УДК 533.19.626

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА С ОСОБЕННОСТЯМИ[1)]

© 2019 г. А. Ф. Албу[1,2], Ю. Г. Евтушенко[1,2], В. И. Зубов[1,2,*]

([1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия;

[2] 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия)

**e-mail: zubov@ccas.ru*

Поступила в редакцию 28.03.2019 г.
Переработанный вариант 29.03.2019 г.
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Предлагается новый способ вычисления первой вариации функционала при наличии в рассматриваемой области или на ее границе особых точек. В отличие от способов, предложенных ранее, данный способ более прост, применим для более широкого класса уравнений, описывающих оптимизируемый процесс, и для более широкого класса особенностей уравнений в области или на ее границе. Библ. 16. Фиг. 3.

Ключевые слова: вариационная задача, первая вариация функционала, градиент, сопряженные уравнения, особые точки.

DOI: 10.1134/S0044466919080027

ВВЕДЕНИЕ

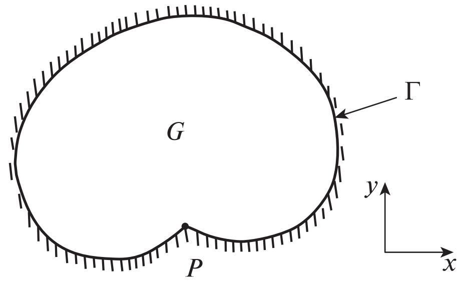
При решении двумерных вариационных задач с распределенными параметрами встречаются такие ситуации, когда в рассматриваемой области или на ее границе имеются особые точки дифференциальных уравнений. В качестве характерного примера укажем на задачи оптимизации плоских или осесимметричных сопел, имеющих излом образующих и при обтекании которых стационарным сверхзвуковым потоком невязкого и нетеплопроводного газа появляются центрированные волны разрежения. В окрестности этих точек параметры газового потока остаются ограниченными, но частные производные этих параметров стремятся к бесконечности при приближении к изломам – особым точкам. В этом случае применение стандартных методов вариационного исчисления для определения первой вариации функционала оказывается невозможным, и необходимо использовать специальные приемы.

Впервые один из таких приемов был предложен в работе А.Н. Крайко (см. [1]). Этот прием состоит во введении специальных новых независимых переменных в окрестности точки излома контура. В этих переменных все частные производные от параметров течения становятся конечными, и после этого может быть применена стандартная процедура определения первой вариации функционала. Указанный прием использовался затем в ряде работ, посвященных решению вариационных задач газовой динамики (см., например, [2]–[5]). Привлечение указанного приема показало, что в случае перемещения особой точки при варьировании функционала в выражении для первой вариации функционала в качестве дополнительных слагаемых появляются члены, пропорциональные изменению координат особой точки и представимые в форме интеграла (см. [1]).

В [4] предложен иной прием, позволяющий определять первую вариацию функционала при наличии на границе области точки излома, приводящей к возникновению волны разрежения. При этом рассмотрение проводится для уравнений, управляющих процессом, из более широкого класса, чем в работе [1], и используется иной подход.

В настоящей статье предлагается новый способ вычисления первой вариации функционала при наличии в рассматриваемой области или на ее границе особых точек. В отличие от способов, предложенных в [1], [4], данный способ, по мнению авторов, более прост, применим для более

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 17-07-00493 а).



Фиг. 1.

широкого класса уравнений, описывающих оптимизируемый процесс, и для более широкого класса особенностей уравнений в области или на ее границе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об определении первой вариации следующего функционала:

$$\begin{gathered}I = J + i = \iint\limits_G F[x, y, \bar{Z}(x, y), \bar{U}(x, y)]dxdy + \\ + \oint\limits_\Gamma f[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \bar{Z}(x(t), y(t)), \bar{U}(x(t), y(t)), \bar{W}(x(t), y(t)), \bar{V}(x(t), y(t))]dt = \\ = \iint\limits_G F[x, y, \bar{Z}(x, y), \bar{U}(x, y)]dxdy + \oint\limits_\Gamma f[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{w}(t), \bar{v}(t)]dt.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь G – некоторая ограниченная область в плоскости независимых переменных (x, y); Γ – кусочно-гладкая граница области G (см. фиг. 1); $t \in [0,1]$ – некоторый параметр вдоль границы Γ; f и F – гладкие функции своих аргументов; точка над переменной означает дифференцирование по параметру t;

$$\bar{Z}(x, y) \equiv [Z_1(x, y), \ldots, Z_n(x, y)], \quad \bar{U}(x, y) \equiv [U_1(x, y), \ldots, U_N(x, y)]$$

суть зависимые (фазовые) переменные и объемные управления соответственно, определенные в области G;

$$\bar{z}(t) \equiv \bar{Z}[x(t), y(t)], \quad \bar{u}(t) \equiv \bar{U}[x(t), y(t)]$$

суть значения зависимой переменной $\bar{Z}(x, y)$ и объемного управления $\bar{U}(x, y)$ на граничной линии Γ;

$$\bar{w}(t) = \bar{W}[x(t), y(t)], \quad \bar{v}(t) = \bar{V}[x(t), y(t)]$$

суть граничные зависимые переменные и граничные управления, здесь

$$\bar{W}(x, y) \equiv [W_1(x, y), \ldots, W_m(x, y)], \quad \bar{V}(x, y) \equiv [V_1(x, y), \ldots, V_M(x, y)].$$

Интеграл по границе Γ области G зависит от самой кривой Γ и данных на ней, а не от выбора частного параметрического представления $\{x(t), y(t)\}$ этой кривой. Поэтому функция f должна быть положительно однородной функцией первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ (см. [6], [7])

$$f(x, y, \rho\dot{x}, \rho\dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) = \rho f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}), \quad \rho > 0.$$

Зависимые переменные $\bar{Z}(x, y)$ определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\bar{L}(x, y, \bar{Z}, \bar{U}) = 0, \quad (x, y) \in G, \\ \bar{l}[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{w}(t), \bar{v}(t)] = 0, \quad t \in [0,1],\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\bar{l}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \equiv \left[l_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}), \ldots, l_{\tilde{n}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v})\right].$$

Последние соотношения в (2) – конечные соотношения, связывающие граничные значения зависимых переменных $\bar{z}$ с граничными управлениями $\bar{u}$ (функция $\bar{l}$ – положительно однородная функция первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$);

$$\bar{L}(x,y,\bar{Z},\bar{U}) \equiv [L_1(x,y,\bar{Z},\bar{U}),\ \ldots,\ L_n(x,y,\bar{Z},\bar{U})],$$

$$L_k(x,y,\bar{Z},\bar{U}) \equiv \frac{\partial}{\partial x}A_k[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y}B_k[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)] - \varphi_k[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)],$$

A_k, B_k, φ_k, $k = 1,\ldots,n$ – достаточно гладкие функции своих аргументов; под производной $\frac{\partial}{\partial x}A_k$ следует понимать полную производную функции A_k по x при фиксированном y, а под производной $\frac{\partial}{\partial y}B_k$ – полную производную функции B_k по y при фиксированном x.

Граничные зависимые переменные $\bar{w}(t)$ связаны с граничными управлениями $\bar{v}$ следующими соотношениями:

$$\bar{g}(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v}) = 0, \tag{3}$$

где

$$\bar{g}(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v}) \equiv [g_1(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v}),\ \ldots,\ g_{\tilde{m}}(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})]$$

(функция $\bar{g}$ – положительно однородная функция первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$).

