ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 8, с. 1420–1430

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА[1)]

© 2019 г. Г. В. Гренкин[1,2], А. Ю. Чеботарев[1,2,*]

([1] 690950 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный федеральный ун-т, Россия;
[2] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, Ин-т прикл. матем. ДВО РАН, Россия)

*e-mail: chebotarev.ayu@dvfu.ru

Поступила в редакцию 07.03.2019 г.
Переработанный вариант 07.03.2019 г.
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Рассматривается обратная задача с интегральным переопределением для уравнений сложного теплообмена, включающих P_1 приближение для стационарного уравнения переноса излучения. Найдены достаточные условия нелокальной однозначной разрешимости обратной задачи. Теоретический анализ проиллюстрирован численными примерами. Библ. 37. Фиг. 3.

Ключевые слова: квази-стационарные уравнения радиационного теплообмена, обратная задача, нелокальная однозначная разрешимость, численное моделирование.

DOI: 10.1134/S0044466919080088

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена представляют значительный интерес для инженерных приложений [1]–[5]. Процесс сложного теплообмена моделируется системой, состоящей из дифференциального уравнения теплопроводности и интегро-дифференциального уравнения переноса излучения. В работах [6]–[20] выполнен анализ краевых задач и задач оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с диффузионным P_1 приближением уравнения переноса излучения. Анализ различных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представлен в [21]–[26].

Настоящая работа посвящена анализу обратной задачи для квази-стационарных нелинейных уравнений сложного теплообмена [6], [10], где требуется определить неизвестную интенсивность тепловых источников по интегральному переопределению. Близкие обратные задачи для стационарных уравнений сложного теплообмена рассмотрены в [27] и для квазистационарных уравнений в [28].

Обратные задачи восстановления неизвестных функций источников в линейных параболических уравнениях и системах с интегральными условиями переопределения рассматривались в работах С.Г. Пяткова и др. [29]–[32]. Анализ обратных задач с конечномерным переопределением для уравнений Навье-Стокса, уравнений тепловой конвекции и других моделей сплошных сред представлен в [33]–[37].

Сформулируем постановку обратной задачи для квази-стационарной модели сложного теплообмена в ограниченной трехмерной области Ω с отражающей границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = q(t)f(x), \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект RFMEFI58417X0031).

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [16]. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ. Неотрицательные функции θ_b, β и γ являются заданными. Функция f описывает распределение тепловых источников, а неизвестная функция времени $q(t), t \in (0,T)$ описывает их интенсивность.

Обратная задача состоит в нахождении интенсивности источников $q(t), t \in (0,T)$, функций θ, φ, удовлетворяющих (1)–(3) и условию переопределения

$$\int_\Omega g(x)\theta(x,t)dx = r(t), \quad t \in (0,T), \tag{4}$$

где $g = g(x)$, $x \in \Omega$, $r = r(t)$, $t \in (0,T)$ — заданные функции.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 вводятся необходимые пространства и операторы, обратная задача формулируется в виде задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами. Разрешимость обратной задачи доказана в разд. 3. В разд. 4 выводятся априорные оценки, на основе которых доказывается единственность решения. Наконец, в разд. 5 представлен алгоритм решения обратной задачи для слоя с отражающими границами и приведены численные примеры.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Через L^p, $1 \le p \le \infty$, обозначаем пространство Лебега, через H^m — пространство Соболева W_2^m, а через $L^p(0,T;X)$ — пространство Лебега функций класса L^p, определенных на $(0,T)$, со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H, а через (h,v) — значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $h \in H$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \ge \beta_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \mathrm{Const}$, $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$.

(ii) $\theta_0 \in H$, $f \in H$, $g \in V$, $\|f\| = \|g\| = 1$, $(f,g)^2 = 1 - \mu^2$, $0 \le \mu < 1$.

(iii) $r \in H^1(0,T)$, $r(0) = (g,\theta_0)$.

Отметим, что условие $\|f\| = \|g\| = 1$ не является ограничительным, поскольку всегда можно сделать переобозначение: $f := f/\|f\|$, $q(t) := \|f\|q(t)$, $g := g/\|g\|$, $r(t) := \|g\|r(t)$.

Определим операторы и функционалы $A_{1,2}V \to V'$, $g_{1,2} \in L^\infty(0,T;V')$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$

$$(g_1, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (g_2, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma.$$

Билинейные формы (A_1u, v), (A_2u, v) определяют скалярные произведения в пространстве V, а соответствующие им нормы эквивалентны стандартной норме V. Поэтому определены непрерывные обратные операторы $A_1^{-1}, A_2^{-1} : V' \mapsto V$ и оператор $B : V' \mapsto V'$, $B = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$.

