ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 8, с. 1439–1447

УДК 519.16

О НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ[1)]

© 2019 г. Э. Н. Гордеев[1,*], В. К. Леонтьев[1,]**

([1] 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 2, МГТУ;
119133 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия)

**e-mail :werhorn@yandex.ru*

***e-mail: vkleontiev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 19.12.2018 г.
Переработанный вариант 02.02.2019 г.
Принята к публикации 08.02.2019 г.

Рассматривается задача о ранце с булевыми переменными и одним ограничением. Задача является NP-трудной в общем случае, для ее точного решения применяются различные переборные алгоритмы, использующие декомпозицию множества допустимых решений и вычисления оценок значения функционала. В работе получены комбинаторные формулы, позволяющие вычислять и оценивать значения функционала в различных случаях в зависимости от набора заданных параметров задачи. Рассмотрен также случай совпадения коэффициентов вектора ограничений и целевой функции. Отмечена связь множества решений задачи с определенного типа пороговыми функциями. В качестве параметров берутся коэффициенты целевой функции, вектора ограничений и объем рюкзака. Базовой техникой является классический метод производящих функций. Результаты, полученные в работе, в частности, могут быть использованы для оценки трудоемкости переборных и декомпозиционных методов решения задачи, а также непосредственно при их разработке в качестве вспомогательных процедур. Библ. 7.

Ключевые слова: задача о рюкзаке, производящие функции, NP-трудные задачи, оценка функционала.

DOI: 10.1134/S0044466919080076

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача о ранце с булевыми переменными имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_n)$ – n-мерный булевский вектор.

Везде в дальнейшем будем считать, что все параметры рассматриваемой задачи, числа $c_1, \ldots, c_n$; $a_1, \ldots, a_n$; b – неотрицательные целые числа. Множество допустимых решений этой задачи V_b – это множество булевых векторов, удовлетворяющих неравенству (2).

Объем V_b – это число $|V_b|$ допустимых решений задачи (1), (2). По аналогии с непрерывным случаем будем называть множество V_b многогранником допустимых решений задачи.

В общем случае задача (1.1) является NP-трудной и для ее решения используются переборные и декомпозиционные алгоритмы, поэтому актуален вопрос, как задача большей размерности связана со своими подзадачами меньшей размерности. Кроме того, в методах ветвей и границ используются процедуры оценок значений функционала, поэтому комбинаторные формулы для

[1)]Госзадание. Тема № 0063-2016-0003.

вычисления таких оценок могут либо непосредственно применяться в таких алгоритмах, либо служить для сравнения с используемыми.

Ряд результатов и примеров приведены в [1], [2]. Базовой основой техники доказательства служит метод производящих функций. Подробное его описание можно найти, например, в [3]. В обзорной книге [4], целиком посвященной задаче о рюкзаке, приведено множество результатов, характеризующих состояние дел в области исследования алгоритмов ее решения и различных свойств самой задачи. Основное внимание подавляющего большинства исследователей привлекают алгоритмические аспекты задачи, в частности, вероятностные характеристики в оценках их качества (см., например, [5]). Везде параметр ρ удовлетворяет условиям: $0 < \rho < 1$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Сначала приведем несколько известных базовых результатов. Они будут либо прямо использованы нами, либо необходимы для понимания проблематики. Удобным “инструментом” анализа распределения точек многогранника задачи является полином

$$P_b(z_1,\dots,z_n) = \sum_{x\in V_b} z_1^{a_1x_1} z_2^{a_2x_2}\dots z_n^{a_nx_n}. \tag{2.1}$$

Следующий полином используется для исследования значений функционала задачи:

$$F_b(z_1,\dots,z_n) = \sum_{x\in V_b} z_1^{c_1x_1} z_2^{c_2x_2}\dots z_n^{c_nx_n}. \tag{2.2}$$

Примеры и иллюстрации использования этих полиномов в различных типах задачи о ранце даны в [1], [2].

