

УДК 517.91

## О ЗАДАЧЕ ТОМАСА–ФЕРМИ И О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛера

© 2019 г. С. В. Пикулин

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия)

e-mail: spikulin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2019 г.  
Переработанный вариант 15.03.2019 г.  
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Рассмотрена двухточечная краевая задача для уравнения Эмдена–Фаулера – сингулярного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. При условии рациональности показателя степени в коэффициенте при нелинейном члене получены новые параметрические представления решения краевой задачи на луче и на отрезке. Для задачи на луче дана новая эффективная формула первого члена известного разложения Коулсона–Марча решения в окрестности бесконечности, получены обобщения этого представления и его аналоги для функции, обратной к решению. Для модели Томаса–Ферми многоэлектронного атома и положительно заряженного иона построены высокоэффективные вычислительные алгоритмы, позволяющие, в частности, найти решение задачи для атома (т.е. краевой задачи на луче) вместе с производной этого решения с любой заданной точностью в произвольной точке полупрямой. В основе полученных результатов лежит аналитическое свойство уравнения Абеля II рода специального вида, к которому приводится исходное уравнение Эмдена–Фаулера, а именно – свойство частичного прохождения модифицированного теста Пенлеве в узловой особой точке. Библ. 57. Фиг. 4. Табл. 2.

**Ключевые слова:** уравнение Эмдена–Фаулера, задача Томаса–Ферми, параметрическое представление, уравнение Абеля II рода, тест Пенлеве, индекс Фукса.

**DOI:** 10.1134/S0044466919080131

### 1. ВВЕДЕНИЕ

#### 1.1. Модель Томаса–Ферми

Согласно модели Томаса–Ферми многоэлектронного атома или иона при нулевой абсолютной температуре (см. [1]–[3, § 70]) безразмерная пространственная плотность заряда подчиняется нелинейному уравнению

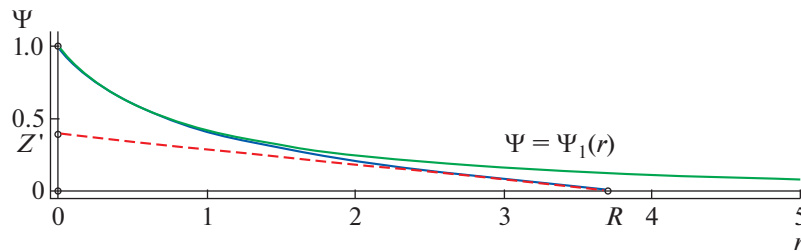
$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\Phi^{3/2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ . В сферически симметричном случае с учетом естественных требований к поведению  $\Phi$  на бесконечности и вблизи точечного ядра (т.е. при  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ ) модель (1.1) приводит к следующей краевой задаче для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{1}{\sqrt{r}}\Psi^{3/2}(r) = 0, \quad r \in (0, R), \quad (1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} \Psi(r) = Z, \quad \lim_{r \rightarrow R} \Psi(r) = 0, \quad (1.3)$$

где  $r = \text{const}|\mathbf{x}|$  – безразмерное расстояние до ядра, имеющего заряд  $+Z$ ,  $R \in (0, +\infty)$  – радиус иона ( $R = +\infty$  для атома), коэффициент экранирования  $\Psi = \Psi(r)$  определяет внутриатомный



**Фиг. 1.** Графики решений задачи (1.2), (1.3) при  $Z = 1$ , моделирующих атом ( $R = +\infty$ ) и положительно заряженный ион ( $R < +\infty$ ) Томаса–Ферми.

электростатический потенциал по формуле  $\Phi = \Psi/|x|$ . Полный заряд иона  $Z'$ ,  $0 < Z' < Z$ , может быть найден в данной модели по формуле

$$Z' = -R \frac{d\Psi}{dr}(R). \tag{1.4}$$

Графики решений задачи (1.2), (1.3) при  $Z = 1$  и различных значениях  $R$  приведены на фиг. 1.