Будем использовать следующее обозначение: $[s]^p := |s|^p \operatorname{sign} s$, $p > 0$, $s \in \mathbb{R}$, для монотонной степенной функции.

Определение. Тройка $\{q,\theta,\varphi\}\in L^{5/4}(0,T)\times L^2(0,T;V)\times L^{5/4}(0,T;V)$ называется решением задачи (1)–(4), если $\theta'\in L^{5/4}(0,T;V')$ и почти всюду на $(0,T)$ справедливы равенства

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = g_1 + q(t)f, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = g_2, \quad (g,\theta(t)) = r(t), \tag{5}$$

а также выполняется начальное условие $\theta|_{t=0} = \theta_0$. Здесь и далее $\theta' = d\theta/dt$.

Нетрудно проверить, что уравнения (5) эквивалентны равенствам

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4 = h + q(t)f, \quad \varphi = (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(g_2 + \kappa_a[\theta]^4), \tag{6}$$

где $h = g_1 + b\kappa_a(A_2 + \kappa_a I)^{-1}g_2$. Отметим, что $B[\theta]^4 = ([\theta]^4 - \varphi) + (A_2 + \kappa_a I)^{-1}g_2$, где φ определяется по формуле (6), поскольку $B = I - \kappa_a(A_2 + \kappa_a I)^{-1} = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$. Из условия интегрального переопределения следует представление для интенсивности источника,

$$q(t) = \frac{1}{(f,g)}(A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4, g) + s(t), \quad \text{где} \quad s(t) = \frac{1}{(f,g)}\big(r'(t) - (h,g)\big). \tag{7}$$

В силу условия (iii) справедливо и обратное: из (6), (7) следует, что $(g,\theta(t)) = r(t)$, $t\in(0,T)$. Таким образом, задача (1)–(4) сводится к задаче Коши для уравнения с операторными коэффициентами:

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4 = \frac{1}{(f,g)}(A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4, g)f + h_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{8}$$

Здесь $h_0 = h + s(t)f$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для вывода условий разрешимости нам потребуются следующие вспомогательные результаты, доказательство которых приводится в конце статьи.

Лемма 1. *Пусть* $u\in L^5(\Omega), \eta\in V$, $A_2\eta + \kappa_a\eta = \kappa_a u$. *Тогда*

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \le \frac{\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|u\|_{L^5(\Omega)}. \tag{9}$$

Здесь

$$\sigma = \inf\left\{\frac{16}{25}\|\nabla v\|^2 + \int_\Gamma \gamma v^2 d\Gamma;\ v\in V,\ \|v\| = 1\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $B: V'\mapsto V'$, $B = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$. *Тогда для произвольных* $u,v\in V$ *справедливы неравенства*

$$(B[u]^4, u) \ge \frac{\sigma}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^5_{L^5(\Omega)}, \quad (B[u]^4, v) \le \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^4_{L^5(\Omega)}\|v\|_{L^5(\Omega)}. \tag{10}$$

Достаточным условием существования решения нелинейной обратной задачи является ограничение на параметр μ в (ii), которое выполняется, если угол между векторами f и g из $L^2(\Omega)$ достаточно мал.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и справедливо неравенство*

$$p_0 = \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma}|\Omega|^{3/10}\|g\|_{L^5(\Omega)}\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} < 1. \tag{11}$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет решение и при этом* $\theta\in L^5(Q)$.

Доказательство. Определим галеркинские приближения θ_m решения задачи (8) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \ldots, V_m = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Пусть $\theta_m(t) \in V_m$, $t \in (0,T)$, является решением следующей задачи Коши:

$$(\theta_m' + A_1\theta_m + b\kappa_a B[\theta_m]^4 - q_m f, \zeta) = (h_0, \zeta) \quad \forall \zeta \in V_m, \quad \theta_m|_{t=0} = \theta_{0m}. \tag{12}$$

Здесь

$$q_m = \frac{1}{(f, g_m)}(A_1\theta_m + b\kappa_a B[\theta_m]^4, g_m),$$

g_m, θ_{0m} – ортогональные проекции в H функций g, θ_0 на подпространство V_m. Отметим сразу, что

$$g_m \to g \text{ в пространстве } V, \quad \theta_{0m} \to \theta \text{ в пространстве } H. \tag{13}$$

Полагая $\zeta = g_m$ в (12), получаем равенство

$$(\theta_m', g_m) = (h, g_m) - \frac{(f, g_m)}{(f, g)}(h, g) + \frac{(f, g_m)}{(f, g)} r'(t),$$

проинтегрировав которое, заключаем в силу (13), что $(\theta_m, g_m) \in C[0,T]$ и при этом $(\theta_m, g_m) \to r$ в $C[0,T]$.

Выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V будем использовать скалярное произведение $(u,v)_V = (A_1 u, v)$ и соответствующую ему норму. Полагая $\zeta = \theta_m$ в (12) и используя лемму 2, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|^2 + \|\theta_m\|_V^2 + \frac{b\kappa_a\sigma}{\sigma + \kappa_a}\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^5 \le q_m(f, \theta_m) + (h_0, \theta_m). \tag{14}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (14):

$$|q_m(f, \theta_m)| \le \left(\|\theta_m\|_V \|g_m\| \|g_m\|_V + b\kappa_a \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma + \kappa_a} \|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \|g_m\|_{L^5(\Omega)} \right) \frac{|(f, \theta_m)|}{|(f, g_m)|}. \tag{15}$$

Заметим, что

$$\|\theta_m\|_V \|g_m\|_V \frac{|(f, \theta_m)|}{|(f, g_m)|} \le \frac{1}{4}\|\theta_m\|_V^2 + \frac{\|g_m\|_V^2}{(f, g_m)^2}\|\theta_m\|^2 \le \frac{1}{4}\|\theta_m\|_V^2 + C\|\theta_m\|^2. \tag{16}$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы через C обозначаем постоянные, не зависящие от m.

Далее,

$$\frac{|(f, \theta_m)|}{|(f, g_m)|} \le \frac{|(h_m, \theta_m)|}{|(f, g_m)|} + \frac{|(g_m, \theta_m)|}{\|g_m\|^2},$$

где $h_m = f - (f, g_m)g_m / \|g_m\|^2$ и при этом

$$\|h_m\| \to \mu, |(f, g_m)| \to |(f, g)| = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \frac{|(g_m, \theta_m)|}{\|g_m\|^2} \to |r| \quad \text{в} \quad C[0,T] \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поэтому

$$\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \frac{|(f, \theta_m)|}{|(f, g_m)|} \le \frac{\|h_m\|}{|(f, g_m)|}|\Omega|^{3/10}\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^5 + \frac{|(g_m, \theta_m)|}{\|g_m\|^2}\|g_m\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Следовательно, учитывая неравенство Юнга

$$\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \le \frac{4\varepsilon^{5/4}}{5}\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^5 + \frac{1}{5\varepsilon^5},$$

выводим при достаточно больших m и малом $\varepsilon > 0$ следующую оценку для слагаемого в правой части (15):

$$\frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \|g_m\|_{L^5(\Omega)} \frac{|(f, \theta_m)|}{|(f, g_m)|} \le \frac{1 + p_0}{2}\frac{\sigma}{\sigma + \kappa_a}\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^5 + C. \tag{17}$$

Неравенства (16), (17), а также оценка $(h_0, \theta_m) \le \frac{1}{4}\|\theta_m\|_V^2 + \|h_0\|_{V'}^2$, позволяют оценить правую часть (14). В результате получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m\|_V^2 + p\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^5 \le \|h_0\|_{V'}^2 + C(1 + \|\theta_m\|^2). \tag{18}$$

Здесь $p = (1 - p_0)/2$. Интегрируя дифференциальное неравенство (18) и применяя лемму Гронуолла, выводим, что

$$\text{последовательность } \theta_m \text{ ограничена в } L^\infty(0,T;H),\ L^2(0,T;V),\ L^5(Q). \tag{19}$$

Получим теперь оценку, гарантирующую компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$. В системе (12) положим $\zeta = \theta_m(t) - \theta_m(s)$ и проинтегрируем по t на промежутке $(s, s+h)$ и по s на $(0, T-h)$, считая $h > 0$ достаточно малым. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^{T-h}\|\theta_m(s+h) - \theta_m(s)\|^2\,ds = \int_0^{T-h}\int_s^{s+h} c_m(t,s)\,dt\,ds,$$

где

$$c_m(t,s) = (A_1\theta_m(t) + b\kappa_a B[\theta_m(t)]^4 - q_m(t)f - h_0(t), \theta_m(s) - \theta_m(t)).$$

Учитывая неотрицательность слагаемых $(A_1\theta_m(t), \theta_m(t))$ и $(B[\theta_m(t)]^4, \theta_m(t))$, получаем неравенство

$$c_m(t,s) \le (A_1\theta_m(t), \theta_m(s)) + b\kappa_a(B[\theta_m(t)]^4, \theta_m(s)) - (q_m(t)f - h_0(t), \theta_m(s) - \theta_m(t)).$$

Заметим, что с учетом ограниченности последовательности θ_m в $L^\infty(0,T;H)$, справедлива оценка

$$|(q_m(t)f, \theta_m(s) - \theta_m(t))| \le C\left(\|\theta_m(t)\|_V + \|\theta_m(t)\|_{L^5(\Omega)}^4\right).$$

