ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 8, с. 1296–1298

УДК 519.61

О НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

© 2019 г. Х. Д. Икрамов

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия)

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 21.11.2018 г.
Переработанный вариант 15.03.2019 г.
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Указан ряд областей локализации для собственных значений нормальной матрицы, которые могут быть найдены посредством рациональных алгоритмов, т.е. конечных процедур, использующих только арифметические операции. Библ. 3.

Ключевые слова: нормальная матрица, тёплицево разложение, дробно-линейная функция, рациональный алгоритм, индексы инерции эрмитовой матрицы, области локализации собственных значений.

DOI: 10.1134/S004446691908009X

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений эрмитовой матрицы H можно определить посредством конечной последовательности арифметических операций (к числу которых в комплексном случае следует отнести операцию сопряжения). Имеющиеся варианты: метод Лагранжа (или его комплексная версия) для приведения квадратичной формы к каноническому виду; метод Штурма в применении к характеристическому многочлену матрицы H и т.д. (см. [1, § 40; 2, § 19; 3, гл. 1, § 4.2]). Сочетая эти методы с приемом бисекции, можно локализовать каждое собственное значение H с любой требуемой точностью.

Будем называть *рациональным* всякий алгоритм с указанными выше двумя свойствами: конечностью и использованием только арифметических операций. Цель данной заметки – указать некоторые области локализации для собственных значений *нормальной матрицы* A, которые могут быть найдены применением к A рациональных процедур. Построение таких областей есть часть своеобразного метода бисекции (также рационального), который будет описан в последующей публикации автора. Рациональность важна потому, что рациональные алгоритмы способны давать точные результаты (для матриц с рациональными элементами), если используется возможность безошибочных вычислений с рациональными числами, предоставляемая системами компьютерной алгебры.

2. ТЁПЛИЦЕВО РАЗЛОЖЕНИЕ

Напомним, что тёплицевым (или эрмитовым) разложением квадратной комплексной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = B + iC, \quad B = B^*, \quad C = C^*. \tag{1}$$

Эрмитовы матрицы B и C в этом разложении однозначно определены:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Тёплицево разложение *нормальной* матрицы A характеризуется следующим свойством.

Предложение 1. *Квадратная матрица A нормальна, если и только если матрицы B и C в ее тёплицевом разложении перестановочны:*

$$BC = CB.$$

Выполним унитарное подобие, приводящее A к диагональному виду:

$$U^*AU = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Числа $\lambda_j = \beta_j + i\gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, суть собственные значения матрицы A. Матрица U приводит к диагональному виду и каждую из матриц B и C:

$$U^*BU = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad U^*CU = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Отсюда выводим

Предложение 2. *Собственные значения матрицы $B(C)$ суть вещественные (мнимые) части собственных значений нормальной матрицы A.*

3. ПОЛУПЛОСКОСТИ, ПОЛОСЫ И КРУГИ

Количество положительных и отрицательных собственных значений эрмитовой матрицы H называют ее индексами инерции (соответственно положительным и отрицательным) и обозначают $n_+(H)$ и $n_-(H)$. Символ $n_0(H)$ используется для обозначения размерности ядра (дефекта) матрицы H.

Применяя предложение 2 к разложению (1) нормальной матрицы A, получаем теорему.

Теорема 1. *Индексы $n_+(B)$ и $n_-(B)$ указывают число собственных значений матрицы A, находящихся соответственно в полуплоскостях* $\operatorname{Re} z > 0$ *и* $\operatorname{Re} z < 0$. *Тот же смысл по отношению к полуплоскостям* $\operatorname{Im} z > 0$ *и* $\operatorname{Im} z < 0$ *имеют числа $n_+(C)$ и $n_-(C)$.*

Заменяя в этой теореме матрицу A (также нормальной) матрицей $A - z_0 I$, получаем способ найти распределение собственных значений $\lambda_j(A)$ по отношению к произвольной вертикальной или горизонтальной прямой. Использование пары сдвигов позволяет определить число собственных значений внутри полос вида $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$ или $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$. Расположение собственных значений $\lambda_j(A)$ относительно наклонных прямых, проходящих через нуль, найдем, применяя теорему 1 к (нормальным) матрицам вида $e^{i\phi}A$. Наконец, повороты и сдвиги можно сочетать.