Отметим, что базовые принципы модели Томаса–Ферми находят применение при моделировании неоднородного электронного газа в рамках так называемого метода функционала плотности (см. [4]).

*1.2. Уравнение Эмдена–Фаулера и некоторые свойства его решений*

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу для уравнения Эмдена–Фаулера (см. [5, гл. VIII]):

$$\frac{d^2y}{dr^2} - r^\nu y^{1+\sigma}(r) = 0, \quad r \in (0, R), \quad R \in (0, +\infty], \quad \nu > -1, \quad \sigma > 0, \tag{1.5}$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} y(r) = Z, \quad Z \in (0, +\infty), \tag{1.6}$$

$$\lim_{r \rightarrow R} y(r) = 0, \tag{1.7}$$

где  $R, Z$  – некоторые заданные числа. Отметим, что постановка (1.2), (1.3) является частным случаем задачи (1.5)–(1.7) при значениях параметров  $\nu = -1/2, \sigma = 1/2$ .

Известно (см. [5], [6]), что при  $0 < R \leq +\infty, Z \in (0, +\infty)$  задача (1.5)–(1.7) имеет единственное классическое решение, которое является монотонно убывающей положительной аналитической функцией на интервале  $r \in (0, R)$ . Известно также (см. [5, гл. VII, п. 7]), что каждое положительное решение  $y(r)$  уравнения (1.5) при  $\nu > -2$ , определенное на луче  $\{r > 0\}$ , имеет асимптотический вид

$$y(r) \sim f_0^{1/\sigma} r^{-\beta}, \quad r \rightarrow +\infty, \tag{1.8}$$

где

$$\beta := \frac{\nu + 2}{\sigma} > 0, \quad f_0 := \beta(\beta + 1) > 0, \tag{1.9}$$

кроме того, уравнение (1.5) инвариантно по отношению к следующей замене переменных:

$$\forall \kappa > 0: \quad r \mapsto (\kappa r), \quad y \mapsto (\kappa^{-\beta} y). \tag{1.10}$$

В частном случае задачи Томаса–Ферми (1.2), (1.3) параметры (1.9) принимают значения  $\beta = 3, f_0 = 12$ , и формула масштабирования (1.10) позволяет (см. [2], [7]) выразить решение  $\Psi(r)$  этой задачи через решение  $\Psi_1(r)$  той же задачи при  $Z = 1$  в виде

$$\Psi(r) = Z \Psi_1(Z^{-1/3} r).$$

В этой связи функцию  $\Psi_1(r)$  называют *стандартным решением* задачи Томаса–Ферми для нейтрального атома (см. [8, § 172]). Отметим, что для решения общей задачи (1.5)–(1.7) справедлива аналогичная формула

$$y(r) = Zy_1(Z^{-1/\beta}r). \quad (1.11)$$

При отрицательных значениях показателя  $\nu \in (-1, 0)$  левый конец  $r = 0$  рассматриваемого в задаче (1.5)–(1.7) промежутка  $r \in [0, R]$  является сингулярной точкой уравнения, поскольку коэффициент при нелинейном члене обращается в бесконечность. В отношении задачи (1.2), (1.3) известно (см. [9]), что при любых  $R \in (0, +\infty]$  ее решение в окрестности точки  $r = 0$  представляется сходящимся рядом Пуизё по степеням  $\sqrt{r}$ :

$$\Psi(r) = Z + b_2r + b_3r^{3/2} + \dots, \quad (1.12)$$

причем решениям при фиксированном  $Z$  и различных  $R$  соответствуют различные значения наклона графика в нуле  $\Psi'(0) = b_2 \in (-\infty, B]$ , где  $B = B(Z)$  – некоторое отрицательное число. Коэффициенты  $b_k$ ,  $k \geq 3$  определяются (см. [10]) по  $Z$  и  $b_2$  однозначно из уравнения (1.2). Решению задачи (1.2), (1.3) на полубесконечном промежутке ( $R = +\infty$ ) соответствует в разложении (1.12) критическое значение  $b_2 = B(Z)$ , которое при  $Z = 1$  равно

$$B(1) = \frac{d\Psi_1}{dr}(0) = -1.5880710226\dots \quad (1.13)$$

Отметим, что величина  $b_2$  имеет в модели Томаса–Ферми следующий физический смысл: с точностью до множителя это энергия кулоновского взаимодействия электронного облака с ядром (см. [8, § 174]).