Следовательно,

$$c_m(t,s) \le C\left(1 + \|h_0(t)\|_{V'}^2 + \|\theta_m(t)\|_V^2 + \|\theta_m(s)\|_V^2 + \|\theta_m(t)\|_{L^5(\Omega)}^4 + \|\theta_m(s)\|_{L^5(\Omega)}^4\right).$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от t, достаточно поменять порядок интегрирования. Используя ограниченность (19) последовательности θ_m, получаем оценку равностепенной непрерывности,

$$\int_0^{T-h}\|\theta_m(s+h) - \theta_m(s)\|^2\,ds \le Ch. \tag{20}$$

Полученные оценки (19), (20) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательности, что существует функция θ,

$$\theta_m \to \theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V),\ L^5(Q), \quad * - \text{слабо в } L^\infty(0,T;H), \text{ сильно в } L^2(Q). \tag{21}$$

Результатов о сходимости (21) достаточно для предельного перехода при $m \to \infty$ в системе (12) и доказательства того, что предельная функция θ удовлетворяет уравнению в (8) в смысле теории распределений и выполняется начальное условие. Отметим также, что поскольку из полученных оценок следуют включения $q \in L^{5/4}(0,T)$, $A\theta \in L^2(0,T;V')$, $B[\theta]^4 \in L^{5/4}(0,T;V')$, то функция θ' также принадлежит $L^{5/4}(0,T;V')$ и дифференциальное уравнение в (6) выполняется почти всюду на $(0,T)$. Кроме того, $\varphi = (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(\kappa_a[\theta]^4 + g_2) \in L^{5/4}(0,T;V)$. Отметим, что в случае $g = f$ условие (11) заведомо выполняется, поскольку $\mu = 0$. Именно этот случай рассмотрен в [28].

4. РЕГУЛЯРНОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Получим дополнительные оценки решения задачи (1)–(4), существование которого гарантируется теоремой 1.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), (11) *и дополнительно* $\theta_0 \in V$, $f \in V$, $\theta_b = 0$. *Тогда решение задачи* (1)–(4) *единственно и обладает свойствами*

$$\theta' \in L^2(0,T;V'), \quad \theta \in L^\infty(0,T;V) \cap L^5(0,T;L^{15}(\Omega)), \quad A_1\theta \in L^2(Q),$$

$$\varphi \in L^2(0,T;V), \quad q \in L^2(0,T).$$

Доказательство. Рассмотрим опять галеркинское приближение, использовавшееся при доказательстве теоремы 1. В качестве базисных функций $w_1, w_2, \ldots$ выберем собственные функции оператора A_1, $A_1 w_j = \lambda_j w_j$. В этом случае $A_1\theta_m \in V_m$. Полагая $\zeta = A_1\theta_m$ в (12), получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|_V^2 + \|A_1\theta_m\|^2 + (b\kappa_a B[\theta_m]^4 - q_m f, A_1\theta_m) = (h_0, A_1\theta_m). \tag{22}$$

Здесь

$$q_m = \frac{1}{(f, g_m)}(A_1\theta_m + b\kappa_a B[\theta_m]^4, g_m), \quad h_0 = \frac{1}{(f,g)} r'(t) f.$$

Заметим, что

$$(B[\theta_m]^4, A_1\theta_m) = ([\theta_m]^4, A_1\theta_m) - \kappa_a([\theta_m]^4, \eta_m),$$

где $\eta_m = (A_2 + \kappa_a I)^{-1} A_1\theta_m$. Пусть $\psi_m = [\theta_m]^{5/2}$. Тогда

$$([\theta_m]^4, A_1\theta_m) = \frac{16}{25}\|\nabla\psi_m\|^2 + \int_\Gamma \beta\psi_m^2 d\Gamma \geq C\|\psi_m\|_V^2.$$

Здесь снова через $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначаем различные постоянные, не зависящие от m. Далее, в силу леммы 2, непрерывности оператора $(A_2 + \kappa_a I)^{-1} A_1 : V \to V$, а также непрерывности вложения $V \to L^5(\Omega)$ получаем оценку

$$|([\theta_m]^4, \eta_m)| \leq \|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \|\eta_m\|_{L^5(\Omega)} \leq C\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^4 \|\eta_m\|_V \leq C_1\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta_m\|_V^2.$$

Аналогичным образом выводим оценки

$$|(B[\theta_m]^4, g_m)(f, A_1\theta_m)| \leq C_2\|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta_m\|_V^2, \quad |(A_1\theta_m, g_m)(f, A_1\theta_m)| \leq C_3\|\theta_m\|_V^2.$$