Существование решения задачи (2) для управлений из рассматриваемой области предполагается. Предполагается также гладкая зависимость решений задачи (2) от управлений.

Область G и ее граница Γ зависят от управлений, т.е. меняются при варьировании функционала (1).

Определение первой вариации функционала (1) будем проводить для случая, когда на границе Γ области G имеется точка P (см. фиг. 1), являющаяся особой для функции $\bar{Z}(x,y)$. Будем рассматривать такие особые точки P, в окрестности которых зависимые переменные $\bar{Z}(x,y)$ и управления $\bar{U}(x,y)$ остаются ограниченными и все интегралы, встречавшиеся выше, имеют смысл. Определение первой вариации функционала будет проводиться как для внутренней точки области управлений, так и для граничной.

Рассмотрим по аналогии с [6], [7] однопараметрическое семейство управлений $\bar{U}(x,y,\alpha)$ и $\bar{V}(x,y,\alpha)$.

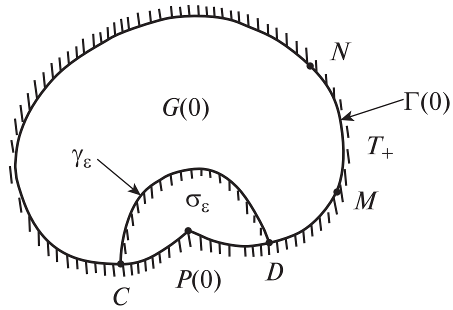
Управления $\bar{U}(x,y,\alpha)$ определены в области $G(\alpha)$ с зависящей от параметра α границей $\Gamma(\alpha)$, а управления $\bar{V}(x,y,\alpha)$ определены на границе $\Gamma(\alpha)$ (существование такого семейства всегда предполагается при определении необходимых условий слабого экстремума). Управления $\bar{U}(x,y)$ и $\bar{V}(x,y)$, "подозреваемые" на экстремум, входят в указанное семейство, и им соответствует значение параметра α, равное нулю, т.е.

$$\bar{U}(x,y) \equiv \bar{U}(x,y,0), \quad \bar{V}(x,y) \equiv \bar{V}(x,y,0).$$

Будем считать, что функции $\bar{U}(x,y,\alpha)$ и $\bar{V}(x,y,\alpha)$ имеют непрерывные производные по параметру α для любой точки (x,y) области $G(\alpha)$ и ее границы $\Gamma(\alpha)$, включая особую точку $\mathrm{P}(\alpha)$. Координаты точек области $G(\alpha)$, включая особую точку $\mathrm{P}(\alpha)$, являются гладкими функциями параметра α и могут быть определены с помощью соотношений

$$x = x(\xi,\eta,\alpha),$$
$$y = y(\xi,\eta,\alpha).$$

В этих соотношениях переменные (ξ,η) являются (x,y)-координатами точек области $G(0)$, т.е. $x(\xi,\eta,0) = \xi$ и $y(\xi,\eta,0) = \eta$. Если граница $\Gamma(0)$ области $G(0)$ задается параметрическим представ-



Фиг. 2.

лением $x = \xi(t),\ y = \eta(t)$, то граница $\Gamma(\alpha)$ области $G(\alpha)$ определяется с помощью следующего параметрического представления:

$$x(t,\alpha) = x[\xi(t),\eta(t),\alpha],$$
$$y(t,\alpha) = y[\xi(t),\eta(t),\alpha],$$

причем предполагается гладкость функций по параметру α.

Под первой вариацией функционала (1) понимают (см., например, [6]–[8]) дифференциал следующей функции параметра α:

$$I(\alpha) = i(\alpha) + J(\alpha) \equiv \oint\limits_{\Gamma(\alpha)} f[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)]dt + \\ + \iint\limits_{G(\alpha)} F[x, y, \bar{Z}(x,y,\alpha), \bar{U}(x,y,\alpha)]dxdy, \tag{4}$$

вычисленный при $\alpha = 0$. В соотношении (4) точка над буквой обозначает частную производную по параметру t. Функцию $I(\alpha)$, определенную выше, удобно для дальнейшего представить в виде суммы интегралов по фиксированной, не меняющейся при варьировании области (в качестве такой области выберем область $G(0)$ с границей $\Gamma(0)$):

$$I(\alpha) = i(\alpha) + J(\alpha) \equiv \int\limits_0^1 f[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha)\bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)]dt + \\ + \iint\limits_{G(0)} \hat{F}(\xi,\eta,\alpha)\left[\frac{\partial x(\xi,\eta,\alpha)}{\partial \xi}\frac{\partial y(\xi,\eta,\alpha)}{\partial \eta} - \frac{\partial x(\xi,\eta,\alpha)}{\partial \eta}\frac{\partial y(\xi,\eta,\alpha)}{\partial \xi}\right]d\xi d\eta, \tag{5}$$

где

$$\hat{F}(\xi,\eta,\alpha) \equiv F\{x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha), \bar{Z}[x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha], \bar{U}[x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha]\},$$

и значения параметра $t = 0$ и $t = 1$ соответствуют точке $P(0)$. Определение дифференциала функции $I(\alpha)$ следует проводить аккуратно в связи с наличием на границе $\Gamma(\alpha)$ особой точки $P(\alpha)$. Для этого поступим следующим образом. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и окружим точку $P(0)$ окрестностью σ_ε, часть границы γ_ε которой (эта часть границы лежит внутри области $G(0)$) не проходит через особую точку $P(0)$, и максимальное расстояние от точек дуги γ_ε до точки $P(0)$ не превосходит ε (фиг. 2). В результате получим область $G_\varepsilon(0)$, определяемую соотношением $G_\varepsilon(0) = G(0)\backslash\bar{\sigma}_\varepsilon$. Область $G_\varepsilon(0)$ ограничена дугой γ_ε и частью границы $\Gamma(0)$, определяемой значениями параметра

$$t \in [C_\varepsilon, D_\varepsilon], \quad (0 < C_\varepsilon < D_\varepsilon < 1).$$

В силу сделанных выше предположений относительно поведения в окрестности особой точки функций, входящих в определение f и F, будем полагать, что

$$I'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}[i'_\varepsilon(0) + J'_\varepsilon(0)],$$

где

$$i_\varepsilon(\alpha) \equiv \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} f[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \overline{z}(t,\alpha), \overline{u}(t,\alpha), \overline{w}(t,\alpha), \overline{v}(t,\alpha)]dt,$$

$$J_\varepsilon(\alpha) \equiv \iint\limits_{G_\varepsilon(0)} \hat{F}(\xi,\eta,\alpha)\left[\frac{\partial x(\xi,\eta,\alpha)}{\partial\xi}\frac{\partial y(\xi,\eta,\alpha)}{\partial\eta} - \frac{\partial x(\xi,\eta,\alpha)}{\partial\eta}\frac{\partial y(\xi,\eta,\alpha)}{\partial\xi}\right]d\xi d\eta.$$

Функции, определяющие $i_\varepsilon(\alpha)$ и $J_\varepsilon(\alpha)$, уже не имеют особенностей в области определения, обладают непрерывными производными по всем переменным, и вычислить значение производной функции

$$I_\varepsilon(\alpha) = i_\varepsilon(\alpha) + J_\varepsilon(\alpha)$$

можно традиционными методами (см. [4], [6]–[9]).

