, \tag{47}$$

а для $P_i v$ из (31) получаем начальное условие

$$P_i v(0) = -\bar{v}_i(0) - \Pi_i v(0) =: P_i^0. \tag{48}$$

Решение задачи (46), (48) имеет вид

$$P_i v(\zeta) = K(\zeta, 0) P_i^0 + \int_0^{\zeta} K(\zeta, s) p_i(s) ds, \tag{49}$$

где

$$K(\zeta, s) = \exp\left(\int_s^{\zeta} \hat{f}_v(t) dt\right).$$

Запишем $\hat{f}_v(\zeta)$ в виде

$$\hat{f}_v(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0) + O(P_0 v(\zeta)).$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0) = f_v(\xi)\big|_{\xi=0} \le -\kappa \quad (\text{см. } (37)),$$

и

$$O(P_0 v(\zeta)) \le c_1 \exp(-\kappa_1 \zeta),$$

где $\kappa_1 > 0$, то

$$\hat{f}_v(\zeta) \le -\kappa + c_1 \exp(-\kappa_1 \zeta), \quad \zeta \ge 0.$$

Поэтому

$$K(\zeta, s) \le c_2 \exp(-\kappa(\zeta - s)), \quad 0 \le s \le \zeta.$$

В силу этой оценки и экспоненциальной оценки для $p_i(\zeta)$ из (49) получается оценка

$$|P_i v(\zeta)| \le c \exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{50}$$

Так как функция $P_i v(\zeta)$ найдена, то правая часть в уравнении (45) является теперь известной функцией, имеющей оценку вида (50).

Решение задачи (45), (47) имеет вид

$$P_i u(\zeta) = \int_{\infty}^{\zeta} ds \int_{\infty}^{s} (\hat{F}_v(t) P_i v(t) + \chi_i(t)) dt,$$

откуда следует, что $P_i u(\zeta)$ и ее производная $\dfrac{dP_i u}{d\zeta}(\zeta)$ имеют оценки вида (50).

Итак, погранслойные ряды Πu, Πv и Pu, Pv построены, причем их коэффициенты имеют экспоненциальные оценки вида (44) и (50).

2.4. Погранслойные части асимптотики Qu, Qv

Они строятся в виде

$$Qu(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i u(\tilde{\xi}), \quad Qv(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i v(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = (x-1)/\varepsilon, \tag{51}$$

аналогично тому, как были построены ряды Πu и Πv. Стандартным способом для Qu, Qv получается система уравнений

$$\frac{d^2 Qu}{d\tilde{\xi}^2} - \varepsilon w(1 + \varepsilon\tilde{\xi}) \frac{dQu}{d\tilde{\xi}} = QF := F\left(\bar{u}(1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon) + Qu, \bar{v}(1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon) + \right.$$
$$\left. + Qv, 1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon\right) - F\left(\bar{u}(1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon), \bar{v}(1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon), 1 + \varepsilon\tilde{\xi}, \varepsilon\right),$$

$$\frac{dQv}{d\tilde{\xi}} = Qf, \quad \tilde{\xi} \le 0,$$

где Qf имеет выражение, аналогичное QF.

Из этой системы также стандартным способом извлекаем уравнения для коэффициентов Q_iu, Q_iv рядов (51). Для Q_0u, Q_0v получается система уравнений, аналогичная (19):

$$\frac{d^2Q_0u}{d\tilde{\xi}^2} = F(\bar{u}_0(1) + Q_0u, \bar{v}_0(1) + Q_0v, 1, 0),$$

$$0 = f(\bar{u}_0(1) + Q_0u, \bar{v}_0(1) + Q_0v, 1, 0), \quad \tilde{\xi} \le 0.$$

Из второго уравнения в силу условия A2 получаем

$$\bar{v}_0(1) + Q_0v = \varphi(\bar{u}_0(1) + Q_0u, 1), \tag{52}$$

а первое уравнение, используя равенство (52), приводим теперь к виду

$$\frac{d^2Q_0u}{d\tilde{\xi}^2} = g(\bar{u}_0(1) + Q_0u, 1), \quad \tilde{\xi} \ge 0.$$

Граничное условие при $\tilde{\xi} = 0$ для Q_0u извлекается из равенства $u(1,\varepsilon) = u^1$ (см. (4)) после подстановки в это равенство выражения (10) для $u(1,\varepsilon)$ с учетом того, что все функции Π_iu и P_iu равны нулю при $x = 1$ (см. замечание ниже):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i(\bar{u}_i(1) + Q_iu(0)) = u^1. \tag{53}$$

Отсюда имеем

$$Q_0u(0) = u^1 - \bar{u}_0(1), \tag{54}$$

а второе граничное условие для $Q_0u(\tilde{\xi})$ — стандартное условие на бесконечности:

$$Q_0u(-\infty) = 0.$$

Так как $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,1) > 0$ при $u \in [\bar{u}_0(1), u^1]$ в силу той части условия A4, которая относится к кривой l_4, то задача для Q_0u сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0u}{d\tilde{\xi}} = \pm\left[2\int_0^{Q_0u} g(\bar{u}_0(1) + s, 1)ds\right]^{1/2}, \quad \tilde{\xi} \le 0, \tag{55}$$

с начальным условием (54), причем в правой части (55) берется знак плюс, если $u^1 > \bar{u}_0(1)$, и знак минус, если $u^1 < \bar{u}_0(1)$. Решение этой задачи является строго монотонной функцией при $\tilde{\xi} \le 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|Q_0u(\tilde{\xi})\right| \le c\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \le 0. \tag{56}$$

Такие же оценки имеют производная $\dfrac{dQ_0u}{d\tilde{\xi}}(\tilde{\xi})$ и функция $Q_0v(\tilde{\xi})$, которая определяется теперь из (52).

При $i \geq 1$ для $Q_i u$, $Q_i v$ получается система уравнений, аналогичная (35):

$$\frac{d^2 Q_i u}{d\xi} = \tilde{F}_u(\xi) Q_i u + \tilde{F}_v(\xi) Q_i v + \tilde{r}_i(\xi),$$
$$\tilde{f}_u(\xi) Q_i u + \tilde{f}_v(\xi) Q_i v + \tilde{\varrho}_i(\xi) = 0, \quad \xi \leq 0, \tag{57}$$

где

$$\tilde{F}_u(\xi) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0(1) + Q_0 u(\xi), \overline{v}_0(1) + Q_0 v(\xi), 1, 0) \tag{58}$$

и такой же смысл имеют обозначения $\tilde{F}_v(\xi)$, $\tilde{f}_u(\xi)$, $\tilde{f}_v(\xi)$, а $\tilde{r}_i(\xi)$ и $\tilde{\varrho}_i(\xi)$ рекуррентно выражаются через $Q_j u(\xi)$, $Q_j v(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (56), если такие же оценки верны для $Q_j u$, $\dfrac{dQ_j u}{d\xi}$, $Q_j v$ с номерами $j < i$.