Известно, что решение задачи (1.2), (1.3) при  $R = +\infty$  в окрестности бесконечности может быть приближенно найдено по следующей формуле (так называемое представление Коулсона–Марча, см. [11], [12]):

$$\Psi(r) = 12^2 r^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (rZ^{1/3})^{\alpha k}, \quad \alpha = \frac{7 - \sqrt{73}}{2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = A := -13.76\dots, \quad (1.14)$$

где каждый из коэффициентов  $a_k$ ,  $k \geq 2$ , выражается явно через  $a_0, \dots, a_{k-1}$  по формулам рекуррентного типа.

Отысканию численных значений критического наклона (1.13) в разложении (1.12) и константы  $A$  в разложении (1.14), а также разработке методов решения задачи (1.2), (1.3) посвящена обширная литература (см. [1], [2], [7], [10]–[45]).

### 1.3. Описание результатов

Для того, чтобы сформулировать результаты настоящей работы, введем в рассмотрение константы  $\omega_0$ ,  $\alpha$ , зависящие только от параметров  $\nu$ ,  $\sigma$  уравнения (1.5), по следующим формулам:

$$\omega_0 := -(2\beta + 1) < 0, \quad (1.15)$$

$$\alpha := -\frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 4\sigma f_0}}{2} < 0, \quad (1.16)$$

где числа  $\beta$ ,  $f_0$  определены равенствами (1.9). Если показатель  $\nu$  в уравнении (1.5) является рациональным числом, то будем представлять его в виде несократимой дроби

$$\nu =: \frac{N}{M} > -1, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad M \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

Основной результат (теорема 1) заключается в следующем параметрическом представлении решения задачи (1.5)–(1.7), (1.17) при  $R = +\infty$ :

$$r(t) = T_1 t^{1/\alpha} (1-t)^M \mathcal{H}(t), \quad y(t) = T_2 t^{-\beta/\alpha} \mathcal{H}^{-\beta}(t), \quad t \in (0, 1], \quad (1.18)$$

где величины  $\beta$ ,  $\alpha$  заданы формулами (1.9), (1.16) соответственно,  $T_1, T_2 = \text{const} > 0$ , функция  $\mathcal{H}(t)$  является положительной и аналитической на всем отрезке  $t \in [0, 1]$ , включая его концы. Отметим,

что значение параметра  $t = 0$  соответствует пределу при  $r \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow 0$ , а значение  $t = 1$  – точке  $r = 0$ ,  $y = Z$ . Для коэффициентов ряда Тейлора функции  $\mathcal{H}(t)$  в окрестности  $t = 0$  получены формулы рекуррентного типа и предложен метод вычисления тейлоровского разложения во внутренних точках отрезка  $t \in [0, 1]$ .

Представление (1.18) развивает известный (см. [38]–[45]) подход к построению решения задачи Томаса–Ферми в параметрическом виде. Отметим также построенный в работе [46] аналитико-численный метод решения сингулярной краевой задачи для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения, аналогичного уравнению (1.5). Новизна подхода настоящей работы заключается в использовании обнаруженного ранее (см. [47]) аналитического свойства уравнения Абеля II рода специального вида, к которому приводится исходное уравнение Эмдена–Фаулера, а именно, свойства частичного прохождения модифицированного теста Пенлеве (см. [48]) в узловой особой точке.