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\sum_{b=0}^{\infty} P_b(z_1,\dots,z_n)u^b = \frac{(1+(z_1u)^{a_1})\dots(1+(z_nu)^{a_n})}{1-u}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Преобразуем сумму (2.1), используя метод коэффициентов (в первом равенстве цепочки нижеприведенных выкладок учтено соотношение (1.2)):

$$\begin{gathered}
P_b(z_1,\dots,z_n) = \sum_{t=0}^{b}\sum_{\{x_1,\dots,x_n\}} z_1^{a_1x_1}z_2^{a_2x_2}\dots z_n^{a_nx_n}\operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}}{u^{t+1}}\right\} = \operatorname*{Coef}_u\left\{\sum_{t=0}^{b}\frac{1}{u^{t+1}}\sum_{x_1=0}^{1}(z_1u)^{a_1x_1}\dots\sum_{x_n=0}^{1}(z_nu)^{a_nx_n}\right\} = \\
= \operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{\frac{1}{u}-\frac{1}{u^{b+2}}}{1-\frac{1}{u}}\prod_{k=1}^{n}(1+(z_ku)^{a_k})\right\} = \operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\prod_{k=1}^{n}(1+(z_ku)^{a_k})\right\}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Сравнивая (2.3) и (2.4) получаем, что (2.3) просто “содержится” в (2.4). Лемма доказана.

Следствие. Для объема области допустимых решений имеет место равенство

$$|V_b| = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|u|=\rho}\frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}}du. \tag{2.5}$$

Сам смысл метода коэффициентов – это выражение коэффициента при минус первой степени переменной (оно представлено формулой (2.4)) через сумму вычетов – формула (2.5). Именно это и приведено в качестве следствия из леммы.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$F_b(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|u|=\rho}\frac{(1+z_1^{c_1}u^{a_1})\dots(1+z_n^{c_n}u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}}du. \tag{2.6}$$

Доказательство. Преобразуем сумму (2.2), используя метод коэффициентов (в первом равенстве цепочки нижеприведенных выкладок учтено соотношение $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$):

$$F_b(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{t=0}^{b}\sum_{\{x_1,\ldots,x_n\}}z_1^{c_1x_1}z_2^{c_2x_2}\ldots z_n^{c_nx_n}\operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}}{u^{t+1}}\right\}=$$

$$=\operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u^{b+2}}}{1-\dfrac{1}{u}}\prod_{k=1}^{n}(1+z_k^{c_k}u^{a_k})\right\}=\operatorname*{Coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\prod_{k=1}^{n}(1+z_k^{c_k}u^{a_k})\right\}.$$

Вновь напомним, что метод коэффициентов – это выражение коэффициента при минус первой степени переменной (оно представлено последней формулой приведенной выше цепочки выкладок) через сумму вычетов. А это и есть формула (2.6). Лемма доказана.

Иллюстрации этих утверждений и их применение будут описаны в дальнейших примерах и построениях.

Замечание. Если теперь рассмотреть случай, когда переменные в задаче – натуральные числа, то формулы (2.2), (2.3) и (2.6) приобретают вид

$$\sum_{b=0}^{\infty}P_b(z_1,\ldots,z_n)u^b=\frac{1}{(1-u)(1-u^{z_1a_1})\ldots(1-u^{z_na_n})},$$

$$|V_b|=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|u|=\rho}\frac{du}{(1-u^{a_1})\ldots(1-u^{a_n})(1-u)u^{b+1}},$$

$$F_b(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|u|=\rho}\frac{du}{(1-z_1^{c_1}u^{a_1})\ldots(1-z_n^{c_n}u^{a_n})(1-u)u^{b+1}}.$$

3. ВЕЛИЧИНА ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

Рассмотрим производящую функцию (2.2), которая характеризует распределение значений функционала

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

рассматриваемой оптимизационной задачи. Пусть A_k – это число допустимых решений задачи, в которых значение целевой функции

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

равно k. Очевидно, что k ограничено. Введем обозначение

$$\Phi_b(z)=F_b(z,\ldots,z)=\sum_{x\in V_b}z^{c_1x_1}z^{c_2x_2}\ldots z^{c_nx_n}=\sum_{k=0}^{\infty}A_kz^k. \tag{3.1}$$