Кроме того,

$$(h_0, A_1\theta_m) = \frac{1}{(f,g)} r'(t)(f, A_1\theta_m) \leq |r'(t)|^2 + C_4\|\theta_m\|_V^2.$$

Таким образом, из (22) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|_V^2 + \|A_1\theta_m\|^2 + C\|\psi_m\|_V^2 \leq C_5\left(1 + \|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^3\right)\|\theta_m\|_V^2 + |r'(t)|^2. \tag{23}$$

Из оценок (19) следует, что $\int_0^T \|\theta_m\|_{L^5(\Omega)}^3 dt \leq C$ и поэтому, применяя неравенство Гронуолла, выводим из (23):

$$\text{последовательность } \theta_m \text{ ограничена в } L^\infty(0,T;V), \quad A_1\theta_m \text{ ограничена в } L^2(Q). \tag{24}$$

Заметим также, что

$$\int_0^T \|\theta_m\|_{L^{15}(\Omega)}^5 dt = \int_0^T \|\psi_m\|_{L^6(\Omega)}^2 dt \leq C_6\int_0^T \|\psi_m\|_V^2 dt \leq C.$$

Следовательно,

$$\text{последовательность } \theta_m \text{ ограничена в } L^5(0,T;L^{15}(\Omega)). \tag{25}$$

Из оценок (24), (25) вытекает, что для решения задачи (1)–(4) справедливы включения $\theta \in L^\infty(0,T;V) \cap L^5(0,T;L^{15}(\Omega))$, $A_1\theta \in L^2(Q)$. Далее из равенств

$$\varphi = (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(g_2 + \kappa_a[\theta]^4), \quad q(t) = \frac{1}{(f,g)}(A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4, g) + s(t),$$

$$\theta' = -A_1\theta - b\kappa_a B[\theta]^4 + h + q(t)f,$$

на основании полученных свойств регулярности θ, следуют включения $\varphi \in L^2(0,T;V)$, $q \in L^2(0,T)$, $\theta' \in L^2(0,T;V')$.

Заметим также, что функция $t \mapsto \|\theta^3\|^2_{L^3(\Omega)}$ интегрируема на $(0,T)$, что важно для доказательства единственности решения обратной задачи. Интегрируемость следует из того, что $\theta \in L^2(0,T;L^6(\Omega)) \cap L^5(0,T;L^{15}(\Omega))$, и неравенства Гёльдера

$$\left(\int_\Omega |\theta|^9 dx\right)^{2/3} \le \left(\int_\Omega |\theta|^6 dx\right)^{4/9} \left(\int_\Omega |\theta|^{15} dx\right)^{2/9} \le C\left(\frac{1}{3} + \left(\int_\Omega |\theta|^{15} dx\right)^{1/3}\right).$$

Докажем единственность решения. Пусть θ_1, θ_2 — температурные поля, соответствующие двум решениям обратной задачи, $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a B([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) = \frac{1}{(f,g)}(A_1\theta + b\kappa_a B([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), g)f, \quad \theta|_{t=0} = 0. \tag{26}$$

Умножим скалярно (26) на θ и воспользуемся следующей оценкой:

$$|(B([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), v)| = |([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4, Bv)| \le 2\left\||\theta_1|^3 + |\theta_2|^3\right\|_{L^3(\Omega)} \|\theta\|_{L^6(\Omega)} \|v\|,$$

которая справедлива, поскольку $\|Bv\| \le \|v\|$. Следовательно, с учетом непрерывности вложения $V \subset L^6(\Omega)$ и условия $\|f\| = \|g\| = 1$,

$$b\kappa_a|(B([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), \theta)| \le 2\left\||\theta_1|^3 + |\theta_2|^3\right\|_{L^3(\Omega)} \|\theta\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\| \le \frac{1}{3}\|\theta\|_V^2 + C\eta(t)\|\theta\|^2,$$

$$\frac{1}{(f,g)} b\kappa_a (B([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), g)(f,\theta) \le \frac{1}{3}\|\theta\|_V^2 + C\eta(t)\|\theta\|^2.$$

Здесь функция $\eta(t) = \left\||\theta_1|^3 + |\theta_2|^3\right\|^2_{L^3(\Omega)}$ интегрируема на $(0,T)$. Через $C > 0$ обозначена постоянная, зависящая только от b, κ_a, f, g и Ω. Учтем также, что

$$\frac{1}{(f,g)}(A_1\theta, g)(f,\theta) \le \frac{1}{3}\|\theta\|_V^2 + C\|\theta\|^2.$$