Основанный на представлении (1.18) (при  $M = 2$ ,  $N = -1$ ,  $\beta = 3$ ,  $\alpha = (7 - \sqrt{73})/2$ ) метод решения задачи (1.2), (1.3) сочетает в себе высокую точность получаемого результата с относительно небольшой вычислительной трудоемкостью, что трудно достижимо в рамках предлагавшихся ранее методов. В основе такого сочетания лежит тот факт, что ряд Тейлора функции  $\mathcal{H}(t)$  в точке  $t = 0$  демонстрирует экспоненциально быструю сходимость на всем отрезке  $t \in [0, 1]$  (эмпирическое значение радиуса сходимости  $\approx 1.2$ ; в работе также дана теоретическая оценка снизу этого радиуса), что позволяет эффективно находить решение  $\Psi(r)$  и его производную  $\Psi'(r)$  в произвольной точке луча  $r \in [0, +\infty)$  с практически любой наперед заданной точностью.

Также в работе получено (см. теорему 5) представление типа (1.18) решения двухточечной краевой задачи (1.5)–(1.7) на конечном отрезке  $[0, R]$  при  $R \in (0, +\infty)$ ,  $Z \in (0, +\infty)$ . Такая постановка в рамках модели Томаса–Ферми отвечает случаю положительно заряженного иона.

Следствием полученных параметрических формул (см. теорему 6) является представимость решения задачи (1.5)–(1.7) при  $R \in (0, +\infty)$ ,  $Z > 0$  и рациональном значении  $\nu$  в виде сходящегося в окрестности  $r = 0$  ряда

$$y(r) = Z + b_M r + b_{M+1} r^{1+1/M} + b_{M+2} r^{1+2/M} + \dots \quad (1.19)$$

по степеням  $r^{1/M}$ , где  $M$  определено формулой (1.17). Заметим, что при нарушении условия (1.17), а также при  $\nu \leq -1$  аналитическая структура решения  $y(r)$  в окрестности  $r = 0$  может иметь более сложный характер по сравнению с представлением (1.19) (см. [49, § 12.4]).

Как и в случае разложения (1.12), обобщением которого является ряд (1.19), значение коэффициента  $b_M \in (-\infty, B]$  параметризует решения задачи (1.5)–(1.7) при данном  $Z$  и различных  $R \in (0, +\infty]$ ; здесь  $B = B(Z, \sigma, \nu)$  – наклон графика в нуле решения задачи на полубесконечном интервале, т.е. при  $R = +\infty$ . Из (1.11) следует, что

$$B(Z, \sigma, \nu) = Z^{1+1/\beta} B(1, \sigma, \nu).$$

В данной работе получена формула (см. (2.15)) для критического значения  $B(1, \sigma, \nu)$  производной решения в нулевой точке при  $Z = 1$ , обобщающая известную формулу Майораны (см. [40]) для величины (1.13). В этой связи отметим построенный в работах [50], [51] аналитико-численный метод нахождения константы Блазиуса, возникающей в теории погранслоя.

Теорема 2 настоящей работы дает следующее представление в окрестности  $r = +\infty$  решения задачи (1.5)–(1.7),  $R = +\infty$ , обобщающее разложение (1.14) и уточняющее асимптотику (1.8):

$$y(r) = f_0^{1/\sigma} r^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z^{1/\beta} r)^{n\alpha}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = a_1(\sigma, \nu), \quad (1.20)$$

где коэффициенты  $a_n$  не зависят от  $Z$ , числа  $\beta$ ,  $\alpha$  заданы соответственно формулами (1.9), (1.16). Для  $a_1(\sigma, \nu)$  получена формула (см. (2.43)), позволяющая найти константу  $A$  в разложении (1.14) с любой заданной точностью (см. (3.5)).