Теперь из введенных определений, обозначений и формулы (3.1) получаем соотношение:

$$|V_b|=\Phi_b(1)=F_b(1,\ldots,1)=\sum_{x\in V_b}z^{c_1x_1}z^{c_2x_2}\ldots z^{c_nx_n}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k.$$

В частности, заметим, что

$$\max_{x\in V_b}f(x_1,\ldots,x_n)=\max_{x\in V_b}\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\max_{k:A_k\geq1}A_k.$$

Из леммы 2 получаем формулу

$$\Phi_b(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1 + z^{c_1}u^{a_1})\ldots(1 + z^{c_n}u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du.$$

Будем считать, что все точки многогранника V_b равновероятны, тогда значения

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

есть случайная величина $\xi = \xi(a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots c_n, b)$ с производящей функцией

$$P(z) = \frac{\Phi_b(z)}{\Phi_b(1)}.$$

Обозначим ее математическое ожидание через $\mu(\xi)$.

Для нахождения ее первого момента (математического ожидания) вычислим первую производную $P(z)$ в точке $z = 1$.

Пусть

$$\varphi(z, u) = \prod_{k=1}^{n} (1 + z^{c_k}u^{a_k}).$$

Тогда имеем

$$\frac{\varphi'(z, u)}{\varphi(z, u)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k u^{a_k} z^{c_k - 1}}{1 + u^{a_k} z^{c_k}}.$$

Отсюда получаем

$$\Phi_b'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \frac{u^{a_k} z^{c_k-1}}{1 + u^{a_k} z^{c_k}} \frac{\varphi(z,u)}{(1-u)u^{b+1}} \right) du = \sum_{k=1}^{n} c_k z^{c_k-1} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \left(\frac{u^{a_k}}{1 + u^{a_k} z^{c_k}} \frac{\varphi(z,u)}{(1-u)u^{b+1}} \right) du.$$

Подставляем $z = 1$ и в результате получим

$$\Phi'(1) = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{u^{a_k}(1 + u^{a_1})\ldots(1 + u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}(1 + u^{a_k})} du.$$

Рассмотрим теперь n проекций V_b — множества допустимых решений задачи. Они строятся следующим образом. Проекция с номером $k = 1, \ldots, n$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i x_i \le b, \quad x \in B^{n-1}.$$

Обозначим это подмножество через V_b^k, т.е. это множество решений задачи на единицу меньшей размерности, которая получается из исходного при отбрасывании k-го слагаемого в ограничении.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{|V_b^k|}{|V_b|} \right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Из (3.1) получаем

$$\Phi'_b(1) = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{u^{a_k}(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}(1+u^{a_k})} du =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+u^{a_i})}{(1-u)u^{b+1}} du - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+u^{a_i})}{(1-u)u^{b+1}(1+u^{a_k})} du \right].$$

Заметим, что суммирование идет по k, а b в данном случае – параметр. Применим теперь формулу (2.5) и вынесем $|V_b|$ из под интеграла и суммирования в первом слагаемом. Кроме того, заметим, что из той же леммы 1 (формулы (2.5)) следует, что

$$V_b^k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_{k-1}})(1+u^{a_{k+1}})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du.$$

Получим соотношение

$$\Phi'_b(1) = |V_b| \sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \left|V_b^k\right|. \tag{3.3}$$

Далее заметим, что $P(z) = \Phi_b(z)/\Phi_b(1)$, а $\mu(\xi) = P'(1)$. С учетом (3.3) и того, что

$$|V_b| = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|u|=\rho} \frac{(1+u^{a_1})\dots(1+u^{a_n})}{(1-u)u^{b+1}} du,$$

получаем искомое соотношение

$$\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{\left|V_b^k\right|}{|V_b|}\right).$$

Теорема доказана.

Эта формула может применяться для оценок эффективности алгоритмов решения задачи (1.1).

Проиллюстрируем ее на простых примерах.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу о ранце:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}.$$

У этой задачи 7 допустимых решений (все точки B^3, кроме (111)). А теперь подсчитаем V_b^k для $k =$ = 1, 2, 3.