Аналогично неравенству (37) получается неравенство

$$\tilde{f}_v(\xi) \leq -\kappa < 0 \quad \text{при} \quad \xi \leq 0,$$

что позволяет выразить $Q_i v$ через $Q_i u$ из второго уравнения в (57), после чего первое уравнение в (57) приводится к виду

$$\frac{d^2 Q_i u}{d\xi^2} = \tilde{g}_u(\xi) Q_i u + \tilde{q}_i(\xi), \quad \xi \leq 0,$$

где

$$\tilde{g}_u(\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}\left(\overline{u}_0(1) + Q_0 u(\xi), 1\right),$$

а $\tilde{q}_i(\xi)$ имеет оценку вида (56). Граничное условие для $Q_i u(\xi)$ при $\xi = 0$ следует из (53):

$$Q_i u(0) = -\overline{u}_i(1),$$

а второе граничное условие – стандартное условие на бесконечности

$$Q_i u(-\infty) = 0.$$

Решение задачи для $Q_i u$ имеет вид

$$Q_i u(\xi) = -\Psi(\xi)\overline{u}_i(1) + \Psi(\xi)\int_0^{\xi} \Psi^{-2}(s) \int_{\infty}^{s} \Psi(t)\tilde{q}_i(t)\,dt\,ds,$$

где

$$\Psi(\xi) = \frac{dQ_0 u}{d\xi}(\xi).$$

Из этой формулы следует оценка

$$\left|Q_i u(\xi)\right| \leq c \exp(\kappa\xi), \quad \xi \leq 0, \tag{59}$$

и такую же оценку имеют $\dfrac{dQ_i}{d\xi}(\xi)$ и функция $Q_i v(\xi)$, которая определяется теперь из второго уравнения в (57).

Таким образом, погранслойные ряды Qu, Qv построены, и их коэффициенты имеют экспоненциальные оценки вида (59).

Тем самым построение формальной асимптотики погранслойного типа в задаче (3), (4) завершено.

Замечание. При построении погранслойных рядов говорилось о том, что все члены рядов Qu и Qv будут равны нулю в точке $x = 0$, а все члены рядов Πu и Pu будут равны нулю в точке $x = 1$. Это достигается в результате стандартной процедуры умножения всех пограничных функций на срезающие функции. Например, каждая функция $\Pi_i u(\xi)$ умножается на бесконечно дифференцируемую функцию $\sigma(x)$ такую, что $\sigma(x) = 1$ при $0 \le x \le \delta/2$ и $\sigma(x) = 0$ при $\delta \le x \le 1$ (удобно взять $\delta = 1/2$). Тогда функция $\Pi u(\xi)$ не изменится при $0 \le \xi \le \dfrac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$, а при $\xi > \dfrac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$ она имеет оценку

$$\Pi_i u(\xi) = O\left(\exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) = o(\varepsilon^N)$$

при $\varepsilon \to 0$ для любого $N > 0$. Все функции $\Pi_i v$, $P_i u$, $P_i v$ также умножим на $\sigma(x)$, а функции $Q_i u$, $Q_i v$ – на срезающую функцию $\sigma(1 - x)$. Указанная процедура не повлияет на построенные разложения (9) и (10), поскольку их члены изменятся при этом на величины более высокого порядка малости при $\varepsilon \to 0$, чем любая положительная степень ε. За подправленными таким образом пограничными функциями сохраним старые обозначения.

Таким образом, теперь все функции $Q_i u$, $Q_i v$ равны нулю при $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$, а функции $\Pi_i u$, $\Pi_i v$, $P_i u$, $P_i v$ равны нулю при $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

3.1. Формулировка теоремы

Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ и $V_n(x,\varepsilon)$, $n = 0, 1, 2\ldots$, частичные суммы разложений (9) и (10):

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\bar{u}_i(x) + \Pi_i u(\xi) + \varepsilon^2 P_i u(\zeta) + Q_i u(\tilde{\xi})), \tag{60}$$

$$V_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\bar{v}_i(x) + \Pi_i v(\xi) + P_i v(\zeta) + Q_i v(\tilde{\xi})). \tag{61}$$

Из самого алгоритма построения этих сумм следует, что они удовлетворяют соотношениям

$$L_\varepsilon(U_n, V_n) := \varepsilon^2\left(\frac{d^2 U_n}{dx^2} - w(x)\frac{dU_n}{dx}\right) - F(U_n, V_n, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$M_\varepsilon(V_n, U_n) := \varepsilon^2\frac{dV_n}{dx} - f(U_n, V_n, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0;1],$$

$$U_n(0,\varepsilon) = u^0 + O(\varepsilon^{n+1}), \quad V_n(0,\varepsilon) = v^0, \quad U_n(1,\varepsilon) = u^1, \tag{62}$$

равенства (62) получены с учетом замечания.

Теорема 1. *Если выполнены условия* A1–A7*, то для любого n при достаточно малых* ε *задача* (3), (4) *имеет решение* $u = u_s(x,\varepsilon)$*,* $v = v_s(x,\varepsilon)$*, для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u_s(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad v_s(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0;1]. \tag{63}$$

3.2. О методе доказательства теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методом дифференциальных неравенств, многочисленные применения которого в нелинейных сингулярно возмущенных краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в [4], а в задачах для уравнений с частными производными – в [5]. В [6], [7] предложен способ построения нижних и верхних решений в сингулярно возмущенных задачах с пограничными и внутренними слоями на основе предварительно построенной формальной асимптотики (асимптотический метод дифференциальных неравенств). Именно такой подход используется в данной работе. В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (3), (4).

Определение 1. Две пары: функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\bar{U}(x,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,\varepsilon)$, непрерывных на отрезке $0 \le x \le 1$ и таких, что $\underline{U}$ и $\bar{U}$ непрерывно дифференцируемы по x дважды, а $\underline{V}$ и $\bar{V}$ – один раз на интервале $0 < x < 1$, называются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (3), (4), если они удовлетворяют следующим условиям.

1^0. $\underline{U}(x,\varepsilon) \le \bar{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon) \le \bar{V}(x,\varepsilon)$, $x \in [0;1]$ (условие упорядоченности).

2^0. $L_\varepsilon(\underline{U},v) := \varepsilon^2\left(\dfrac{d^2\underline{U}}{dx^2} - w(x)\dfrac{d\underline{U}}{dx}\right) - F(\underline{U},v,x,\varepsilon) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\bar{U},v)$

при

$$\underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \bar{V}(x,\varepsilon), \quad 0 < x < 1;$$

$$M_\varepsilon(\underline{V},u) := \varepsilon^2\frac{d\underline{V}}{dx} - f(u,\underline{V},x,\varepsilon) \le 0 \le M_\varepsilon(\bar{V},u)$$

при

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \bar{U}(x,\varepsilon), \quad 0 < x < 1.$$

3^0. $\underline{U}(0,\varepsilon) \le u^0 \le \bar{U}(0,\varepsilon)$, $\underline{V}(0,\varepsilon) \le v^0 \le \bar{V}(0,\varepsilon)$, $\underline{U}(1,\varepsilon) \le u^1 \le \bar{U}(1,\varepsilon)$.

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (3), (4), то эта задача имеет решение $u = u_s(x,\varepsilon)$, $v = v_s(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u_s(x,\varepsilon) \le \bar{U}(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \le v_s(x,\varepsilon) \le \bar{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \tag{64}$$

Если функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ – неубывающей функцией аргумента u в области

$$G_0 = \{(u,v,x,\varepsilon) : \underline{U}(x,\varepsilon) \le u \le \bar{U}(x,\varepsilon), \underline{V}(x,\varepsilon) \le v \le \bar{V}(x,\varepsilon), 0 \le x \le 1, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\} \tag{65}$$

(в таком случае говорят, что функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности в области G_0), то для выполнения условия 2^0 из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \ge 0 \ge L_\varepsilon(\bar{U},\bar{V}), \quad x \in (0;1), \tag{66}$$

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \le 0 \le M_\varepsilon(\bar{V},\bar{U}), \quad x \in (0;1). \tag{67}$$

Мы воспользуемся этим в пп. 3.4.1 и 3.4.2, где будет доказано, что нижнее и верхнее решения задачи (3), (4) удовлетворяют неравенствам (66) и (67); предварительно в п. 3.4 будет показано, что условия А6 и А7 обеспечивают квазимонотонность функций F и f.