Хорошо известно (см. [52]), что разложение (1.14) сходится лишь при достаточно больших значениях  $r$ . В теоремах 3 и 4 получены новые представления, аналогичные (1.20), (1.14), для обратной к решению  $y(r)$  функции  $r(y)$ :

$$r(y) = \frac{f_0^{1/(v+2)}}{y^{1/\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (y/Z)^{-n\alpha/\beta}, \quad (1.21)$$

$$r(y) = \frac{f_0^{1/(v+2)}}{y^{1/\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\circ} \mathcal{U}^n, \quad \mathcal{U} := 1 - \sqrt[1/\beta]{1 - (y/Z)^{-\alpha/\beta}} \in (0, 1], \quad (1.22)$$

причем ряд по  $\mathcal{U}$  в правой части первого равенства (1.22) в случае задачи (1.2), (1.3) демонстрирует экспоненциально быструю сходимость на всем промежутке  $\mathcal{U} \in [0, 1]$ , т.е. при  $y \in [0, Z]$ , что делает данную формулу пригодной для вычисления решения на всей области его определения. Приближая сумму этого ряда квадратичной функцией на единичном отрезке (см. п. 3.1), находим

$$r(\Psi) \approx 12^{2/3} \Psi^{-1/3} (1 - (\Psi/Z)^{-\alpha/3}). \quad (1.23)$$

Аналитичность функции  $\mathcal{H}(t)$  в представлении (1.18) при  $t = 1$  обусловлена некоторым свойством узловой особой точки уравнения Абеля II рода – вспомогательного уравнения первого порядка, к которому приводится исходное уравнение (1.5) в результате процедуры понижения порядка. Это свойство заключается в том, что семейство решений уравнения, проходящих через его узловую точку в начале координат, может быть задано общей формулой, включающей ряд по дробным степеням переменной, причем один из коэффициентов ряда является параметром данного семейства. Как показано в работе [47], такая аналитическая структура решений уравнения Абеля II рода вблизи его узловой особой точки связана с частичным прохождением некоторой модификации теста Пенлеве для данного уравнения. Отметим, что в работах [53]–[55] с помощью указанного свойства уравнения Абеля II рода были получены новые представления квази-стационарных решений нелинейных параболических уравнений типа Колмогорова–Петровского–Пискунова.

#### 1.4. Переход к автономному уравнению второго порядка

Положим

$$I(R) := (-\infty, \ln R), \quad R \in (0, +\infty], \quad (1.24)$$

где по определению  $\ln(+\infty) = +\infty$ . Пользуясь обозначениями (1.9), перейдем в задаче (1.5)–(1.7) к новым переменным

$$\Psi := f_0^{-1/\sigma} r^\beta y(r) > 0, \quad \rho := \ln r \in I(R), \quad (1.25)$$

относительно которых исходное уравнение (1.5) с учетом определения (1.15) принимает следующий автономный вид:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} + \omega_0 \frac{d\Psi}{d\rho} + f_0 \Psi (1 - \Psi^\sigma) = 0. \quad (1.26)$$

Тем самым, каждому решению  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7) взаимно однозначным образом сопоставлено решение  $\Psi(\rho)$  уравнения (1.26), заданное на промежутке  $I(R)$  вида (1.24). Обращая замену переменных (1.25), находим

$$r = \exp \rho, \quad y = f_0^{1/\sigma} \Psi r^{-\beta}. \quad (1.27)$$

Зафиксируем решение  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7) при некоторых  $0 < R \leq +\infty$ ,  $Z \in (0, +\infty)$  и рассмотрим поведение соответствующего решения  $\Psi(\rho)$  уравнения (1.26). Из формулы подстановки (1.25) и из условия (1.6) следует асимптотика

$$\Psi(\rho) = O(e^{\beta\rho}) \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow -\infty, \quad (1.28)$$

а из условия (1.7) и соотношения (1.8) вытекает равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \ln R} \psi(\rho) = \begin{cases} 0, & R \in (0, +\infty), \\ 1, & R = +\infty. \end{cases} \tag{1.29}$$

В силу автономности уравнения (1.26) его решение  $\psi(\rho)$  при сдвиге вдоль оси  $\rho$ ,

$$\rho \mapsto (\rho + \ln \kappa), \quad \kappa > 0, \tag{1.30}$$

переходит в решение этого же уравнения. Из формул (1.25), (1.27) видно, что перенос (1.30) соответствует масштабному преобразованию (1.10) уравнения (1.5). Кроме того, трансляция (1.30) сохраняет величину

$$\mu := \sup_{\rho \in I(R)} \psi(\rho) > 0, \tag{1.31}$$

которая, тем самым, является инвариантом масштабирования (1.10).