Они все равны 4: число решений неравенств

$$2x_2 + x_3 \le 3, \quad x_1 + x_3 \le 3, \quad x_2 + x_3 \le 3.$$

Подставляем в (3.2) и получаем

$$\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{\left|V_b^k\right|}{|V_b|}\right) = \frac{1}{7}(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 18/7.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь следующую задачу о ранце:

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 6,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}.$$

У этой задачи тоже 7 допустимых решений (точки B^4: (0000), (1000), (0100), (0010), (1100), (1010), (0110)). А теперь подсчитаем V_b^k для $k = 1, 2, 3, 4$.

Они равны: 4, 4, 4, 7: число решений неравенств $2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 6$, $x_1 + 4x_3 + 8x_4 \le 6$, $x_1 + 2x_2 + 8x_4 \le 6$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 6$.

Подставляем в (3.2) и получаем $\mu(\xi) = \frac{1}{7}(0 + 1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6) = 21/7 = 3$.

Далее из нашей формулы имеем

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{\left|V_b^k\right|}{\left|V_b\right|}\right) = (1 - 4/7)(c_1 + c_2 + c_3) + c_4(1 - 7/7) = 3.$$

Теперь используем эту информацию для решения нашей задачи. Очевидно, что $x_4 = 0$, а две единицы в допустимом решении есть. Получаем

$$\max_{x \in V_b} f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{x \in V_b} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 6.$$

Пример 3. Пусть $a_i = 2^{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, а $b = 2_n$, тогда решения неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \quad x \in B^n,$$

есть все элементы B^n. Для любого k ищем решения неравенства

$$\sum_{i=1, i \ne k}^{n} a_i x_i \le b, \quad x \in B^{n-1}.$$

А это все элементы B^{n-1}. Поэтому $|V_b| = 2^n$, $\left|V_b^k\right| = 2^{n-1}$. Отсюда среднее значение

$$\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

а максимальное значение функционала равно $\sum_{k=1}^{n} c_k$.

4. ОДИН ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ

Этот случай состоит в том, что коэффициенты целевой функции и вектора ограничений совпадают, т.е. $a_i = c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что при

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \le b$$

справедливо равенство

$$\max_{x \in V_b} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Положим

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - c_k x_k.$$

И пусть

$$\overline{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} f_k(x_1,\ldots,x_n) = nf(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{и} \quad \overline{f} = \left(1-\frac{1}{n}\right) f(x_1,\ldots,x_n).$$

В [6] дано определение “непрерывной” функции, принимающей дискретные значения. (Напомним, что все параметры рассматриваемой задачи – неотрицательные целые числа.)

Определение. Функция

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

называется *непрерывной* на множестве $M \subseteq B^n$, если она принимает на M все значения из интервала $[f_{\min}, f_{\max}]$, где $f_{\min}$, $f_{\max}$ – минимальное и максимальное значения функции на $M \subseteq B^n$.

Примерами непрерывных функций на всем B^n являются следующие:

1) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} x_j$;

2) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} j x_j$;

3) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$.

А функция $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ не является непрерывной, так как не принимает значение 8.

Теорема 2. *Если*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

есть непрерывная функция на V_b, *то*

$$2^n - 1 \geq \max f(x_1,\ldots,x_n) \geq \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{|V_b^k|}{|V_b|}\right).$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = C, \quad c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n = N,$$

и $S(N, n)$ – число различных сумм из элементов C. Наименьшее значение

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

равно 0. Очевидно, что

$$S(N, n) \leq 2^n - 1.$$

Поэтому максимальное значение не превосходит $2^n - 1$. Кроме того, из теоремы 1 имеем неравенство

$$\max f(x_1,\ldots,x_n) \geq \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - \frac{|V_b^k|}{|V_b|}\right).$$

Теорема доказана.

При $\sum_{j=1}^{n} c_j \leq b$ эта верхняя оценка достижима. Если $c_i = 2^{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$S(N, n) = 2^n - 1$$

и

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

есть непрерывная функция с максимальным значением $2^n - 1$.