Так как $(A_1\theta, \theta) = \|\theta\|_V^2$, в результате получаем оценку

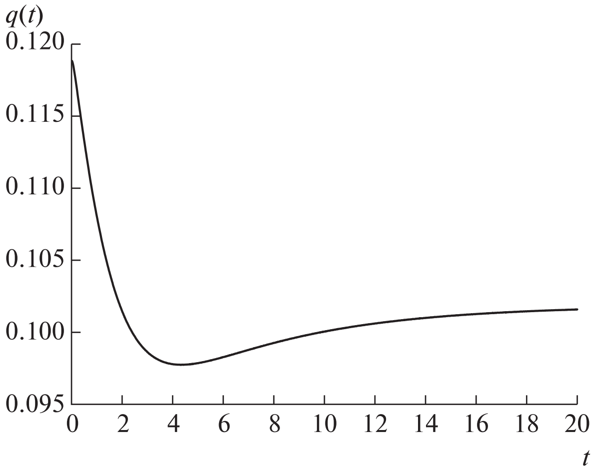
$$\frac{d}{2dt}\|\theta\|^2 \le C(1 + \eta(t))\|\theta\|^2,$$

из которой, в силу неравенства Гроноулла, следует, что $\theta = 0$.

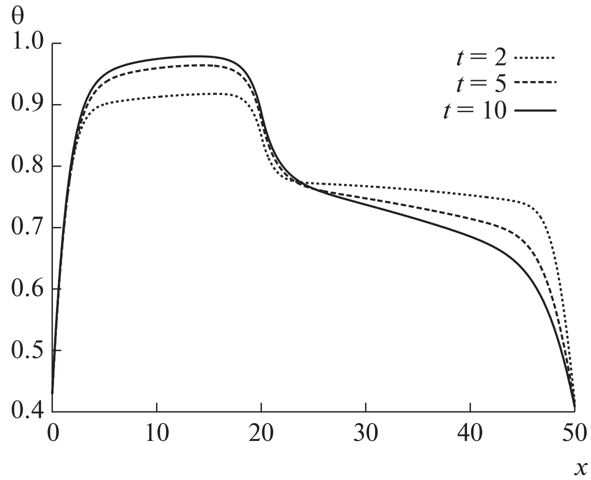
5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Представим алгоритм решения обратной задачи для одномерной модели, описывающей сложный теплообмен в плоскопараллельном слое толщиной L с отражающими границами.

Неизвестную интенсивность источников $q(t), t \in (0,T)$, аппроксимируем постоянной на каждом интервале сетки по времени, $q(t) = q_m$, $t \in (t_{m-1}, t_m)$, и последовательно подбираем q_m, $m = 1, 2, \ldots$, таким образом, чтобы выполнялось равенство $I(q_m) \equiv \int_0^L g(x)\theta(x,t_m)dx = r(t_m)$. Отметим, что в случае, когда функции f и g не меняют знак, естественно ожидать монотонности



Фиг. 1. Интенсивность источников.



Фиг. 2. Поле температуры при $t = 2, 5, 10$.

функции $I(q)$. Действительно, если, например, $f, g \geq 0$, то при увеличении интенсивности q источника тепла поле температуры и соответственно величина $I(q)$ должны увеличиваться. С учетом монотонности функции $I(q)$ для решения уравнения $I(q) = r$ можно использовать метод бисекций. Вначале выбираются числа q_1 и q_2 такие, что $I(q_1) < r$, $I(q_2) > r$. В качестве начального выбора этих чисел берутся значения $q_1 = q_0 - l_1$, $q_2 = q_0 + l_2$, где q_0 – значение $q(t)$, найденное на предыдущем временном слое, а l_1 и l_2 равны удвоенной разнице между значениями q_m, найденными на предыдущих двух временных слоях. Затем число l_1 увеличивается в 2 раза до тех пор, пока $I(q_1)$ не станет меньше r, а l_2 увеличивается в 2 раза до тех пор, пока $I(q_2)$ не станет больше r. Далее вычисляется значение $I(q)$ в точке $q_* = (q_1 + q_2)/2$, и если $I(q_*) < r$, то q_1 становится равным q_*, иначе q_2 становится равным q_*. Этот процесс повторяется до тех пор, пока $q_2 - q_1$ не станет меньше заданной величины lon, определяющей точность вычислений.