3.3. Оценки производных функций F и f

Введем обозначение

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

где n – любое фиксированное число из множества $\{0;1;2;\ldots\}$. И такой же смысл придадим обозначениям $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$. Используя выражения (60) и (61) для U_n и V_n и оценку (50) для $P_0v(\zeta)$, представим $F_u(x,\varepsilon)$ в виде

$$F_u(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi) + Q_0 u(\tilde{\xi}), \bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi) + Q_0 v(\tilde{\xi}), x, 0) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon). \tag{68}$$

Если $x \in [0;1/2]$, то $Q_0 u(\tilde{\xi}) = 0$, $Q_0 v(\tilde{\xi}) = 0$ (см. замечание), поэтому

$$F_u(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), \bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi), x, 0) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1/2],$$

а так как

$$\bar{v}_0(x) + \Pi_0 v(\xi) = \varphi(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x) + O(\varepsilon),$$

то

$$F_u(x,\varepsilon) = \hat{F}_u(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1/2],$$

где

$$\hat{F}_u(x,\xi) := \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), \varphi(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x), x, 0). \tag{69}$$

В свою очередь, для $\hat{F}_u(x,\xi)$ нетрудно получить представление

$$\hat{F}_u(x,\xi) = F_u(\xi) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0) + O(\varepsilon), \tag{70}$$

где $F_u(\xi)$ определено в (36),

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_u(x,\varepsilon) &= \hat{F}_u(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon) = \\ &= F_u(\xi) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(0) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon), \quad x \in [0;1/2]. \end{aligned} \tag{71}$$

Формулы, аналогичные (68)–(71), имеют место для производных F_v, f_u, f_v.

Используя для $\hat{F}_v(x,\xi)$, $\hat{f}_u(x,\xi)$, $\hat{f}_v(x,\xi)$ формулы вида (69) и оценки (37), (38), нетрудно доказать, что для достаточно малых ε в силу условий A6, A7, A3 справедливы неравенства

$$\hat{F}_v(x,\xi) \le -c < 0, \quad \hat{f}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad \hat{f}_v(x,\xi) \le -c < 0, \quad x \in [0;1/2], \tag{72}$$

а в силу A4

$$\hat{g}_u(x,\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + \Pi_0 u(\xi), x) \ge c > 0, \quad x \in [0;1/2]. \tag{73}$$

Поскольку

$$\hat{g}_u(x,\xi) = \hat{F}_u(x,\xi) - \hat{F}_v(x,\xi)\hat{f}_u(x,\xi)\hat{f}_v^{-1}(x,\xi),$$

то из (72) и (73) следует, что

$$\hat{F}_u(x,\xi) \ge c > 0, \quad x \in [0;1/2]. \tag{74}$$

Если $x \in [1/2;1]$, то

$$\Pi_0 u(\xi) = 0, \quad \Pi_0 v(\xi) = 0, \quad P_0 v(\zeta) = 0,$$

поэтому

$$F_u(x,\varepsilon) = \tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}) + O(\varepsilon), \quad x \in [1/2;1], \tag{75}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}) := \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0(x) + Q_0 u(\tilde{\xi}), \varphi(\bar{u}_0(x) + Q_0 u(\tilde{\xi}), x), x, 0) = \\ = \tilde{F}_u(\tilde{\xi}) + \bar{F}_u(x) - \bar{F}_u(1) + O(\varepsilon), \quad x \in [1/2;1],\end{gathered} \tag{76}$$

$\tilde{F}_u(\tilde{\xi})$ определена в (58).

Формулы, аналогичные (75), (76), имеют место для производных F_v, f_u, f_v. Используя эти формулы, приходим к неравенствам, аналогичным (72)–(74):

$$\begin{gathered}\tilde{F}_v(x,\tilde{\xi}) \le -c < 0, \quad \tilde{f}_u(x,\tilde{\xi}) \ge c > 0, \quad \tilde{f}_v(x,\tilde{\xi}) \le -c < 0, \\ \tilde{g}_u(x,\tilde{\xi}) \ge c > 0, \quad \tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}) \ge c > 0, \quad x \in [1/2;1].\end{gathered} \tag{77}$$

3.4. Нижнее и верхнее решения задачи (3), (4)

Определим функции $\alpha(x,\xi,\tilde{\xi})$ и $\beta(x,\xi,\tilde{\xi})$ при $x \in [0;1]$ как решение системы линейных уравнений

$$F_u(x,\xi,\tilde{\xi})\alpha + F_v(x,\xi,\tilde{\xi})\beta = A, \quad f_u(x,\xi,\tilde{\xi})\alpha + f_v(x,\xi,\tilde{\xi})\beta = -A, \tag{78}$$

где

$$F_u(x,\xi,\tilde{\xi}) = \begin{cases}\hat{F}_u(x,\xi), & x \in [0;1/2], \\ \tilde{F}_u(x,\tilde{\xi}), & x \in [1/2;1],\end{cases}$$

и аналогичный смысл имеют другие коэффициенты системы (78), $A > 0$ – число, выбор которого уточним ниже. Определитель Δ этой системы можно записать в виде

$$\Delta = \begin{cases} \hat{f}_v(x,\xi)\hat{g}_u(x,\xi), & x \in [0;1/2], \\ \tilde{f}_v(x,\tilde{\xi})\tilde{g}_u(x,\tilde{\xi}), & x \in [1/2;1], \end{cases}$$

откуда в силу оценок (72), (73), (77) следует, что $\Delta \le -c < 0$, и, значит, система (78) имеет единственное решение

$$\alpha = (F_v + f_v)\Delta^{-1}A > 0, \quad \beta = -(F_u + f_u)\Delta^{-1}A > 0, \tag{79}$$

причем α и β можно сделать сколь угодно большими при достаточно большом A.

Нижнее и верхнее решения задачи (3), (4) построим в виде

$$\begin{gathered} \underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - (\alpha(x,\xi,\tilde{\xi}) + \gamma(\xi) + \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n+1} + G(\zeta)\varepsilon^{n+3}, \\ \underline{V}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) - (\beta(x,\xi,\tilde{\xi}) + \varphi_u(\xi)\gamma(\xi) + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) + H(\zeta))\varepsilon^{n+1}; \end{gathered} \tag{80}$$

$$\begin{gathered} \overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + (\alpha(x,\xi,\tilde{\xi}) + \gamma(\xi) + \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}))\varepsilon^{n+1} - G(\zeta)\varepsilon^{n+3}, \\ \overline{V}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + (\beta(x,\xi,\tilde{\xi}) + \varphi_u(\xi)\gamma(\xi) + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) + H(\zeta))\varepsilon^{n+1}, \end{gathered} \tag{81}$$

где $\alpha(x,\xi,\tilde{\xi})$ и $\beta(x,\xi,\tilde{\xi})$ определены в (79),

$$\begin{gathered} \varphi_u(\xi) := \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\overline{u}_0(0) + \Pi_0 u(\xi), 0) = -f_u(\xi)f_v^{-1}(\xi), \\ \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi}) := \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\overline{u}_0(1) + Q_0 u(\tilde{\xi}), 1) = -\tilde{f}_u(\tilde{\xi})\tilde{f}_v^{-1}(\tilde{\xi}), \end{gathered}$$

а функции $\gamma(\xi)$, $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ будут выбраны так, что

$$0 \le \gamma(\xi) \le cA\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0; \quad 0 \le \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) \le cA\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \le 0; \tag{82}$$

$$0 \le G(\zeta) \le cA\exp(-\kappa\zeta), \quad 0 \le H(\zeta) \le cA\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{83}$$

Кроме того, умножим эти функции на срезающие функции, в результате чего будут выполнены равенства

$$\gamma(\xi) = 0, \quad G(\zeta) = 0, \quad H(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [1/2;1], \quad \tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0;1/2].$$

Покажем, как выбрать функции $\gamma(\xi)$, $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ и число A, чтобы при достаточно малых ε функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ удовлетворяли требованиям к нижнему и верхнему решениям из определения 1.