5. ЗАДАЧА О РАНЦЕ И ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

С задачей (1) можно связать следующую пороговую функцию:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \\ 0, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b. \end{cases}$$

Функцию $g(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, можно представить в виде (здесь сложение – это сложение по mod2)

$$g(x) = \sum_{w \in B^n} c_w x^w,$$

где

$$c_w \in B, \quad w = (w_1,\ldots,w_n) \in B^n, \quad x^w = x_1^{w_1},\ldots,x_n^{w_n}, \quad x_k^{w_k} = \begin{cases} x_k, & \text{если} \quad w_k = 1, \\ 1, & \text{если} \quad w_k = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Это представление называется *булевым* полиномом, полиномом Жегалкина, алгебраической нормальной формой (АНФ).

Рассмотрим классический частичный порядок на векторах булевого куба:

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \le y = (y_1,\ldots,y_n) \Leftrightarrow x_i \le y_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Пороговая функция $g(x)$ антимонотонна. Из того, что $u_i \le v_i$, $i = 1, \ldots, n$, очевидным образом следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Поэтому из того, что $g(u_1,\ldots,u_n) = 1$ следует, что $g(v_1,\ldots,v_n) = 1$.

Определение. Две задачи о ранце называются *эквивалентными*, если они определяются одной и той же пороговой функцией и множества их экстремумов совпадают. Пусть задано n натуральных чисел $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и

$$\sigma_A = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Определение. Решение $u = (u_1,\ldots,u_n)$ называется *отсекающим*, если никакая точка $v = (v_1,\ldots,v_n)$, $u < v$, решением задачи (1.1) не является.

Если y – некоторое отсекающее решение, то обозначим через $M(y)$ множество точек $v = (v_1,\ldots,v_n)$, $v < y$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ *– все отсекающие решения задачи* (1), *тогда множество допустимых решений этой задачи равно*

$$V_b = \bigcup_{i=1}^{m} M(y_i).$$

Доказательство. Пусть

$$A' = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} = r\}, \quad \sigma'_A = \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Тогда минимум и максимум функции

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$$

равны соответственно 0 и

$$\sigma'_A = \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Если

$$y \leq \sigma_A = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

то существует такое подмножество A, что y равно сумме чисел этого подмножества. Если же $\sigma_A < y < \sigma'_A$, то существует такое число $m < \sigma_A$, что $y = r + m$. Но это значит, что для числа m существует такое подмножество $A(m)$, что m равно сумме чисел этого подмножества $\sigma(m)$, а $a_{n+1} = r$, тогда $y = \sigma(m) + a_{n+1}$.

Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\} = \{3, 2, 3\}$, $b = 4$. Тогда множество допустимых решений задачи (1) состоит из шести точек: (000), (001), (010), (100), (110), (011). Коэффициенты в (5.1) все равны нулю, кроме четырех $c_{000} = c_{110} = c_{011} = c_{101} = 1$. Поэтому $g(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2$. Множество отсекающих решений состоит из трех точек: $y_1 = (100)$, $y_2 = (010)$, $y_3 = (001)$. Тогда

$$V_b = \bigcup_{i=1}^{3} M(y_i) = \{y_1, (000), y_2, (000), y_3, (000)\} = \{y_1, (000), y_2, y_3\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В.К.* Производящие функции в задаче о ранце // Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М.: МГУ, 2012. С. 255–257.
2. *Леонтьев В.К.* Комбинаторика и информация. Ч. 1. Комбинаторный анализ. М.: МФТИ, 2015. 174 с.
3. *Егорычев Г.П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 285 с.
4. *Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.* Knapsack problems. Berlin: Springer, 2004. 548 p.
5. *Дюбин Г.Н., Корбут А.А.*, Поведение в среднем жадных алгоритмов для минимизационной задачи о ранце – общие распределения коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1556–1570.
6. *Леонтьев В.К.* О псевдобулевых полиномах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1952–1958.
7. *Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К.* Производящие функции в задаче о ранце // Докл. АН. 2018. Т. 481. № 5. С. 478–480.