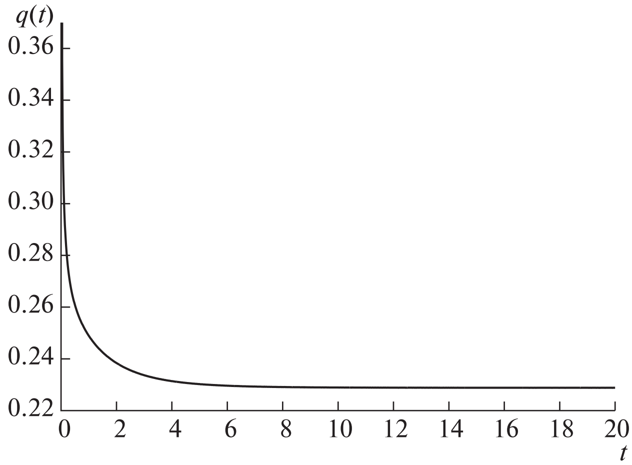
Для численного решения прямой задачи используется разностная схема неявного метода Эйлера с линеаризацией методом Ньютона на равномерной сетке. Исходный код программы доступен по ссылке https://github.com/grenkin/inverse_heat.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма даже в том случае, когда не выполнены достаточные условия однозначной разрешимости, представленные в предыдущих разделах. Пусть $L = 50$ см. Физические параметры среды соответствуют данным из [16]. Термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C, $a = 0.92$ см^2/с, $b = 18.7$ см/с. Положим $T = 20$ с, $\kappa_a = 0.01$ см$^{-1}$, $\alpha = 3.3...$ см, $\beta = 10$ см/с, $\gamma = 0.3$, $\theta_b = 0.4$. Начальная температура $\theta_0(x) = 0.8$, $x \in [0, L]$. В дальнейшем $f(x) = 1$, если $x \in [0, 20]$, и $f(x) = 0$ иначе, т.е. источники локализованы в левой части интервала $\Omega = (0, L)$. В качестве весовой функции в условии переопределения (4) выбираем следующую гладкую функцию с носителем $[x_1, x_2] \subset [0, L]$:

$$g(x; x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right)\right), \quad \text{если} \quad x \in (x_1, x_2), \quad \text{и} \quad g(x; x_1, x_2) = 0 \quad \text{иначе.}$$

Пример 1. Положим $g(x) := g(x; 10, 40)$, $x \in (0, 50)$, $r(t) = 12$, $t \in (0, T)$. Носители функций f и g пересекаются на отрезке $[10, 20]$. На фиг. 1 представлен график найденной интенсивности источников $q(t)$, $t \in (0, T)$, а на фиг. 2 – график поля температуры в моменты времени $t = 2, 5, 10$.

Используемый метод теоретического анализа обратной задачи предполагает, что пересечение носителей функций f и g имеет положительную меру, а также, что $g \in H^1(\Omega)$. Однако постановка обратной задачи (1)–(4) имеет смысл и при не выполнении указанных условий. Представлен-



Фиг. 3. Решение обратной задачи.

ный алгоритм численного решения работает и в этом случае. Приведем пример, когда носители функций f и g не пересекаются.

Пример 2. Положим $g(x) := g(x; 30, 50)$, $x \in (0, 50)$, $r(t) = 8$, $t \in (0, T)$. График вычисленной интенсивности $q(t)$ представлен на фиг. 3.

Отметим следующую особенность численного решения обратной задачи в случае непересекающихся носителей функций f и g. В примере 2 величина $q(t)$ достигает сравнительно большого значения (порядка 10^1) на первом временном слое, а значения $q(t)$ на последующих временных слоях имеют порядок 10^{-1}.

Отметим, что при постоянной функции $r(t) = \mathrm{Const}$ решение обратной задачи $q(t)$, начиная с некоторого момента времени, мало изменяется, что иллюстрирует стабилизацию решения обратной задачи.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1, 2

Лемма 1. *Пусть* $u \in L^5(\Omega)$, $\eta \in V$, $A_2\eta + \kappa_a\eta = \kappa_a u$. *Тогда*

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \le \frac{\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|u\|_{L^5(\Omega)}. \tag{27}$$

Здесь

$$\sigma = \inf\left\{\frac{16}{25}\|\nabla v\|^2 + \int_\Gamma \gamma v^2 d\Gamma;\ v \in V,\ \|v\| = 1\right\}.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение для η на срезку $[(\eta)_n]^4$, $n > 0$,

$$\alpha(\nabla\eta, \nabla[(\eta)_n]^4) + \int_\Gamma \gamma\eta[(\eta)_n]^4 d\Gamma + \kappa_a(\eta, [(\eta)_n]^4) = \kappa_a(u, [(\eta)_n]^4) \le \kappa_a\|u\|_{L^5(\Omega)}\|\eta\|_{L^5(\Omega)}.$$

Тогда для функции $\psi_n = [(\eta)_n]^{5/2}$ получаем оценку

$$(\sigma + \kappa_a)\|\psi_n\|^2 \le \frac{16}{25}\alpha\|\nabla\psi_n\|^2 + \int_\Gamma \gamma\psi_n^2 d\Gamma + \kappa_a\|\psi_n\|^2 \le \kappa_a\|u\|_{L^5(\Omega)}\|\eta\|_{L^5(\Omega)}.$$

Поэтому последовательность $\psi_n, n = 1, 2, \ldots,$ ограничена в пространстве V и $\psi_n \to \psi$ в H, где $\psi = [\eta]^{5/2}$. В пределе при $n \to +\infty$ получаем

$$(\sigma + \kappa_a)\|\psi_n\|^2 \le \kappa_a\|u\|_{L^5(\Omega)}\|\eta\|_{L^5(\Omega)},$$

откуда следует оценка (27).