Условие 1^0, т.е. условие упорядоченности, очевидно, выполнено при достаточно малых ε для любого выбора числа A и функций γ, $\tilde{\gamma}$, G, H, удовлетворяющих неравенствам (82) и (83).

Перейдем к условию 2^0. Заметим, что кривая

$$K_\varepsilon := \{(u,v,x) : u = U_n(x,\varepsilon),\ v = V_n(x,\varepsilon),\ x \in [0;1]\}$$

для достаточно малых ε расположена в сколь угодно малой окрестности кривой L, определенной в (8), в точках которой $\partial F/\partial v(u,v,x,0) < 0$ и $\partial f/\partial u(u,v,x,0) > 0$ (см. условия A6 и A7). Отсюда следует, что для достаточно малого ε_0 в области G_0, определенной в (65), функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности. Поэтому условие 2^0 из определения 1 будет выполнено, если справедливы неравенства (66) и (67). Доказательство справедливости этих неравенств проведем раздельно на отрезках [0; 1/2] и [1/2; 1].

3.4.1. Проверка выполнения условий 2^0 и 3^0 на отрезке [0; 1/2]. На этом отрезке

$$\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) = 0, \quad \alpha(x,\xi,\tilde{\xi}) = \hat{\alpha}(x,\xi), \quad \beta(x,\xi,\tilde{\xi}) = \hat{\beta}(x,\xi),$$

причем выражения для $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ получаются из (79) путем замены производных F_u, F_v, f_u, f_v соответственно на $\hat{F}_u(x,\xi)$ (см. (69) и (70)), $\hat{F}_v(x,\xi)$, $\hat{f}_u(x,\xi)$, $\hat{f}_v(x,\xi)$. Поэтому

$$\begin{gathered} L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) = L_\varepsilon(U_n,V_n) - \varepsilon^2\left(\frac{d^2\hat{\alpha}}{dx^2} - w(x)\frac{d\hat{\alpha}}{dx}\right)\varepsilon^{n+1} - \left(\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} - \varepsilon w(x)\frac{d\gamma}{d\xi}\right)\varepsilon^{n+1} + \\ + \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2G}{d\zeta^2} - w(x)\frac{dG}{d\zeta}\right)\varepsilon^{n+3} - \Big[F\Big(U_n - (\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n+1} + G\varepsilon^{n+3}, \\ V_n - (\beta + \varphi_u(\xi)\gamma + H)\varepsilon^{n+1}, x, \varepsilon\Big) - F(U_n,V_n,x,\varepsilon)\Big]. \end{gathered} \tag{84}$$

Функцию $\varepsilon^2(d^2\hat{\alpha}/dx^2)$ представим в виде

$$\varepsilon^2\frac{d^2\hat{\alpha}}{dx^2} = \frac{\partial^2\hat{\alpha}}{\partial\xi^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2\hat{\alpha}}{\partial x\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{\alpha}}{\partial x^2} = Aq(\xi) + O(A)\varepsilon, \tag{85}$$

где $q(\xi)$ – известная функция, имеющая оценку

$$|q(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0,$$

а выражение в квадратных скобках в правой части (84) преобразуем, используя для производных F_u и F_v формулы вида (71):

$$\begin{gathered} -[\cdots] = F_u(x,\varepsilon)((\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n+1} - G\varepsilon^{n+3}) + F_v(x,\varepsilon)(\hat{\beta} + \varphi_u(\xi)\gamma + H)\varepsilon^{n+1} + \\ + O(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 + \gamma^2 + G^2 + H^2)\varepsilon^{2n+2} = (\hat{F}_u(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + \\ + O(\varepsilon))\hat{\alpha}\varepsilon^{n+1} + (F_u(\xi) + (\overline{F}_u(x) - \overline{F}_u(0)) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\times \\ \times\gamma\varepsilon^{n+1} - F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n+3} + (\hat{F}_v(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\hat{\beta}\varepsilon^{n+1} + \\ + (F_v(\xi) + (\overline{F}_v(x) - \overline{F}_v(0)) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\varphi_u(\xi)\gamma\varepsilon^{n+1} + \\ + F_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2} = A\varepsilon^{n+1} + \\ + O(A\exp(-\kappa\zeta))\varepsilon^{n+1} + O(A)\varepsilon^{n+2} + g_u(\xi)\gamma\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}. \end{gathered} \tag{86}$$

Последнее равенство получено с учетом того, что

$$\hat{F}_u(x,\xi)\hat{\alpha} + \hat{F}_v(x,\xi)\hat{\beta} = A, \quad F_u(\xi) + F_v(\xi)\varphi_u(\xi) = g_u(\xi);$$

$$\hat{\alpha} = O(A), \quad \hat{\beta} = O(A), \quad G = O(A), \quad H = O(A\exp(-\kappa\zeta)),$$

$$(\overline{F}_u(x) - \overline{F}_u(0))\gamma(\xi) + (\overline{F}_v(x) - \overline{F}_v(0))\varphi_u(\xi)\gamma(\xi) = O(\varepsilon\xi)\gamma(\xi) = O(A)\cdot\varepsilon$$

в силу оценок (83) и (82) для $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ и $\gamma(\xi)$ (эти оценки будут обоснованы ниже).

Определим теперь функцию $\gamma(\xi)$ как решение задачи

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = g_u(\xi)\gamma - Ar(\xi), \quad \xi \geq 0,$$

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(\infty) = 0,$$

где $r(\xi) = q(\xi) + \psi(\xi)$, $q(\xi)$ – функция из (85), а в качестве $\psi(\xi)$ возьмем какую-нибудь функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$|q(\xi)| \leq \psi(\xi) \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0.$$

Тогда получим

$$\gamma(\xi) = -A\Phi(\xi)\int_0^{\xi}\Phi^{-2}(s)\int_{\infty}^{s}\Phi(t)r(t)dtds,$$

где $\Phi(\xi) = d\Pi_0 u/d\xi(\xi)$. Отсюда следует оценка (82) для $\gamma(\xi)$.

Второе слагаемое в правой части (86) имеет оценку

$$\left|O(A\exp(-\kappa\zeta))\varepsilon^{n+1}\right| \leq cA\exp(-\kappa\zeta)\cdot\varepsilon^{n+1}.$$

Определим функцию $G(\zeta)$ как решение задачи

$$\frac{d^2G}{d\zeta^2} = cA\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \geq 0, \quad G(\infty) = 0.$$

Тогда

$$G(\zeta) = c\kappa^{-2}A\exp(-\kappa\zeta),$$

и, следовательно, для $G(\zeta)$ имеет место оценка (83).

При указанном выборе функций $\gamma(\xi)$, $G(\zeta)$ и с учетом равенств (85) и (86) из (84) получается неравенство

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \geq O(\varepsilon^{n+1}) + A\varepsilon^{n+1} + A\psi(\xi)\varepsilon^{n+1} + O(A)\varepsilon^{n+2} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}, \quad x \in [0;1/2], \tag{87}$$

где первое слагаемое в правой части не зависит от A, а третье слагаемое неотрицательное.