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения. Пусть $E(x, y, \overline{Z}, \overline{U})$ – некоторая функция. Если считать, что функции $\overline{Z}$ и $\overline{U}$ являются в свою очередь функциями переменных x, y, α, т.е.

$$\overline{Z} = \overline{Z}(x,y,\alpha), \quad \overline{U} = \overline{U}(x,y,\alpha),$$

то суперпозицию этих функций будем помечать волной над именем функции:

$$\tilde{E}(x,y,\alpha) = E[x, y, \overline{Z}(x,y,\alpha), \overline{U}(x,y,\alpha)].$$

Наряду с функциями

$$E(x, y, \overline{Z}, \overline{U}), \quad \tilde{E}(x,y,\alpha),$$

будем рассматривать также функцию $\hat{E}(\xi,\eta,\alpha)$, определяемую по правилу:

$$\hat{E}(\xi,\eta,\alpha) = \tilde{E}[x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha), \alpha].$$

Ниже, при преобразовании получающихся выражений, будет использоваться полезное тождество. Приведем его. Пусть

$$\hat{E}(\xi,\eta,\alpha) = E[x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha), \overline{Z}(x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha), \overline{U}(x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha)]$$

есть некоторая достаточно гладкая функция своих аргументов. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\hat{E}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\hat{E}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\hat{E}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] + \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial E}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right].\end{aligned} \tag{6}$$

В справедливости тождества (6) можно убедиться, выполнив почленно дифференцирование произведений, заключенных в квадратные скобки, и сравнив получившиеся выражения в левой и правой частях.

Определим производную функции $J_\varepsilon(\alpha)$ при $\alpha = 0$. С помощью правила дифференцирования интеграла по параметру, тождества (6) и несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}J'_\varepsilon(0) = \iint\limits_{G_\varepsilon(0)} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\hat{F}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]d\xi d\eta = \iint\limits_{G_\varepsilon(0)}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\hat{F}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\hat{F}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\right\}d\xi d\eta = \iint\limits_{G_\varepsilon(0)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right]\times \\ \times\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta + \oint\limits_{\Gamma_\varepsilon(0)}\hat{F}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)d\eta - \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi\right] =\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{G_\varepsilon(0)} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial \alpha} \right] \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \oint\limits_{\Gamma_\varepsilon(0)} \hat{F} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} dy - \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \right).$$

Разбивая интеграл по замкнутому контуру $\Gamma_\varepsilon(0)$ на два интеграла по дугам γ_ε и $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ и учитывая, что $x(\xi,\eta,0) = \xi$ и $y(\xi,\eta,0) = \eta$, выражению для $J'_\varepsilon(0)$ придадим вид

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(0) = & \iint\limits_{G_\varepsilon(0)} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial \alpha} \right] \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \\ & + \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \hat{F} \left(\dot{y} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \dot{x} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dt + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \hat{F} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} dy - \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Определим производную функции $i_\varepsilon(\alpha)$ при $\alpha = 0$. Здесь опять воспользуемся правилом дифференцирования интеграла по параметру и очевидными преобразованиями. В результате получим

$$\begin{aligned} i'_\varepsilon(0) = & \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial w_p} \frac{\partial w_p}{\partial \alpha} + \sum_{q=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial v_q} \frac{\partial v_q}{\partial \alpha} \right\} dt = \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial w_p} \frac{\partial w_p}{\partial \alpha} + \sum_{q=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial v_q} \frac{\partial v_q}{\partial \alpha} \right\} dt = \\ & = \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial w_p} \frac{\partial w_p}{\partial \alpha} + \sum_{q=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial v_q} \frac{\partial v_q}{\partial \alpha} \right\} dt + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \bigg|_{t=D_\varepsilon} - \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \bigg|_{t=C_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial f}{\partial Z_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial U_j}, \ldots,$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} i'_\varepsilon(0) = & \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial Z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial U_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial W_p} \frac{\partial w_p}{\partial \alpha} + \sum_{q=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial V_q} \frac{\partial v_q}{\partial \alpha} \right\} dt + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \bigg|_{t=D_\varepsilon} - \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \bigg|_{t=C_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{8}$$

2. УЧЕТ СВЯЗЕЙ

Полученные выражения (7) и (8) для $J'_\varepsilon(0)$ и $i'_\varepsilon(0)$ не позволяют еще определить формулы для вычисления первой вариации (градиента) функционала (1). Это связано с тем, что в выражения (7) и (8) наряду с производными независимых управлений $\overline{U}$ и $\overline{v}$ по параметру α входят также производные фазовых координат $\overline{Z}$ и $\overline{w}$. Чтобы исключить зависимые производные фазовых координат, воспользуемся обобщенным методом множителей Лагранжа [9]–[11], [4]. Суть этого метода заключается в добавлении к основному функционалу (4) двух вспомогательных функционалов $S_\varepsilon(\alpha)$ и $s_\varepsilon(\alpha)$ такого вида

$$S_\varepsilon(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G_\varepsilon(\alpha)} \mu_k(x, y) L_k[x, y, \bar{Z}(x, y, \alpha), \bar{U}(x, y, \alpha)]\,dxdy,$$

$$s_\varepsilon(\alpha) = \sum_{r=1}^{\tilde{n}} \int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \lambda_r(t) l_r[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)]\,dt + \tag{9}$$

$$+ \sum_{h=1}^{\tilde{m}} \int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \sigma_h(t) g_h[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)]\,dt.$$

Функционал $S_\varepsilon(\alpha)$ учитывает дифференциальные связи, накладываемые на варьируемые в области G функции. Для любых допустимых управлений $\bar{U}(x, y, \alpha)$ и фазовых переменных $\bar{Z}(x, y, \alpha)$, удовлетворяющих связям (2), функционал $S_\varepsilon(\alpha)$ равен нулю.

Функционал $s_\varepsilon(\alpha)$ также учитывает связи, накладываемые на варьируемые на границе Γ области G функции. Опять же, для любых допустимых управлений $\bar{u}(t,\alpha)$, $\bar{v}(t,\alpha)$ и фазовых переменных $\bar{z}(t,\alpha)$, $\bar{w}(t,\alpha)$, совместимых со связями (2), (3), функционал $s_\varepsilon(\alpha)$ равен нулю.

Определение производной функции $S_\varepsilon(\alpha)$ при $\alpha = 0$. Вначале представим функцию $S_\varepsilon(\alpha)$ в виде суммы интегралов по фиксированной области $G_\varepsilon(0)$:

$$\begin{gathered} S_\varepsilon(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G_\varepsilon(\alpha)} \mu_k(x, y)\left[\frac{\partial A_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial y} - \varphi_k\right] dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G_\varepsilon(0)} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \eta}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \xi}\right) - \hat{\varphi}_k(\xi,\eta,\alpha)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\hat{\mu}_k(\xi,\eta,\alpha)\,d\xi d\eta. \end{gathered} \tag{10}$$

При получении выражения (10) для $S_\varepsilon(\alpha)$ использовались соотношения (11), связывающие производные функций $\hat{E}(\xi,\eta,\alpha)$ и $\tilde{E}(x,y,\alpha)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x}, \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \tilde{E}}{\partial y}. \end{gathered} \tag{11}$$

С помощью правила дифференцирования интеграла по параметру (см. [7]) получим

$$\begin{gathered} S'_\varepsilon(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G_\varepsilon(0)} \left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \xi} - \hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \eta} - \hat{\mu}_k \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \xi}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\hat{\mu}_k \hat{\varphi}_k \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\right\} d\xi d\eta. \end{gathered} \tag{12}$$