Исходя из условий (1.6), (1.7), докажем от противного следующее включение:

$$\mu \in (0, 1]. \tag{1.32}$$

В самом деле, из предположения  $\mu > 1$  и асимптотик (1.28), (1.29) вытекает наличие у функции  $\psi(\rho)$  локального максимума в некоторой точке  $\rho_0 \in I(R)$ ,  $\psi(\rho_0) > 1$ . Тогда в этой точке должны быть выполнены условия

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2}(\rho_0) \leq 0, \quad \frac{d\psi}{d\rho}(\rho_0) = 0, \quad \psi(1 - \psi^\sigma) < 0,$$

которые в совокупности противоречат уравнению (1.26). Таким образом, предположение  $\mu > 1$  не верно, и включение (1.32) выполнено.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из предложения 5 работы [47].

**Предложение 1.** Для каждого  $\mu$  из полуинтервала (1.32) существует решение  $\psi = \psi_\mu(\rho)$  задачи (1.26)–(1.29) на промежутке  $I(R)$  вида (1.24) при некотором  $R \in (0, +\infty]$ , имеющее заданное формулой (1.31) значение  $\mu$ . Функция  $\psi_\mu(\rho)$  определена однозначно с точностью до сдвига (1.30), при этом  $\mu = 1$  тогда и только тогда, когда  $R = +\infty$ .

Из проведенных выше рассуждений и из предложения 1 вытекает

**Предложение 2.** Множество решений  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7),  $Z \in (0, +\infty)$ ,  $R \in (0, +\infty]$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством решений задачи (1.26)–(1.29), (1.31), (1.32) при  $\mu \in (0, 1]$ . Это соответствие, заданное формулами (1.25), (1.27), согласовано с преобразованиями (1.10), (1.31) так, что промежуток (1.32) параметризует классы эквивалентности решений  $y(r)$  по отношению к масштабированию (1.10).

В дальнейшем нам будет удобно задавать решение  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7), не парой  $(R, Z)$ , где  $R \in (0, +\infty]$ ,  $Z \in (0, +\infty)$ , а парой  $(\mu, Z)$ , где  $\mu \in (0, 1]$ ,  $Z \in (0, +\infty)$ .

### 1.5. Понижение порядка уравнения и условие прохождения теста Пенлеве

Определим новую переменную  $p = p(\psi)$  в виде

$$p(\psi) := \frac{d\psi}{d\rho}, \tag{1.33}$$

тогда задача (1.26), (1.28), (1.29), (1.31) при  $\mu \in (0, 1]$  сведется к следующей (сингулярной) задаче Коши относительно  $p(\psi)$ :

$$p(\psi) \frac{dp}{d\psi} + \omega_0 p(\psi) + f_0 \psi(1 - \psi^\sigma) = 0, \quad p(\mu) = 0. \tag{1.34}$$

Определим индекс Фукса для узловой точки  $\psi = 0$ ,  $p = 0$  уравнения (1.34) с учетом (1.9), (1.15) следующим образом:

$$K := -\frac{\omega_0 + 2\beta}{\beta\sigma} = \frac{1}{\sigma\beta} = \frac{1}{\nu + 2}. \tag{1.35}$$

Если выполнено условие (1.17) и, тем самым,  $K \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ , то согласно [47, п. 2.3] уравнение (1.34) частично проходит модифицированный тест Пенлеве. В этом случае через  $\tilde{N}$  будем обозначать знаменатель дроби, представляющей  $K$ :

$$K =: \frac{M}{\tilde{N}} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1), \quad \tilde{N} = N + 2M > M. \quad (1.36)$$