Лемма 2. *Пусть* $B : V' \mapsto V'$, $B = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$. *Тогда для произвольных* $u, v \in V$ *справедливы неравенства*

$$(B[u]^4, u) \geq \frac{\sigma}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^5_{L^5(\Omega)}, \quad (B[u]^4, v) \leq \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^4_{L^5(\Omega)}\|v\|_{L^5(\Omega)}. \tag{28}$$

Доказательство. Заметим, что

$$(B[u]^4, u) = ([u]^4 - \kappa_a(A_2 + \kappa_a I)^{-1}[u]^4, u) = \|u\|^5_{L^5(\Omega)} - ([u]^4, \eta),$$

где $A_2\eta + \kappa_a\eta = \kappa_a u$. Поэтому, в силу леммы 1,

$$(B[u]^4, u) \geq \|u\|^5_{L^5(\Omega)} - \|u\|^4_{L^5(\Omega)}\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \geq \left(1 - \frac{\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\right)\|u\|^5_{L^5(\Omega)}\frac{\sigma}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^5_{L^5(\Omega)}.$$

Далее, $(B[u]^4, v) = ([u]^4, v - \xi)$, где $A_2\xi + \kappa_a\xi = \kappa_a v$. Следовательно,

$$(B[u]^4, v) \leq \|u\|^4_{L^5(\Omega)}\left(\|v\|_{L^5(\Omega)} + \|\xi\|_{L^5(\Omega)}\right) \leq \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma + \kappa_a}\|u\|^4_{L^5(\Omega)}\|v\|_{L^5(\Omega)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Larsen E.W., Thömmes G., Klar A., Seaïd M., Götz M.* Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comput. Phys. 2002. V. 183. № 2. P. 652–675.
2. *Modest M.F.* Radiative Heat Transfer. New York: Academic Press, 2003.
3. *Thömmes G., Pinnau R., Seaïd M., Götz M., Klar A.* Numerical methods and optimal control for glass cooling processes // Transport Theory and Statistical Physics. 2002. V. 31. № 4–6. P. 513–529.
4. *Tse O., Pinnau R., Siedow N.* Identification of temperature-dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy // Math. Models Methods Appl. Sci. 2012. V. 22. № 9. P. 1250019.
5. *Tse O., Pinnau R.* Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Commun. Math. Sci. 2013. V. 11. № 3. P. 679–707.
6. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
7. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 562–576.
9. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 275–282.
10. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
11. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu.* An iterative method for solving a complex heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. № 17. P. 9356–9362.
12. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
13. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
14. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
15. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
16. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
17. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.
18. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
19. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 816–823.

20. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
21. *Амосов А.А.* Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. ур-ния. Т. 41. № 1. 2005. С. 93–104.
22. *Amosov A.A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // J. Math. Sc. 2010. V. 164. № 3. P. 309–344.
23. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative – Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.
24. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.
25. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. (United States). 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
26. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. of Math. Sc.(United States). 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
27. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
28. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
29. *Пятков С.Г., Сафонов Е.И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2014. Т. 35. № 12(183). С. 61–75.
30. *Пятков С.Г., Сафонов Е.И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.
31. *Пятков С.Г., Уварова М.В.* Об определении функции источника в задачах тепломассопереноса по интегральным условиям переопределения // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 4. С. 93–100.
32. *Пятков С.Г.* О некоторых классах обратных задач об определении функции источника в системах конвекции-диффузии // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 10. С. 1385.
33. *Chebotarev A.Yu.* Subdifferential inverse problems for stationary systems of Navier-Stokes type // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3. № 4. P. 268–277.
34. *Чеботарев А.Ю.* Определение правой части системы Навье-Стокса и обратные задачи для уравнений тепловой конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 12. С. 2279–2287.
35. *Чеботарев А.Ю.* Стабилизация сторонними токами равновесных МГД конфигураций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2238–2246.
36. *Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для систем Навье–Стокса с конечномерным переопределением // Дифференц. ур-ния. 2012. Т. 48. № 8. С. 1166.
37. *Чеботарев А.Ю.* Обратные задачи для стационарных систем Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 519–528.