Поэтому для достаточно большого A и достаточно малых ε второе слагаемое обеспечивает выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) > 0, \quad x \in [0;1/2].$$

Рассмотрим теперь выражение для $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ на отрезке $[0;1/2]$:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = M_\varepsilon(V_n,U_n) - \varepsilon^2\frac{d\hat{\beta}}{dx}\varepsilon^{n+1} - \varepsilon\frac{d}{d\xi}(\varphi_u\gamma)\varepsilon^{n+1} - \frac{dH}{d\zeta}\varepsilon^{n+1} - \\ - [f(U_n - (\hat{\alpha}+\gamma)\varepsilon^{n+1} + G\varepsilon^{n+3}, V_n - (\hat{\beta}+\varphi_u\gamma + H)\varepsilon^{n+1}, x, \varepsilon) - f(U_n,V_n,x,\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{88}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (88) является величиной порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, не зависящей от A, сумма двух следующих слагаемых – величина порядка $O(A)\varepsilon^{n+2}$, а выражение в квадратных скобках преобразуем аналогично тому, как это было сделано в равенствах (86):

$$
\begin{gathered}
-[\cdots] = f_u(x,\varepsilon)((\hat\alpha+\gamma)\varepsilon^{n+1} - G\varepsilon^{n+3}) + f_v(x,\varepsilon)(\hat\beta + \varphi_u(\xi)\gamma + H)\varepsilon^{n+1} + O(\hat\alpha^2+\hat\beta^2+\gamma^2+G^2+H^2)\varepsilon^{2n+2} = \\
= (\hat f_u(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\hat\alpha\varepsilon^{n+1} + (f_u(\xi) + (\bar f_u(x) - \bar f_u(0)) + O(\exp(-\kappa\zeta) + \\
+ O(\varepsilon))\gamma\varepsilon^{n+1} - f_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n+3} + (\hat f_v(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\hat\beta\varepsilon^{n+1} + (f_v(\xi) + (\bar f_v(x) - \bar f_v(0)) + \\
+ O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon))\varphi_u(\xi)\gamma\varepsilon^{n+1} + f_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2} = -A\varepsilon^{n+1} + O(A\exp(-\kappa\zeta))\varepsilon^{n+1} + \\
+ O(A)\varepsilon^{n+2} + f_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}.
\end{gathered}
$$

Последнее равенство получено с учетом того, что

$$\hat f_u(x,\xi)\hat\alpha + \hat f_v(x,\xi)\hat\beta = -A, \quad f_u(\xi) + f_v(\xi)\varphi_u(\xi) = 0; \quad \hat\alpha = O(A), \quad \hat\beta = O(A);$$

$$(\bar f_u(x) - \bar f_u(0))\gamma(\xi) + (\bar f_v(x) - \bar f_v(0))\varphi_u(\xi)\gamma(\xi) = O(\varepsilon\xi)\gamma(\xi) = O(A)\varepsilon$$

в силу оценки (82) для $\gamma(\xi)$. Равенство (88) можно теперь записать в виде

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = O(\varepsilon^{n+1}) + O(A)\varepsilon^{n+2} + \left[-\frac{dH}{d\zeta} + f_v(x,\varepsilon)H + O(A\exp(-\kappa\zeta))\right]\varepsilon^{n+1} - A\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}. \quad (89)$$

Так как

$$f_v(x,\varepsilon) = \hat f_v(x,\xi) + O(\exp(-\kappa\zeta)) + O(\varepsilon) \le k(\zeta) := -\kappa_1 + \kappa_2\exp(-\kappa_3\zeta),$$

то

$$f_v(x,\varepsilon)H + O(A\exp(-\kappa\zeta)) \le k(\zeta)H + c_1A\exp(-\kappa_3\zeta).$$

Определим функцию $H(\zeta)$ как решение задачи

$$\frac{dH}{d\zeta} = k(\zeta)H + c_1A\exp(-\kappa_3\zeta), \quad \zeta \ge 0, \quad H(0) = 0.$$

Тогда

$$H(\zeta) = \int_0^\zeta \exp\left(\int_s^\zeta k(t)dt\right)c_1A\exp(-\kappa_3 s)ds,$$

откуда следует, что

$$0 \le H(\zeta) \le cA\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0,$$

и, следовательно, для $H(\zeta)$ верна оценка (83).

При указанном выборе функции $H(\zeta)$ из (89) получаем неравенство

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \le O(\varepsilon^{n+1}) + O(A)\varepsilon^{n+2} - A\varepsilon^{n+1} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}.$$

Так как первое слагаемое в правой части не зависит от A, то для достаточно большого A и достаточно малых ε третье слагаемое будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) < 0, \quad x \in [0;1/2].$$

Таким образом, для достаточно большого A и достаточно малых ε функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, определенные в (80), удовлетворяют при $x \in [0;1/2]$ неравенствам для нижнего решения из условия 2^0 определения 1.

Аналогично доказывается, что функции $\bar{U}(x,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,\varepsilon)$, определенные в (81), удовлетворяют при $x \in [0;1/2]$ неравенствам для верхнего решения из условия 2^0 определения 1.

Убедимся в том, что $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\bar{U}$, $\bar{V}$ удовлетворяют неравенствам из условия 3^0 определения 1, относящимся к точке $x = 0$. Используя первое равенство в (62), получаем

$$\underline{U}(0,\varepsilon) = U_n(0,\varepsilon) - \hat{\alpha}(0,0)\varepsilon^{n+1} + G(0)\varepsilon^{n+3} = u^0 + O(\varepsilon^{n+1}) - \hat{\alpha}(0,0)\varepsilon^{n+1} + G(0)\varepsilon^{n+3}. \tag{90}$$

Так как второе слагаемое в правой части (90) не зависит от A, а $\hat{\alpha}(0,0)$ можно сделать сколь угодно большим, взяв достаточно большое A, то при достаточно большом A и достаточно малых ε из (90) следует неравенство $\underline{U}(0,\varepsilon) < u^0$.

Таким же образом проверяется выполнение остальных неравенств из условия 3^0, относящихся к точке $x = 0$.

3.4.2. Проверка выполнения условий 2^0 и 3^0 на отрезке $[1/2;1]$. На этом отрезке $\gamma(\xi) = 0$, $G(\zeta) = 0$, $H(\zeta) = 0$, $\alpha(x,\xi,\tilde{\xi}) = \tilde{\alpha}(x,\tilde{\xi})$, $\beta(x,\xi,\tilde{\xi}) = \tilde{\beta}(x,\tilde{\xi})$, причем выражения $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ получаются из (79) путем замены производных F_u, F_v, f_u, f_v соответственно на $\tilde{F}_u(x,\tilde{\xi})$, $\tilde{F}_v(x,\tilde{\xi})$, $\tilde{f}_u(x,\tilde{\xi})$, $\tilde{f}_v(x,\tilde{\xi})$ (см. (76)). Поэтому

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) = L_\varepsilon(U_n,V_n) - \varepsilon^2\left(\frac{d^2\tilde{\alpha}}{dx^2} - w(x)\frac{d\tilde{\alpha}}{dx}\right)\varepsilon^{n+1} - \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{d\tilde{\xi}^2} - \varepsilon w(x)\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{\xi}}\right)^{n+1} - [F(U_n - (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})\varepsilon^{n+1},$$
$$V_n - (\tilde{\beta} + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+1}, x, \varepsilon) - F(U_n, V_n, x, \varepsilon)].$$

Преобразуем это выражение аналогично тому, как это делалось на промежутке $[0;1/2]$. В частности, слагаемое $\varepsilon^2(d^2\tilde{\alpha}/dx^2)$ представляем в виде

$$\varepsilon^2\frac{d^2\tilde{\alpha}}{dx^2} = A\tilde{q}(\tilde{\xi}) + O(A)\varepsilon,$$

где $\tilde{q}(\tilde{\xi})$ имеет оценку

$$\left|\tilde{q}(\tilde{\xi})\right| \le c\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \le 0,$$

а функцию $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$ определяем как решение задачи

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{d\tilde{\xi}^2} = \tilde{g}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma} - A\tilde{r}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} < 0, \quad \tilde{\gamma}(0) = 0, \quad \tilde{\gamma}(-\infty) = 0,$$

где $\tilde{r}(\tilde{\xi}) = \tilde{q}(\tilde{\xi}) + \tilde{\psi}(\tilde{\xi})$, $\tilde{\psi}(\tilde{\xi})$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\left|\tilde{q}(\tilde{\xi})\right| \le \tilde{\psi}(\tilde{\xi}) \le c\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \le 0.$$

Тогда

$$\tilde{\gamma}(\tilde{\xi}) = -A\Psi(\tilde{\xi})\int_0^{\tilde{\xi}}\Psi^{-2}(s)\int_{-\infty}^{s}\Psi(t)\tilde{r}(t)dt,$$

где $\Psi(\tilde{\xi}) = dQ_o u/d\tilde{\xi}(\tilde{\xi})$, откуда следует оценка (82) для $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$.