Введем в рассмотрение переменные  $q, z$ , связанные с  $p, \psi$  следующим образом:

$$p =: \psi q, \quad \psi =: z^{\tilde{N}/\sigma}, \quad (1.37)$$

тогда относительно  $q(z)$  задача (1.34) принимает вид

$$\frac{\sigma}{2\tilde{N}} z \frac{dq^2}{dz} + q^2(z) + \omega_0 q(z) + f_0(1 - z^{\tilde{N}}) = 0, \quad (1.38)$$

$$q(\mu^{\sigma/\tilde{N}}) = 0, \quad \mu \in (0, 1]. \quad (1.39)$$

Согласно предложению 1 работы [47] все траектории, представляющие решения задачи (1.34) на плоскости  $(\psi, p)$ , приходят в начало координат  $\psi = 0, p = 0$  с наклоном  $\beta$  к горизонтали, а соответствующие решения задачи (1.38), (1.39) обладают свойством  $q(0) = \beta$ . Применяя теорему 1 той же работы [47], получаем

**Предложение 3.** *Всякое решение  $q(z)$  уравнения (1.38) с условием  $q(0) = \beta$  является аналитической при  $z = 0$  функцией вида*

$$q(z) = \beta \left( 1 + z^M \mathcal{Q}(z) \right), \quad (1.40)$$

где функция  $\mathcal{Q}(z)$  также аналитична при  $z = 0$ . Решения вида (1.40) образуют семейство, параметризованное величиной  $C := \mathcal{Q}(0)$ , т.е. для каждого  $C \in \mathbb{R}$  существует единственное решение  $q(z)$  вида (1.40). При этом коэффициенты Тейлора функции  $\mathcal{Q}(z)$  в точке  $z = 0$  рационально выражаются через  $\beta, M, \tilde{N}, C$ .

Решения  $q = q_\mu(z)$  задачи (1.38), (1.39) при  $\mu \in (0, 1]$  принадлежат указанному семейству, и формула (1.40) определяет для каждого  $\mu \in (0, 1]$  функцию  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\mu(z)$ . При этом отображение

$$(0, 1] \ni \mu \mapsto C(\mu) := \mathcal{Q}_\mu(0) \in (-\infty, C_1] \quad C_1 := C(1) = \mathcal{Q}_1(0) < 0,$$

является монотонным и взаимно однозначным.

Предложение 3 утверждает, таким образом, что при выполнении условия (1.17) переход в уравнении Абеля (1.34) к переменным  $z, \mathcal{Q}$  в определенном смысле устраняет нерегулярность этого уравнения в узловой точке  $\psi = 0, p = 0$ .

## 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛера

### 2.1. Решение задачи на полубесконечном промежутке

Рассмотрим задачу (1.5)–(1.7),  $R = +\infty$  при некотором  $Z > 0$ . Согласно предложениям 1, 2 ее решение  $y(r)$  выражается по формулам (1.27) через решение  $\psi = \psi_1(\rho)$  задачи (1.26), (1.28), (1.29), (1.31) при  $\mu = 1$ .

**2.1.1. Параметрическое представление решения и его производной.** Предположим, что для показателя  $\nu$  в уравнении (1.5) выполнено условие рациональности (1.17). Тогда теорема 2 работы [47] утверждает, что функция  $\psi = \psi_1(\rho)$  имеет следующее параметрическое представление:

$$\psi = (1 - t)^{\tilde{N}/\sigma}, \quad \rho = M \ln(1 - t) + \frac{1}{\alpha} \ln t + H(t), \quad t \in (0, 1), \quad (2.1)$$

где  $\tilde{N}$  определено формулой (1.36), функция  $H(t)$  является аналитической на отрезке  $t \in [0, 1]$  и выражается по формулам

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt, \quad h(t) = -\frac{1}{\alpha t} + M \mathcal{Q}(t) \frac{(1 - t)^{M-1}}{1 + (1 - t)^M \mathcal{Q}(t)} \quad (2.2)$$