Преобразуя первое слагаемое, находящееся под знаком интеграла, получаем

$$\begin{gathered} R_k^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \xi} - \hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\hat{A}_k\right) - \hat{A}_k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\hat{A}_k\right) + \hat{A}_k \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\hat{\mu}_k \hat{A}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\hat{\mu}_k \hat{A}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right] + \\ + \hat{A}_k \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right] + \frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\mu}_k \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right]. \end{gathered}$$

Применяя первое из тождеств (11) к функциям $\mu_k(x,y) = \tilde{\mu}_k(x,y)$ и $\hat{\mu}(\xi,\eta,\alpha)$, выражению

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)$$

нетрудно придать вид

$$-\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right).$$

Теперь для $R_k^{(1)}$ имеем

$$R_k^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] -$$
$$-\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) - \hat{A}_k\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right].$$

Последний член в этом выражении преобразуем, используя тождество (6) и принимая во внимание, что

$$\mu_k = \mu_k(x,y), \quad \frac{\partial\mu_k}{\partial x} = d_k(x,y), \quad \frac{\partial d_k}{\partial Z_i} = \frac{\partial d_k}{\partial U_j} = 0, \quad i = 1,\ldots,n; \ j = 1,\ldots,N.$$

В результате получим

$$R_k^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] - \frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) -$$
$$-\hat{A}_k\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\right] - \hat{A}_k\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) -\right.$$
$$\left.-\hat{A}_k\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) + \hat{A}_k\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] +$$
$$+\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left[\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right].$$

Если заметить, что $\dfrac{\partial\hat{\mu}_k}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial\mu_k}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial\mu_k}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}$, воспользоваться правилом дифференцирования произведений функций и провести несложные преобразования, то выражениям, находящимся в двух первых квадратных скобках в последнем равенстве для $R_k^{(1)}$, можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) - \hat{A}_k\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) + \hat{\mu}_k\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) + \hat{A}_k\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\mu}_k\hat{A}_k\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) + \hat{\mu}_k\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi}\right).$$

Воспользовавшись тождествами (11) в применении к функциям $\hat{A}(\xi,\eta,\alpha)$, $\tilde{A}(x,y,\alpha)$, преобразуем третье выражение, заключенное в квадратные скобки в последнем равенстве для $R_k^{(1)}$, к виду

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta} - \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} =$$
$$= -\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\tilde{A}_k}{\partial\alpha} = -\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right].$$

С учетом приведенных выше преобразований представим выражение для $R_k^{(1)}$ в следующем виде:

$$R_k^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi} - \hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \hat{\mu}_k\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi}\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\mu_k}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Аналогичным образом можно преобразовать второе слагаемое, находящееся под знаком интеграла в выражении (12) для $S'_\varepsilon(\alpha)$:

$$R_k^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\eta} - \hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\eta} - \hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha} - \hat{\mu}_k\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\xi}\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\mu_k}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Что касается третьего слагаемого, находящегося под знаком интеграла в выражении (12) для $S'_\varepsilon(\alpha)$, то, воспользовавшись тождеством (6), получим

$$R_k^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\hat{\mu}_k\hat{\varphi}_k\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\hat{\mu}_k\hat{\varphi}_k\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\hat{\mu}_k\hat{\varphi}_k\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right] +$$
$$+ \mu_k\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Подставив преобразованные выражения для $R_k^{(1)}$, $R_k^{(2)}$, $R_k^{(3)}$ в (12), приведя подобные члены и воспользовавшись формулой Грина, придем к такому выражению для $S'_\varepsilon(\alpha)$:

$$S'_\varepsilon(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_\varepsilon(0)}\left\{\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\eta} - \hat{\varphi}_k\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\eta} - \hat{\varphi}_k\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]d\eta +\right.$$
$$\left.+ \hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{\partial B_k}{\partial\xi} - \hat{\varphi}_k\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\xi} - \hat{\varphi}_k\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]d\xi\right\} -$$
$$- \sum_{k=1}^{n}\iint_{G_\varepsilon(0)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\right)\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_\varepsilon(0)}\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}dy - \frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right] -$$
$$- \sum_{k=1}^{n}\iint_{G_\varepsilon(0)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\right)\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta.$$

Рассмотрим отдельно интеграл по замкнутому контуру $\Gamma_\varepsilon(0)$. Как и в случае вычисления производной функции $J'_\varepsilon(0)$, разобьем этот интеграл на два интеграла по дугам γ_ε и $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$:

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon(0)}\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}dy - \frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right] =$$
$$= \int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} R_k^{(4)}dt + \int_{\gamma_\varepsilon}\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}dy - \frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right],$$

где

$$R_k^{(4)} = \hat{\mu}_k \left[\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha} \dot{y} - \frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \alpha} \dot{x} \right) + \left(\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial t} - \hat{\varphi}_k \dot{y} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial t} - \hat{\varphi}_k \dot{x} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right].$$

Функцию $R_k^{(4)}(t,\alpha)$ преобразуем следующим образом. Учитывая, что линия $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ имеет параметрическое представление $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, что

$$\hat{A}(\xi,\eta,\alpha) = A[x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha), \bar{Z}(x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha), \bar{U}(x(\xi,\eta,\alpha), y(\xi,\eta,\alpha),\alpha)]$$

и что $x(\xi,\eta,0) = \xi$, $y(\xi,\eta,0) = \eta$, нетрудно получить следующие равенства:

$$\left.\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial A_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial x} \right] + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial A_k}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial y} \right] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial \alpha} \right],$$

$$\left.\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial t}\right|_{\alpha=0} = \left.\left(\dot{x}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \xi} + \dot{y}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \eta} \right)\right|_{\alpha=0} = \left(\dot{x}\frac{\partial A_k}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial y} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\left(\dot{x}\frac{\partial Z_i}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial Z_i}{\partial y} \right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_k}{\partial U_j}\left(\dot{x}\frac{\partial U_j}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U_j}{\partial y} \right).$$

Аналогичные выражения могут быть выписаны и для частных производных функции $\hat{B}_k(\xi,\eta,\alpha)$. Подставив полученные выражения для частных производных функций $\hat{A}_k(\xi,\eta,\alpha)$ и $\hat{B}_k(\xi,\eta,\alpha)$ в соотношение, определяющее функцию $R_k^{(4)}(t,\alpha)$, выполнив несложные преобразования и воспользовавшись первым равенством из (2), придадим функции $R_k^{(4)}(t,\alpha)$ такой вид:

$$R_k^{(4)} = \hat{\mu}_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial u_j}{\partial \alpha} - \right. \\ - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial Z_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial U_j}{\partial x} \right] - \\ \left. - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial Z_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial U_j}{\partial y} \right] \right\}.$$

Теперь для вычисления $S'_\varepsilon(0)$ окончательно имеем равенство

$$S'_\varepsilon(0) = \int_{\gamma_\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left[\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha}dy - \frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \alpha}dx \right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy \right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx \right)\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] + \\ + \int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial z_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial u_j}{\partial \alpha} - \right. \\ - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial Z_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial U_j}{\partial x} \right] - \\ \left. - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i} \right)\frac{\partial Z_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j} \right)\frac{\partial U_j}{\partial y} \right] \right\} dt - \tag{13}$$

$$-\iint\limits_{G_\varepsilon(0)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial y}+\mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial y}+\mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\right)\right]\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta.$$

Отметим еще раз, что в полученном равенстве (13) для вычисления $S'_\varepsilon(0)$ первые два слагаемые — суть криволинейные интегралы по дугам γ_ε и $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ (или по параметру t на отрезке $[C_\varepsilon, D_\varepsilon]$) соответственно от одного и того же выражения. Эти интегралы записаны по-разному из соображений удобства последующей работы с ними.