Аналогично (87), используя для производных F_u и F_v формулы вида (75) и (76), получаем неравенство

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \geq O(\varepsilon^{n+1}) + A\varepsilon^{n+1} + A\tilde{\psi}(\xi) + O(A)\varepsilon^{n+2} + O(A^2)\varepsilon^{2n+2}, \quad x \in [1/2;1],$$

и, следовательно, для достаточно большого A и достаточно малых ε имеем неравенство

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) > 0, \quad x \in [1/2;1].$$

Для $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ на отрезке $[1/2;1]$ получается выражение

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = M_\varepsilon(V_n,U_n) - \varepsilon^2 \frac{d\tilde{\beta}}{dx}\varepsilon^{n+1} - \varepsilon\frac{d}{d\xi}(\tilde{\varphi}_u(\xi)\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+1} -$$
$$- [f(U_n - (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+1}, V_n - (\tilde{\beta} + \tilde{\varphi}_u(\xi)\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+1}, x, \varepsilon) - f(U_n, V_n, x, \varepsilon)].$$

Преобразовав это выражение таким же образом, как в пп. 3.4.1, приходим к неравенству

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) < 0, \quad x \in [1/2;1].$$

Аналогично проверяется выполнение неравенств

$$L_\varepsilon(\bar{U},\bar{V}) < 0, \quad M_\varepsilon(\bar{V},\bar{U}) > 0, \quad x \in [1/2;1]$$

для достаточно большого A и достаточно малых ε.

В граничной точке $x = 1$ имеем равенство

$$\underline{U}(1,\varepsilon) = U_n(1,\varepsilon) - \tilde{\alpha}(1,0)\varepsilon^{n+1} = u^1 - \tilde{\alpha}(1,0)\varepsilon^{n+1},$$

откуда следует неравенство $\underline{U}(1,\varepsilon) < u^1$. Столь же просто проверяется справедливость неравенства $\bar{U}(1,\varepsilon) > u^1$. Тем самым условие 3^0 из определения 1 выполнено.

Итак, пары функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\bar{U}(x,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,\varepsilon)$, определенные равенствами (80) и (81), являются нижним и верхним решениями задачи (3), (4) для достаточно большого A и достаточно малых ε.

3.5. Завершение доказательства теоремы

Из существования упорядоченных нижнего и верхнего решений задачи (3), (4) следует, что эта задача имеет для достаточно малых ε решение $u = u_s(x,\varepsilon)$, $v = v_s(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам (64). В свою очередь из этих неравенств, учитывая вид (80) и (81) нижнего и верхнего решений, получаем асимптотические равенства (63).

Тем самым теорема 1 доказана.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ

Как уже было сказано в п. 1.1, решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ задачи (3), (4) является стационарным решением системы (1). Рассмотрим вопросы об устойчивости этого решения при $t \to \infty$ и его области притяжения. Уточним понятие области притяжения.

Зададим для решения системы (1) начальные условия

$$u(x,0,\varepsilon) = u_0(x,\varepsilon), \quad v(x,0,\varepsilon) = v_0(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1], \tag{91}$$

где $u_0(x,\varepsilon)$ и $v_0(x,\varepsilon)$ – гладкие функции, и краевые условия

$$\begin{gathered} u(0,t,\varepsilon) = u^0 + (u_0(0,\varepsilon) - u^0)E(t,\varepsilon), \quad v(0,t,\varepsilon) = v^0 + (v_0(0,\varepsilon) - v^0)E(t,\varepsilon), \\ u(1,t,\varepsilon) = u^1 + (u_0(1,\varepsilon) - u^1)E(t,\varepsilon), \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{92}$$

где $E(t,\varepsilon)$ – гладкая монотонная функция, удовлетворяющая условиям

$$E(0,\varepsilon) = 1, \quad E(\infty,\varepsilon) = 0. \tag{93}$$

В силу первого равенства из (93) краевые условия (92) согласованы до непрерывности с начальными условиями (91), а в силу второго равенства из (93) краевые условия (92) переходят при $t \to \infty$ в краевые условия (4).

Кроме того, потребуем, чтобы функции $u_0(x,\varepsilon)$ и $v_0(x,\varepsilon)$ удовлетворяли в точке $(x = 0, t = 0)$ условию согласования первого порядка для второго уравнения системы (1), т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\varepsilon^2\left[(v_0(0,\varepsilon) - v^0)\frac{dE}{dt}(0,\varepsilon) + w(0)\frac{dv_0}{dx}(0,\varepsilon)\right] - w(0)f\left(u_0(0,\varepsilon), v_0(0,\varepsilon), 0, \varepsilon\right) = 0. \tag{94}$$

Оно получается из второго уравнения системы (1), взятого в точке $(x = 0, t = 0)$, с использованием выражения для $v(0,t,\varepsilon)$ из (92) и выражения для $v(x,0,\varepsilon)$ из (91).

Условие (94) является необходимым для существования гладкого решения задачи (1), (91), (92), в противном случае производные $\partial v/\partial x$ и $\partial v/\partial t$ будут разрывными на характеристике второго уравнения системы (1), выходящей из точки $(x = 0, t = 0)$. В частном случае, когда $u_0(0,\varepsilon) = u^0$, $v_0(0,\varepsilon) = v^0$, условие (94) принимает простой вид:

$$\frac{dv_0}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{dv_s}{dx}(0,\varepsilon).$$

Определение 2. Если существует число $\varepsilon_0 > 0$ и функция $E(t,\varepsilon)$, $t \ge 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ начально-краевая задача (1), (91), (92), где функции $u_0(x,\varepsilon)$ и $v_0(x,\varepsilon)$ удовлетворяют условию (94), имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$, удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon), \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1], \tag{95}$$

то будем говорить, что при достаточно малых ε пара функций $u_0(x,\varepsilon)$, $v_0(x,\varepsilon)$ принадлежит области притяжения стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$.