Как известно, дробно-линейная функция

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{2}$$

отображает мнимую ось плоскости z в единичную окружность плоскости w. Правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ переходит при этом в единичный круг. Обратной к (2) является функция

$$z = \frac{w + 1}{1 - w}.$$

Пусть нужно определить число собственных значений нормальной $n \times n$-матрицы A внутри единичного круга. Тогда можно поступить следующим образом: построить (нормальную) матрицу

$$\tilde{A} = (A + I_n)(I_n - A)^{-1}$$

и найти положительный индекс инерции компоненты $\tilde{B}$ в тёплицевом разложении $\tilde{A} = \tilde{B} + i\tilde{C}$. Это и будет искомое число. Отрицательный индекс $n_-(\tilde{B})$ даст число собственных значений матрицы A, модули которых больше 1.

4. КВАДРАНТЫ

Знания чисел $n_+(B)$, $n_+(C)$ и $n_-(C)$ недостаточно для определения количества собственных значений $n \times n$-матрицы A в том или ином квадранте. Так, даже если $n_+(B) = n_+(C) = n/2$, в первом квадранте собственные значения A могут отсутствовать.

Предположим для простоты, что A не имеет вещественных и чисто мнимых собственных значений, а также собственных значений, лежащих на биссектрисах $y = \pm x$. Справедливость каждого из этих предположений можно проверить посредством рациональных алгоритмов.

Обозначим через n_1, n_2, n_3 и n_4 число собственных значений A в каждом из четырех (открытых) квадрантов. Покажем, как определить эти числа.

Следующие два соотношения очевидны:

$$n_1 + n_4 = n_+(B), \tag{3}$$

$$n_1 + n_2 = n_+(C). \tag{4}$$

Квадрат нормальной матрицы $A = B + iC$ есть нормальная матрица с тёплицевым разложением

$$A^2 = B^2 - C^2 + 2iBC$$

(произведение перестановочных эрмитовых матриц B и C есть снова эрмитова матрица). При возведении в квадрат в верхнюю полуплоскость попадут квадраты тех чисел $\lambda_j(A)$, что лежат в первой и третьей четвертях. Отсюда выводим соотношение

$$n_1 + n_3 = n_+(BC). \tag{5}$$

Прибавим к (3)–(5) очевидное равенство

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что система линейных уравнений (3)–(6) однозначно разрешима относительно n_1, n_2, n_3 и n_4. В самом деле, ее определитель равен 2.

Заменяя A в приведенных выше рассуждениях матрицей $A - z_0I$, можем аналогичным образом найти число собственных значений A в множествах вида $\mathrm{Re}(z - z_0) > 0(<0) \cap \mathrm{Im}(z - z_0) > 0(<0)$.

5. СИММЕТРИЧНЫЕ СЕКТОРЫ

Таким же образом, как в разд. 4, можно найти числа $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_3$ и $\hat{n}_4$ для нормальной матрицы A^2. При этом $\hat{n}_1$ имеет смысл числа собственных значений A, попадающих в симметричные секторы $0 < \arg\lambda < \frac{\pi}{4}$ и $\pi < \arg\lambda < 5\frac{\pi}{4}$; $\hat{n}_2$ указывает число собственных значений $\lambda_j(A)$ в секторах $\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < \frac{\pi}{2}$ и $5\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 3\frac{\pi}{2}$ и т.д.

6. ПОЛУКРУГИ

Дробно-линейная функция (2) отображает первый квадрант плоскости z в полукруг $|w| < 1$, $\mathrm{Im}\,w > 0$, а четвертый квадрант – в полукруг $|w| < 1$, $\mathrm{Im}\,w < 0$. Если мы хотим определить число собственных значений нормальной матрицы A в одном из этих полукругов, то можно построить матрицу $\tilde{A} = (A + I_n)(I_n - A)^{-1}$ и найти для нее числа $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_4$, как это описано в разд. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Физматлит, 1996.
3. *Прасолов В.В.* Многочлены. МЦНМО, 2001.