Для нахождения производной функции $s_\varepsilon(\alpha)$, определенной в (9), при $\alpha = 0$ воспользуемся стандартными преобразованиями. Выражение для $s_\varepsilon(\alpha)$ можно представить в виде суммы двух групп слагаемых: в первую группу включаются члены, содержащие функции $\bar{l}$, а во вторую — члены, содержащие функции $\bar{g}$. Для первой группы слагаемых упомянутые стандартные преобразования имеют вид

$$\sum_{r=1}^{\tilde n}\int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\lambda_r(t)\frac{\partial l_r}{\partial\alpha}dt=\sum_{r=1}^{\tilde n}\int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\lambda_r(t)\left[\frac{\partial l_r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial l_r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\frac{\partial\dot x}{\partial\alpha}+\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\frac{\partial\dot y}{\partial\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_r}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial l_r}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial l_r}{\partial w_p}\frac{\partial w_p}{\partial\alpha}+\sum_{q=1}^{M}\frac{\partial l_r}{\partial v_q}\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right]dt=\sum_{r=1}^{\tilde n}\int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\left[\lambda_r\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial l_r}{\partial x}+\lambda_r\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial l_r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)-\right.$$

$$-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)-\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)+$$

$$\left.+\lambda_r\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_r}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}+\lambda_r\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial l_r}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}+\lambda_r\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial l_r}{\partial w_p}\frac{\partial w_p}{\partial\alpha}+\lambda_r\sum_{q=1}^{M}\frac{\partial l_r}{\partial v_q}\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right]dt=$$

$$=\sum_{r=1}^{\tilde n}\int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\left\{\left[\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left[\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}+\sum_{p=1}^{m}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial w_p}\frac{\partial w_p}{\partial\alpha}+\sum_{q=1}^{M}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial v_q}\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right\}dt+$$

$$+\sum_{r=1}^{\tilde n}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{t=C_\varepsilon}^{t=D_\varepsilon}.$$

Преобразовав аналогично слагаемые второй группы, объединив однородные члены и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial l_r}{\partial z_i}=\frac{\partial l_r}{\partial Z_i},\quad\frac{\partial l_r}{\partial u_j}=\frac{\partial l_r}{\partial U_j},\ldots,$$

для $s'_\varepsilon(0)$ окончательно получим следующее выражение:

$$s'_\varepsilon(\alpha)=\int_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\left\{\left[\sum_{r=1}^{\tilde n}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)\right)+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot x}\right)\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\right.$$

$$+\left[\sum_{r=1}^{\tilde n}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)\right)+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot y}\right)\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial Z_i}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial Z_i}\right)\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial U_j}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial U_j}\right)\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}+$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial W_p}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial W_p}\right)\frac{\partial w_p}{\partial\alpha}+\sum_{q=1}^{M}\left(\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial V_q}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial V_q}\right)\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\Bigg\}dt+$$

$$+\left\{\left[\sum_{r=1}^{\tilde n}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot x}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left[\sum_{r=1}^{\tilde n}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot y}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right\}\Bigg|_{t=C_\varepsilon}^{t=D_\varepsilon}.$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАРИАЦИИ ИССЛЕДУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА ЧЕРЕЗ ВАРИАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Используя полученные выше формулы для вычисления производных функций $i'_\varepsilon(0)$, $J'_\varepsilon(0)$, $s'_\varepsilon(0)$, $S'_\varepsilon(0)$, выражение для вычисления производной вспомогательной функции

$$\tilde I_\varepsilon(\alpha)=i_\varepsilon(\alpha)+J_\varepsilon(\alpha)+s_\varepsilon(\alpha)+S_\varepsilon(\alpha)$$

по параметру α при $\alpha=0$ можно записать в следующем виде

$$\tilde I'_\varepsilon(0)=i'_\varepsilon(0)+J'_\varepsilon(0)+s'_\varepsilon(0)+S'_\varepsilon(0)=$$

$$=\iint\limits_{G_\varepsilon(0)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\Psi_i^Z\frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\Psi_j^U\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat\mu_k\left[\left(\frac{\partial\hat A_k}{\partial\alpha}dy-\frac{\partial\hat B_k}{\partial\alpha}dx\right)+\left(d\hat B_k-\hat\varphi_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\left(d\hat A_k-\hat\varphi_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]+\tag{14}$$

$$+\int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\left[\Omega^x\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\Omega^y\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\left(\Omega_i^z\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\Omega_j^u\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\left(\Omega_p^w\frac{\partial w_p}{\partial\alpha}\right)+\sum_{q=1}^{M}\left(\Omega_q^v\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right)\right]dt+\left[\theta^x\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\theta^y\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]_{t=C_\varepsilon}^{t=D_\varepsilon},$$

где

$$\Psi_i^Z=\frac{\partial F}{\partial Z_i}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial y}+\mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\right),$$

$$\Psi_j^U=\frac{\partial F}{\partial U_j}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial y}+\mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\right),$$

$$\Omega^x=\dot yF+\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot x}\right)\right]+\sum_{r=1}^{\tilde n}\left[\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot x}\right)\right]+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left[\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot x}\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{\partial Z_i}{\partial x}-\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot y\frac{\partial A_k}{\partial U_j}-\dot x\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right)\right]\frac{\partial U_j}{\partial x},$$

$$\Omega^y=-\dot xF+\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot y}\right)\right]+\sum_{r=1}^{\tilde n}\left[\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot y}\right)\right]+\sum_{h=1}^{\tilde m}\left[\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot y}\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{\partial Z_i}{\partial y}-\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot y\frac{\partial A_k}{\partial U_j}-\dot x\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right)\right]\frac{\partial U_j}{\partial y},$$

$$\Omega_i^z=\frac{\partial f}{\partial Z_i}+\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial Z_i}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial Z_i}+\theta_i,$$

$$\Omega_j^u=\frac{\partial f}{\partial U_j}+\sum_{r=1}^{\tilde n}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial U_j}+\sum_{h=1}^{\tilde m}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial U_j}+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot y\frac{\partial A_k}{\partial U_j}-\dot x\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right),$$

$$\Omega_p^w = \frac{\partial f}{\partial W_p} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial W_p}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial W_p}\right),$$

$$\Omega_q^v = \frac{\partial f}{\partial V_q} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial V_q}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial V_q}\right),$$

$$\theta^x = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial \dot{y}}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial \dot{y}}\right),$$

$$\theta^y = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial \dot{x}}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial \dot{x}}\right),$$

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\right).$$

Обратим внимание на два момента. Во-первых, выражение (14) позволяет вычислить первую производную вспомогательной функции $\tilde{I}_\varepsilon(\alpha)$ (для $\alpha = 0$) при любом (конечном) выборе множителей Лагранжа $\mu_k(x, y)$, $\lambda_r(t)$, $\sigma_h(t)$, и значение этой производной не зависит от выбора указанных множителей. Во-вторых, соотношение (14), кроме производных по параметру α от управляющих (независимых) функций, содержит также производные по параметру α от фазовых переменных (зависимых функций), которые однозначно определяются производными управляющих функций. Выберем множители Лагранжа специальным образом так, чтобы были выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &\Psi_i^Z = 0, \quad (x, y) \in G(0), \\ &\Omega_i^z(t) = 0, \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_p^w(t) = 0, \quad t \in [0,1], \\ &i = 1, \ldots, n, \quad p = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{16}$$