Возьмем в качестве $E(t,\varepsilon)$ функцию

$$E(t,\varepsilon) = \exp(-pt/\varepsilon^2), \quad t \ge 0, \tag{96}$$

где p – не зависящее от ε положительное число, выбор которого уточним ниже, а функции $u_0(x,\varepsilon)$ и $v_0(x,\varepsilon)$ возьмем в виде

$$u_0(x,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon) + \tilde{u}(x,\varepsilon), \quad v_0(x,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon) + \tilde{v}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1].$$

Тогда краевые условия (92) запишутся так:

$$\begin{gathered} u(0,t,\varepsilon) = u^0 + \tilde{u}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \quad v(0,t,\varepsilon) = v^0 + \tilde{v}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \\ u(1,t,\varepsilon) = u^1 + \tilde{u}(1,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{97}$$

а условие (94) принимает вид

$$-p\tilde{v}(0,\varepsilon) + w(0)[f(u^0, v^0, 0, \varepsilon) - f(u^0 + \tilde{u}(0,\varepsilon), v^0 + \tilde{v}(0,\varepsilon), 0, \varepsilon)] + \varepsilon^2 w(0)\frac{d\tilde{v}}{dx}(0,\varepsilon) = 0, \tag{98}$$

в частности, если $\tilde{u}(0,\varepsilon) = 0$, $\tilde{v}(0,\varepsilon) = 0$, то (98) выполняется в случае $d\tilde{v}/dx(0,\varepsilon) = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A1–A7. *Тогда существуют не зависящие от* ε *положительные числа* m_0, c_0, C_0 *такие, что если*

$$|\tilde{u}(x,\varepsilon)| \le c_0 m, \quad |\tilde{v}(x,\varepsilon)| \le c_0 m, \quad x \in [0;1], \tag{99}$$

где $m \in (0, m_0)$, *и выполнено условие* (98), *то для достаточно малых* ε *и* p (*зависящих, вообще говоря, от* m), *существует решение* $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ *задачи* (1), (91), (97), *и справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} |u(x,t,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)| \le C_0 m E(t,\varepsilon), \quad |v(x,t,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)| \le C_0 m E(t,\varepsilon), \\ (x,t) \in \bar{D} = (0 \le x \le 1) \times (t \ge 0). \end{gathered} \tag{100}$$

Доказательство. Снова воспользуемся методом дифференциальных неравенств. С этой целью дадим определение нижнего и верхнего решений для задачи (1), (91), (97).

Определение 3. Две пары функций $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,t,\varepsilon)$ и $\bar{U}(x,t,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,t,\varepsilon)$, непрерывных в области $\bar{D}$, и таких, что $\underline{U}$ и $\bar{U}$ непрерывно дифференцируемы дважды по x и один раз по t в области $D = (0 < x < 1) \times (t > 0)$, а $\underline{V}$ и $\bar{V}$ непрерывно дифференцируемы по x и t в области D, называются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (91), (97), если они удовлетворяют следующим условиям:

$$1^0. \quad \underline{U}(x,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,t,\varepsilon) \le \bar{V}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D}$$

(условие упорядоченности);

$$2^0. \quad \tilde{L}_\varepsilon(\underline{U}, v) := \varepsilon^2\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + w(x)\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial x^2}\right) + F(\underline{U}, v, x, \varepsilon) \le 0 \le \tilde{L}_\varepsilon(\bar{U}, v)$$

при

$$\underline{V}(x,t,\varepsilon) \le v \le \bar{V}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D;$$

$$\tilde{M}_\varepsilon(\underline{V}, u) := \varepsilon^2\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + w(x)\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right) - w(x) f(u, \underline{V}, x, \varepsilon) \le 0 \le \tilde{M}_\varepsilon(\bar{V}, u)$$

при

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D;$$

$$3^0. \quad \underline{U}(x,0,\varepsilon) \le u_s(x,\varepsilon) + \tilde{u}(x,\varepsilon) \le \bar{U}(x,0,\varepsilon),$$

$$\underline{V}(x,0,\varepsilon) \le v_s(x,\varepsilon) + \tilde{v}(x,\varepsilon) \le \bar{V}(x,0,\varepsilon), \quad x \in [0;1];$$

$$4^0. \quad \underline{U}(0,t,\varepsilon) \le u^0 + \tilde{u}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon) \le \bar{U}(0,t,\varepsilon),$$

$$\underline{V}(0,t,\varepsilon) \le v^0 + \tilde{v}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon) \le \bar{V}(0,t,\varepsilon),$$

$$\underline{U}(1,t,\varepsilon) \le u^1 + \tilde{u}(1,\varepsilon)E(t,\varepsilon) \le \bar{U}(1,t,\varepsilon), \quad t \ge 0.$$

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (91), (97), то эта задача имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,t,\varepsilon) \le v(x,t,\varepsilon) \le \bar{V}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D}. \tag{101}$$

Чтобы построить нижнее и верхнее решения задачи (1), (91), (97), определим функции $\alpha_m(x,\xi,\tilde{\xi})$ и $\beta_m(x,\xi,\tilde{\xi})$ как решение системы (78), в которой число A заменено на число $m > 0$, выбор которого уточним ниже. Функции α_m и β_m выражаются формулами (79) с заменой A на m, откуда следуют неравенства

$$c_1 m \le \alpha_m \le c_2 m, \quad c_1 m \le \beta_m \le c_2 m, \quad x \in [0;1], \tag{102}$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные числа, не зависящие от m и ε. Определим далее функции $\gamma_m(\xi)$, $G_m(\zeta)$, $H_m(\zeta)$ и $\tilde{\gamma}_m(\tilde{\xi})$ таким же образом, как в пп. 3.4.1 и 3.4.2 были определены функции $\gamma(\xi)$, $G(\xi)$, $H(\zeta)$ и $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$, заменив при этом число A на число m. Для этих функций справедливы оценки вида (82) и (83) с заменой A на m.

Нижнее и верхнее решения задачи (1), (91), (97) возьмем в виде, аналогичном (80) и (81):

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon) - \chi_1(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,t,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon) - \chi_2(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta)E(t,\varepsilon), \tag{103}$$

$$\bar{U}(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon) + \chi_1(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \quad \bar{V}(x,t,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon) + \chi_2(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta)E(t,\varepsilon), \tag{104}$$

где

$$\chi_1(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta,\varepsilon) = \alpha_m(x,\xi,\tilde{\xi}) + \gamma_m(\xi) + \tilde{\gamma}_m(\tilde{\xi}) - \varepsilon^2 G_m(\zeta),$$

$$\chi_2(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta) = \beta_m(x,\xi,\tilde{\xi}) + \varphi_u(\xi)\gamma_m(\xi) + \tilde{\varphi}_u(\tilde{\xi})\tilde{\gamma}_m(\xi) + H_m(\zeta).$$

В силу оценок для слагаемых, входящих в состав функций χ_1 и χ_2, эти функции не отрицательны, что обеспечивает выполнение условия 1^0 из определения 3, и удовлетворяют неравенствам

$$c_0 m < \chi_1 \le C_0 m, \quad c_0 m < \chi_2 \le C_0 m, \quad x \in [0;1], \tag{105}$$

где в качестве c_0 можно взять любое число из интервала $0 < c_0 < c_1$, c_1 — число из неравенств (102), а число C_0 также не зависит от m и от ε для достаточно малых ε. Поэтому для достаточно малых m и ε в силу условий A6 и A7 функции F и f будут удовлетворять условию квазимонотонности в области

$$G_1 = \{(u,v,x,t,\varepsilon) : \underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \underline{V}(x,t,\varepsilon) \le v \le \bar{V}(x,t,\varepsilon), (x,t) \in \bar{D}, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\},$$

и, следовательно, для выполнения условия 2^0 из определения 3 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\tilde{L}_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \le 0 \le \tilde{L}_\varepsilon(\bar{U},\bar{V}), \quad \tilde{M}_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \le 0 \le \tilde{M}_\varepsilon(\bar{V},\bar{U}), \quad (x,t) \in D. \tag{106}$$

Проверка выполнения этих неравенств проводится аналогично тому, как это было сделано в пп. 3.4.1 и 3.4.2. Рассмотрим, например, выражение для $\tilde{L}_\varepsilon(\underline{U},\underline{V})$ в области $D_1 = \{(x,t) : 0 < x \le 1/2,\ t > 0\}$:

$$\begin{gathered}\tilde{L}_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) = -L_\varepsilon(u_s,v_s) + \left(p\chi_1 - \varepsilon^2 w(x)\frac{d\chi_1}{dx} + \varepsilon^2\frac{d^2\chi_1}{dx^2}\right)E(t,\varepsilon) + \\ + [F(u_s - \chi_1 E(t,\varepsilon), v_s - \chi_2 E(t,\varepsilon), x, \varepsilon) - F(u_s,v_s,x,\varepsilon)].\end{gathered} \tag{107}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (107) равно нулю, а следующие слагаемые, используя вид функций χ_1 и χ_2, преобразуем таким же образом, как это делалось в пп. 3.4.1, в частности, выражение в квадратных скобках запишем в виде

$$F(u_s - \chi_1 E, v_s - \chi_2 E, x, \varepsilon) - F(u_s, v_s, x, \varepsilon) = -F_u^s(x,\varepsilon)\chi_1 E - F_v^s(x,\varepsilon)\chi_2 E + O(\chi_1^2 + \chi_2^2)E^2,$$