Система уравнений (15), (16) в целом служит для определения всех перечисленных выше множителей Лагранжа. Здесь мы не будем обсуждать важный и непростой вопрос о корректности поставленной задачи (15), (16), но будем предполагать, что из системы уравнений (15), (16) указанные множители Лагранжа $\mu_k(x, y)$, $\lambda_r(t)$, $\sigma_h(t)$ можно определить (в каждом конкретном случае этот факт следует отдельно проверять). Систему уравнений (15), (16) из методических соображений часто условно разбивают на подсистемы так, что каждая подсистема определяет свои множители Лагранжа: подсистема (15) используется для определения множителей Лагранжа $\mu_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, n$, в области $G(0)$ (она называется *сопряженной системой*), а подсистема (16) и часть условий на границе области из (15) – для определения множителей Лагранжа $\lambda_r(t)$, $r = 1, \ldots, \tilde{n}$, и $\sigma_h(t)$, $h = 1, \ldots, \tilde{m}$, на границе $\Gamma(0)$. После специального выбора множителей Лагранжа, определяемого соотношениями (15), (16), для первой производной вспомогательной функции $\tilde{I}_\varepsilon(\alpha)$ при значении $\alpha = 0$ получим такое выражение:

$$\begin{aligned} &\tilde{I}_\varepsilon'(0) = i_\varepsilon'(0) + J_\varepsilon'(0) + s_\varepsilon'(0) + S_\varepsilon'(0) = \\ &= \iint\limits_{G_\varepsilon(0)}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\Psi_j^U\frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta + \\ &+ \int\limits_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial\alpha}dy - \frac{\partial\hat{B}_k}{\partial\alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right] + \\ &+ \int\limits_{C_\varepsilon}^{D_\varepsilon}\left[\Omega^x\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \Omega^y\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \sum_{j=1}^{N}\left(\Omega_j^u\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}\right) + \sum_{q=1}^{M}\left(\Omega_q^v\frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right)\right]dt + \left[\theta^x\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \theta^y\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]_{t=C_\varepsilon}^{t=D_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{17}$$

При рассмотрении условия (17) следует иметь в виду, что функции $\Omega^x(t)$ и $\Omega^y(t)$ не являются независимыми. Действительно, так как f, l_r, g_h – положительно-однородные функции первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, то система условий $\Omega^x(t) = 0$ и $\Omega^y(t) = 0$ равносильна одному условию $(\dot{x}\Omega^x + \dot{y}\Omega^y) = 0$ (см. [7], [12]).

Теперь первая производная функции $\tilde{I}_\varepsilon(\alpha)$, вычисленная при значении $\alpha = 0$, зависит только от первых производных по параметру α управляющих функций и не зависит от производных зависимых функций.

Для получения выражения, определяющего первую производную функции $I(\alpha)$, при $\alpha = 0$ необходимо (в соответствии со сказанным выше) перейти в равенстве (17) к пределу при ε, стремящемся к нулю. В результате предельного перехода в этом выражении интеграл по области $G_\varepsilon(0)$ перейдет в интеграл по области $G(0)$, а интеграл по границе $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ $(t \in [C_\varepsilon, D_\varepsilon])$ – в интеграл по границе $\Gamma(0)$ $(t \in [0,1])$. Кроме того, в соотношении (17) остаются члены, вычисляемые в точках $t = C_\varepsilon$ и $t = D_\varepsilon$, и интеграл по границе γ_ε. Поведение именно этих членов при ε, стремящемся к нулю, и является объектом особого внимания данной работы. Остановимся на них подробнее.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЛЕНОВ, СВЯЗАННЫХ С ВАРЬИРОВАНИЕМ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Используя полученные выше формулы, перейдем в выражении (17), определяющем первую производную функции $\tilde{I}_\varepsilon(\alpha)$, к пределу при $\varepsilon \to 0$. Выполняя предельный переход, будем при этом предполагать следующее:

– существуют конечные пределы выражений $\theta^x(C_\varepsilon)$, $\theta^y(C_\varepsilon)$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta^x(C_\varepsilon) = \lim_{t\to 0}\theta^x(t) = \theta^x_-, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\theta^y(C_\varepsilon) = \lim_{t\to 0}\theta^y(t) = \theta^y_-;$$

– существуют конечные пределы выражений $\theta^x(D_\varepsilon)$, $\theta^y(D_\varepsilon)$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta^x(D_\varepsilon) = \lim_{t\to 1}\theta^x(t) = \theta^x_+, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\theta^y(D_\varepsilon) = \lim_{t\to 1}\theta^y(t) = \theta^y_+.$$

Тогда для конечных членов из соотношения (17) получим предельное значение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\theta^x\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \theta^y\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{t=C_\varepsilon}^{t=D_\varepsilon}\right] = (\theta^x_+ - \theta^x_-)\frac{\partial x_*}{\partial\alpha} + (\theta^y_+ - \theta^y_-)\frac{\partial y_*}{\partial\alpha},$$

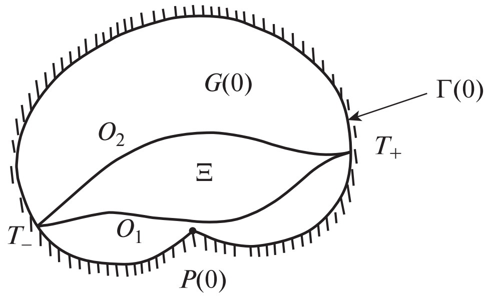
где через x_* и y_* обозначены координаты особой точки и через $\dfrac{\partial x_*}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial y_*}{\partial\alpha}$ – их производные по параметру α при значении $\alpha = 0$.

Что касается криволинейного интеграла по дуге γ_ε (см. (17)), то здесь предельный переход при $\varepsilon \to 0$ будем проводить в предположении, что верно следующее:

– множители Лагранжа $\mu_k(x,y)$, $k = 1, \ldots, n$, определяемые в результате решения сопряженной задачи, ограничены в окрестности особой точки;

– двойной интеграл по области $G(0)$, встречающийся в (17), сходится.

В этом случае существование конечного предела (при $\varepsilon \to 0$) криволинейного интеграла по дуге γ_ε напрямую зависит от сходимости криволинейного интеграла по границе $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ (интеграла по t на отрезке $t \in [C_\varepsilon, D_\varepsilon]$) от той же функции. Это следует непосредственно из рассмотрения выражения (13) для производной $S'_\varepsilon(0)$, специального выбора множителей Лагранжа $\mu_k(x,y)$ в соответствии с (15), (16), сделанных выше предположений относительно поведения множителей Лагранжа в окрестности особой точки и того очевидного факта, что $S'_\varepsilon(0) \equiv 0$ для всех $\varepsilon > 0$. А именно, если в результате решения сопряженной задачи окажется, что множители Лагранжа $\mu_k(x,y)$, определенные на границе $\Gamma(0)$ области $G(0)$, при приближении к особой точке P ведут себя так, что криволинейный интеграл по границе $\Gamma_\varepsilon(0)\backslash\gamma_\varepsilon$ стремится к конечному пределу, то в этом случае будет стремиться к конечному пределу и криволинейный интеграл по дуге γ_ε. Такая ситуация будет иметь место, например, в случае, когда множители Лагранжа $\mu_k(x,y)$ при прибли-



Фиг. 3.

жении к особой точке имеют конечные предельные значения (причем эти предельные значения могут быть разными при приближении к особой точке с разных сторон).

Значение криволинейного интеграла по дуге γ_ε из формулы (17) в общем случае зависит от формы дуги, соединяющей точки T_- и T_+, расположенные на границе $\Gamma(0)$ области $G(0)$. Действительно, рассмотрим дуги $T_-O_1T_+$, $T_-O_2T_+$ и область Ξ, которую они ограничивают (фиг. 3). При любых фазовых переменных $\bar{Z}(x,y)$ и управляющих функциях $\bar{U}(x,y)$, совместимых со связями (2), и любых множителях Лагранжа $\mu_k(x,y)$ функция

$$\chi(\alpha) = \iint\limits_{\Xi} \sum_{k=1}^{n} \mu_k(x,y)\left[\frac{\partial A_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial y} - \varphi_k\right]dxdy$$

тождественно равна нулю. Заметим, что область Ξ является частью области $G(0)$, функция $\chi(\alpha)$ – частью функции $S_\varepsilon(\alpha)$, и для функции $\chi(\alpha)$ справедливы те же преобразования, которые применялись к функции $S_\varepsilon(\alpha)$ для нахождения $S'_\varepsilon(0)$. Если же множители Лагранжа $\mu_k(x,y)$ выбрать в соответствии с (15), (16), то получим

$$\int\limits_{T_-O_1T_+} \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left[\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha}dy - \frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right] -$$

$$- \int\limits_{T_-O_2T_+} \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left[\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \alpha}dy - \frac{\partial \hat{B}_k}{\partial \alpha}dx\right) + \left(d\hat{B}_k - \hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(d\hat{A}_k - \hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right] =$$

$$= \iint\limits_{\Xi} \left[\sum_{j=1}^{N}\left(\Psi_j^U \frac{\partial U_j}{\partial \alpha}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi d\eta.$$

Из последнего равенства и из сходимости двойного интеграла следует, что зависимость значения криволинейного интеграла по дуге γ_ε от формы дуги уменьшается при уменьшении числа ε.

Выделим особо два частных случая задачи. Для сходимости двойного интеграла по области $G(0)$ важно поведение в окрестности особой точки P не только самих множителей Лагранжа $\mu_k(x,y)$, но и их частных производных по x и y. Если функции A_k и B_k, $k = 1, \ldots, n$, не зависят от управляющих функций $\bar{U}$, то сходимость двойного интеграла непосредственно следует из предположения об ограниченности множителей Лагранжа $\mu_k(x,y)$ в окрестности особой точки. Если же в дополнение к этому и функции F, φ_k, $k = 1, \ldots, n$, не зависят от управляющих функций $\bar{U}$, то упомянутый двойной интеграл тождественно равен нулю. В этом случае значение криволинейного интеграла по дуге γ_ε не зависит от формы дуги.

Итак, при выполнении указанных условий предельное значение криволинейного интеграла по дуге γ_ε не зависит от формы дуги. Поэтому в дальнейшем будем в качестве дуги γ_ε выбирать дугу окружности радиуса ε, а в качестве параметра вдоль дуги – угол ω между лучом, выходящим из особой точки P и пересекающим дугу окружности в точке Q, и осью x.

Сделанное в начале главы предположение об ограниченности фазовых переменных и управляющих функций в окрестности особой точки, а также предположение об ограниченности и множителей Лагранжа позволяют сделать вывод о том, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat{\mu}_k\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial\alpha}dy-\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial\alpha}dx-\hat{\varphi}_k\frac{\partial x}{\partial\alpha}dy+\hat{\varphi}_k\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx\right)=0.$$

Теперь для криволинейного интеграла по дуге γ_ε имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat{\mu}_k\left[\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial\alpha}dy-\frac{\partial \hat{B}_k}{\partial\alpha}dx\right)+\left(d\hat{B}_k-\hat{\varphi}_k dy\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\left(d\hat{A}_k-\hat{\varphi}_k dx\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]=$$

$$=\frac{\partial x_*}{\partial\alpha}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dB_k}{d\omega}\right)d\omega-\frac{\partial y_*}{\partial\alpha}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dA_k}{d\omega}\right)d\omega,$$

где введены следующие обозначения:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat{\mu}_k d\hat{B}_k=\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dB_k}{d\omega}\right)d\omega,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\hat{\mu}_k d\hat{A}_k=\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dA_k}{d\omega}\right)d\omega.$$

Объединяя последние результаты с полученными ранее соотношениями для конечных членов, окончательно придем к тому, что в выражении для вычисления первой производной основного функционала (2) по параметру α содержатся члены, связанные варьированием координат особой точки (с производными от координат особой точки по параметру α) следующего вида:

$$\left[\theta_+^x-\theta_-^x+\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dB_k}{d\omega}\right)d\omega\right]\frac{\partial x_*}{\partial\alpha}+\left[\theta_+^y-\theta_-^y-\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{dA_k}{d\omega}\right)d\omega\right]\frac{\partial y_*}{\partial\alpha}. \tag{18}$$

5. ПРИМЕРЫ

Как упоминалось во введении, дополнительные члены, появляющиеся в выражении для первой вариации функционала и связанные с варьированием координат особой точки, для некоторых конкретных задач были получены ранее с помощью другого подхода. В этих конкретных задачах:

– основной функционал зависел только от граничных управлений;

– объемный функционал отсутствовал (т.е. $F\equiv 0$);

– функции A_k, B_k, φ_k, $k=1,\ldots,n$, не зависели от объемных управлений;

– особая точка была обусловлена изломом границы области G, причем фазовые переменные были ограничены в окрестности такой особой точки;

– множители Лагранжа, определяемые из решения сопряженной задачи, также оказывались ограниченными в окрестности особой точки.

В таких условиях может быть использован изложенный в данной работе подход, и дополнительные члены должны определяться соотношениями (18). Рассмотрим некоторые из этих конкретных задач.

1. В работе [2] дифференциальные связи, которым должны удовлетворять фазовые переменные в области G, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}(-u)+\frac{\partial}{\partial\psi}(y^\beta p)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^\beta\rho v}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{u}{v}\right)=0.$$

В этих соотношениях все переменные имеют свой смысл, определенный в [2]. Если эти соотношения перевести на язык настоящей работы и воспользоваться введенными здесь обозначениями, то для задачи из [2] можно записать:

$$n = 2, \quad A_1 = -u, \quad A_2 = \frac{1}{y^\beta \rho v}, \quad B_1 = y^\beta p, \quad B_2 = \frac{u}{v}.$$

Дополнительные члены в выражении для первой вариации функционала, связанные с варьированием координат особой точки, должны иметь вид (в обозначениях настоящей работы)

$$\frac{\partial x_*}{\partial \alpha} \int\limits_{\omega_-}^{\omega_+} \left(\mu_1 \frac{dB_1}{d\omega} + \mu_2 \frac{dB_2}{d\omega} \right) d\omega - \frac{\partial y_*}{\partial \alpha} \int\limits_{\omega_-}^{\omega_+} \left(\mu_1 \frac{dA_1}{d\omega} + \mu_2 \frac{dA_2}{d\omega} \right) d\omega,$$

или, используя обозначения работы [2], имеем

$$\delta y_* \int\limits_{\omega_-}^{\omega_+} \left[h_1 \frac{d}{d\omega}(y^\beta p) + h_2 \frac{d}{d\omega}\left(\frac{u}{v}\right) \right] d\omega - \delta \psi_* \int\limits_{\omega_-}^{\omega_+} \left[-h_1 \frac{du}{d\omega} + h_2 \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{y^\beta \rho v} \right) \right] d\omega. \tag{19}$$

В работе [2] рассмотрены две особенности. Одна связана с фокусировкой характеристик второго семейства на внешней ударной волне (особенность в точке c). Вторая особенность связана с изломом контура и с фокусировкой характеристик первого семейства в точке излома (особенность в точке d). Вклад обеих особенностей в выражение для первой вариации функционала определяется соотношением (19), только в случае излома контура следует положить

$$\delta \psi_* = \frac{\partial \psi_*}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0.$$

Соотношение (19) полностью совпадает с тем, которое приведено в работе [2].