где

$$F_u^s(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_s, v_s, x, \varepsilon), \quad F_v^s(x,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_s, v_s, x, \varepsilon).$$

Для производных $F_u^s(x,\varepsilon)$ и $F_v^s(x,\varepsilon)$ имеют место представления такого же вида, как (71). Используя их, а также первое уравнение системы относительно α_m и β_m, от (107) приходим к неравенству

$$\tilde{L}_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) \le -[m + m\psi(\xi) + O(m)(p+\varepsilon) + O(m^2)]E(t,\varepsilon), \tag{108}$$

где $\psi(\xi)$ – та же неотрицательная функция, которая входит в уравнение для $\gamma(\xi)$ в пп. 3.4.1.

Пусть $m_0 > 0$ – такое число, для которого

$$\left|O(m^2)\right| < \frac{m}{2} \quad \text{при} \quad 0 < m < m_0,$$

где $O(m^2)$ – последнее слагаемое в квадратных скобках в правой части неравенства (108). Тогда для любого $m \in (0, m_0)$ при достаточно малых p и ε первое слагаемое в квадратных скобках обеспечит положительность всей суммы в квадратных скобках, и, следовательно, выполнение неравенства

$$\tilde{L}_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) < 0, \quad (x,t) \in D_1.$$

Аналогично доказывается, что если $m_0 > 0$ достаточно мало, то для любого $m \in (0, m_0)$ при достаточно малых p и ε в области D_1 выполняются остальные неравенства из (106) и также выполняются все неравенства (106) в области

$$D_2 = \{(x,t) : 1/2 \le x < 1, t > 0\}.$$

Итак, существует число $m_0 > 0$ такое, что для любого $m \in (0, m_0)$ при достаточно малых p и ε выполняется условие 2^0 из определения 3.

Проверим выполнение условий 3^0 и 4^0 из определения 3.

Так как $\underline{U}(x,0,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon) - \chi_1(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta,\varepsilon) < u_s(x,\varepsilon) - c_0 m$ (см. (105)), а $u_s(x,\varepsilon) + \tilde{u}(x,\varepsilon) \ge \ge u_s(x,\varepsilon) - c_0 m$ (см. (99)), то

$$\underline{U}(x,0,\varepsilon) < u_s(x,\varepsilon) + \tilde{u}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1],$$

т.е. выполнено первое из неравенств в условии 3^0. Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств в условии 3^0.

Далее,

$$\underline{U}(0,t,\varepsilon) = u_s(0,\varepsilon) - \chi_1(0,0,-\varepsilon^{-1},0,\varepsilon)E(t,\varepsilon),$$

поэтому в силу равенства $u_s(0,\varepsilon) = u^0$ и неравенства $-\chi_1 < -c_0 m$ (см. (105)), получаем неравенство

$$\underline{U}(0,t,\varepsilon) < u^0 - c_0 m E(t,\varepsilon),$$

а так как $u^0 + \tilde{u}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon) \geq u^0 - c_0 m E(t,\varepsilon)$ (см. (99)), то

$$\underline{U}(0,t,\varepsilon) < u^0 + \tilde{u}(0,\varepsilon)E(t,\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

т.е. выполнено первое из неравенств в условии 4^0. Аналогично проверяется, что остальные неравенства в условии 4^0 также выполнены.

Таким образом, для любого $m \in (0, m_0)$ при достаточно малых p и ε пары функций $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,t,\varepsilon)$ и $\bar{U}(x,t,\varepsilon)$, $\bar{V}(x,t,\varepsilon)$, определенные формулами (103) и (104), являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (91), (97). Отсюда следует, что существует решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам (101). Из этих неравенств, используя вид (103) и (104) нижнего и верхнего решений, получаем неравенства

$$|u(x,t,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)| \leq \chi_1(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta,\varepsilon)E(t,\varepsilon),$$
$$|v(x,t,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)| \leq \chi_2(x,\xi,\tilde{\xi},\zeta)E(t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \bar{D},$$

а отсюда в силу (105) следуют неравенства (100).

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Стационарное решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ системы (1) является асимптотически устойчивым при $t \to \infty$.

В самом деле, для произвольно заданного числа $\eta > 0$ возьмем число $m \in (0, m_0)$ такое, что $C_0 m < \eta$. Тогда если $|\tilde{u}(x,\varepsilon)| < \delta = c_0 m$, $|\tilde{v}(x,\varepsilon)| < \delta$, $x \in [0;1]$, и выполнено условие (98), то решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (91), (97) существует и удовлетворяет неравенствам (100), откуда следует, что

$$|u(x,t,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)| \leq \eta, \quad |v(x,t,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)| \leq \eta, \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Кроме того, из неравенств (100), учитывая вид (96) функции $E(t,\varepsilon)$, получаем предельные равенства (95). Это и означает, что стационарное решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ асимптотически устойчиво при $t \to \infty$.

Следствие 2. Любая пара гладких функций

$$u_0(x,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon) + \tilde{u}(x,\varepsilon), \quad v_0(x,\varepsilon) = v_s(x,\varepsilon) + \tilde{v}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1],$$

удовлетворяющих условию (98) и неравенствам

$$|\tilde{u}(x,\varepsilon)| < c_0 m, \quad |\tilde{v}(x,\varepsilon)| < c_0 m, \quad x \in [0;1],$$

где $m \in (0, m_0)$, c_0 и m_0 – числа, определенные в теореме 2, при достаточно малых ε принадлежит области притяжения стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Отметим, что решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ начально-краевой задачи (1), (91), (97) становится сколь угодно близким к стационарному решению $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ задачи (3), (4) за короткое время порядка $O(\varepsilon^{2-\sigma})$, где σ – произвольно малое положительное число, не зависящее от ε. В самом деле, если $t \geq \varepsilon^{2-\sigma}$, то из неравенств (100) следуют оценки

$$|u(x,t,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)| \leq C_0 m \exp(-p/\varepsilon^{\sigma}) = o(\varepsilon^N)$$

и также $|v(x,t,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)| = o(\varepsilon^N)$ для любого N, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq \varepsilon^{2-\sigma}$.

2. Асимптотика решения стационарной задачи (3), (4) построена при условии, что уравнения (6) и (7) имеют простые корни (см. условие A2). Представляет интерес рассмотрение задачи (3), (4) в том случае, когда уравнение (6) имеет кратный корень относительно v кратности 2 или 3. Изучение ряда сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения (см. [8]–[10]) показало, что в этом случае пограничные слои оказываются многозонными, что приводит к необходимости существенной модификации алгоритма построения погранслойной части асимптотики решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сб. 2016. Т. 207. № 8. С. 73–100.
2. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика погранслойного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник (в печати).
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990. 208 с.
4. *Чанг К., Хауэс Ф.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.
5. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
6. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New-York–London: Plenum Press, 1992.
7. *Нефёдов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 7. С 1132–1139.
8. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 68–80.
9. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с кратным корнем вырожденного уравнения // Нелинейные колебания. 2018. Т. 21. № 1. С. 6–28.
10. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Известия РАН. Серия матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 21–44.