2. В монографии [4] (глава IX) А.Н. Крайко рассмотрел процесс, поведение которого определялось следующей системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial a^{k1}}{\partial \psi} - \frac{\partial a^{k2}}{\partial y} = 0, \quad k = 1, \ldots, K.$$

На границе области, в которой эта система уравнений определена, имелась особенность газодинамического типа (например, волна Прандтля–Майера), когда предельные значения фазовых переменных при приближении к особой точке являются конечными величинами и зависят от направления, вдоль которого осуществляется этот предельный переход. С этим процессом связывалась некоторая вариационная задача, и исследовалось влияние на первую вариацию функционала особенности на границе рассматриваемой области. Множители Лагранжа μ_k, которые определялись в результате решения сопряженной задачи, также имели конечные предельные значения при приближении к особой точке, и эти предельные значения зависели от направления, вдоль которого осуществляется приближение к особой точке. Полученные в работе [4] дополнительные члены, связанные с варьированием координат особой точки, имеют вид

$$\delta I_1 = \Delta y_* \int\limits_{d_-}^{d_+} \mu_k da^{k1}.$$

Это соотношение непосредственно следует из (18), если принять во внимание, что

$$n = K, \quad A_i = a^{i1}, \quad B_i = -a^{i2}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta y_* = \frac{\partial y_*}{\partial \alpha} \Delta \alpha,$$

$$\Delta \psi_* = \frac{\partial \psi_*}{\partial \alpha} \Delta \alpha = 0$$

и что системы координат (x, y) данной работы и система координат (ψ, y) работы [4] имеют разные ориентации.

3. Рассмотрим некоторую вариационную задачу, связанную с течением идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – фазовые переменные (проекции вектора скорости на оси x и y соответственно). В области течения G они связаны между собой системой дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Если особая точка течения, лежащая на границе области G, является точкой торможения потока (в этой точке $u = v = 0$), то в выражении для первой вариации целевого функционала должны появиться члены, связанные с варьированием координат этой особой точки и имеющие вид

$$\frac{\partial x_*}{\partial \alpha}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\mu_1 \frac{dv}{d\omega} - \mu_2 \frac{du}{d\omega}\right) d\omega - \frac{\partial y_*}{\partial \alpha}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\left(\mu_1 \frac{du}{d\omega} + \mu_2 \frac{dv}{d\omega}\right) d\omega,$$

так как здесь

$$n = 2, \quad A_1 = u, \quad A_2 = v, \quad B_1 = v, \quad B_2 = -u.$$

При ограниченных множителях Лагранжа (что практически всегда и оказывается) эти члены, как нетрудно видеть, суть нули. Следовательно, точка торможения потока не дает дополнительного вклада в первую вариацию целевого функционала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем некоторые замечания, на которые следует обратить внимание при использовании предложенного подхода.

1. Дополнительные члены, связанные с варьированием координат особой точки, представляют собой интегралы по параметру ω от некоторых функций. Необходимо правильно и без затруднений выбирать пределы интегрирования, точнее, направление интегрирования, или направление обхода особой точки. Направление обхода должно выбираться положительным, т.е. при движении от точки, соответствующей параметру ω_- (нижний предел интегрирования), до точки с параметром ω_+ (верхний предел интегрирования) область G должна всегда находиться слева.

2. Если из особой точки P в область G выходит линия, при переходе через которую фазовые переменные, управляющие функции и множители Лагранжа (или некоторые из них) испытывают разрыв I рода, то область G следует разбить на две подобласти так, чтобы линия разрыва разделяла бы эти подобласти, являясь общей частью их границы. Для каждой из подобластей уже можно будет использовать предложенный подход.

3. В данной работе рассмотрен случай, когда имелась одна особая точка на границе области G. Если же в задаче встречаются несколько особых точек, то принципиальных трудностей это не привнесет. В этом случае следует применить описанный подход к каждой особой точке.

4. С точки зрения подхода, описанного здесь, особые точки задачи ничем не отличаются от регулярных (неособых) точек (кроме поведения в окрестности этих точек фазовых переменных, управляющих функций, множителей Лагранжа). Поэтому упомянутый подход может быть применен и к регулярным точкам. Однако дополнительные члены, связанные с варьированием регулярных точек, оказываются равными нулю.

5. Если фазовые переменные, управляющие функции и множители Лагранжа (или некоторые из них) стремятся к бесконечности при приближении к особой точке, то, в принципе, описанный в настоящей работе подход может быть использован и в этом случае. В каждом таком конкретном случае необходимо проводить дополнительные исследования, устанавливающие законность примененных предельных переходов.

6. В настоящей работе рассматривался случай, когда особая точка лежит на границе области G. Предложенный подход позволяет, в принципе, определять вклад в вариацию целевого функционала особой точки, находящейся внутри области G.

7. Здесь рассмотрена вариационная задача, в которой фазовые переменные и управляющие функции в области G связаны системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Предлагаемый подход может быть распространен и на вариационные задачи, в которых фазовые переменные и управляющие функции в области связаны системой дифференциальных уравнений с частными производными более высокого порядка.

8. Следует отметить, что при выводе соотношений для вычисления членов, входящих в первую вариацию целевого функционала и связанных с варьированием координат особой точки, не использовалась детальная информация о поведении функций в окрестности этой точки, а лишь некоторая интегральная (точнее, функциональная) информация (непрерывность, ограниченность, ...).

9. Дополнительные члены, связанные с варьированием координат особой точки, определяются только параметрами дифференциальных связей, наложенных на фазовые переменные и управляющие функции в области G. Это обусловлено специальным выбором основного объемного функционала J, а именно: функция F не зависит от частных производных фазовых переменных $\bar{Z}$ и управляющих функций $\bar{U}$ по x и y. В общем случае дополнительные члены будут зависеть и от функции F. Таким образом, дополнительные члены, связанные с варьированием координат особой точки, определяются только параметрами, которые входят в двойной интеграл по области G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайко А.Н.* К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 312–320.
2. *Шипилин А.В.* Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // Сборник теоретических работ по гидромеханике. М.: ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
3. *Зубов В.И.* Об оптимальном сверхзвуковом профиле заданного утолщения // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1976. № 1. С. 89–96.
4. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
5. *Зубов В.И.* Об оптимальных профилях под малыми углами атаки в сверхзвуковом потоке газа // Прикл. матем. и механ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 88–96.
6. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
7. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ГИТТЛ, 1955. 248 с.
8. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
9. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 508 с.
10. *Guderley K.G., Armitage J.V.* A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Science Laboratory. Seattle. Washington. December 3–4. 1962. Рус. перев.: Гудерлей К.Г., Армитейдж Д.В. Общий метод определения оптимальных сверхзвуковых ракетных сопл // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. № 6. С. 85–101.
11. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Сер. Авиац. техника. 1963. № 2. С. 11–21.
12. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961. 228 с.
13. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
14. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
15. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
16. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 368 с.