через решение  $\mathcal{Q}(t)$  следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = -(\beta + 1)M \frac{(1-t)^{M-1}\mathcal{Q}^2(t) - (1-t)^{\tilde{N}-M-1}}{1 + (1-t)^M\mathcal{Q}(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.3)$$

$$\mathcal{Q}(0) = -1, \quad \frac{d\mathcal{Q}}{dt}(0) = -(\alpha + 1)M, \quad (2.4)$$

причем  $\mathcal{Q}(t)$  – убывающая отрицательная аналитическая функция на отрезке  $t \in [0, 1]$ , а входящая в знаменатель правой части уравнения (2.3) функция

$$g(t) := 1 + (1-t)^M\mathcal{Q}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.5)$$

является неотрицательной и возрастающей на единичном отрезке,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ . Здесь переменная  $t$  связана с  $z$  из (1.37) равенством

$$t + z = 1, \quad (2.6)$$

и  $g(t) = \beta^{-1}q(t)$ , где  $q(t)$  имеет вид (1.40).

Подставляя параметризацию (2.1) в формулы (1.27), с учетом равенства

$$\frac{\tilde{N}}{\sigma} - \beta M = 0, \quad (2.7)$$

вытекающего из (1.35), (1.36), получаем представление (1.18), где  $T_1 = \text{const} > 0$ ,

$$\mathcal{H}(t) := \exp H(t), \quad (2.8)$$

$$T_2 = f_0^{1/\sigma} T_1^{-\beta}. \quad (2.9)$$

Выберем константу  $T_1$  в (2.1) таким образом, чтобы удовлетворить краевому условию (1.6). Вводя обозначение

$$\mathcal{H}_e := \mathcal{H}(1), \quad (2.10)$$

подставляя  $t = 1$  в (1.18) и приравнявая  $Z$  полученное выражение для  $y$  при  $r = 0$ , запишем условие (1.6) в следующем виде:

$$f_0^{1/\sigma} T_1^{-\beta} \mathcal{H}_e^{-\beta} = Z,$$

откуда с учетом (2.9) найдем

$$T_1 = \frac{f_0^K}{\mathcal{H}_e} Z^{-1/\beta}, \quad T_2 = \mathcal{H}_e^\beta Z, \quad (2.11)$$

где показатель  $K$  задан равенством (1.35).

На основании формул (2.2), (2.8), (2.5) найдем производные функций  $r(t)$ ,  $y(t)$  в параметрическом представлении (1.18):

$$\frac{dy}{dt} = y(t) \frac{d \ln y}{dt} = -\beta y(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \ln t + H(t) \right) = -\beta \left( \frac{1}{\alpha t} + h(t) \right) y(t) = -\beta M \frac{(1-t)^{M-1} \mathcal{Q}(t)}{g(t)} y(t), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(t) \frac{d \ln r}{dt} = r(t) \frac{d}{dt} \left( M \ln(1-t) + \frac{1}{\alpha} \ln t + H(t) \right) = \left( -\frac{M}{1-t} + \frac{1}{\alpha t} + h(t) \right) r(t) = \\ &= \left( -\frac{M}{1-t} + M \frac{(1-t)^{M-1} \mathcal{Q}(t)}{1 + (1-t)^M \mathcal{Q}(t)} \right) r(t) = -\frac{M}{(1-t)g(t)} r(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя полученные выражения (2.12), (2.13), вычислим производную решения  $dy/dr$  в зависимости от параметра  $t \in (0, 1]$ :

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right)^{-1} = \beta \frac{y(t)}{r(t)} (1-t)^M \mathcal{Q}(t) = \beta \frac{T_2}{T_1} t^{-(\beta+1)/\alpha} \mathcal{H}^{-(\beta+1)}(t) \mathcal{Q}(t), \quad t \in (0, 1], \quad (2.14)$$



где константы  $T_1, T_2$  заданы равенствами (2.11). В частности, при  $t = 1$  из (2.14) с учетом (2.10), (2.11) получаем выражение для критического наклона графика  $y(r)$  при  $r = 0$ :

$$\frac{dy}{dr}(0) = \frac{T_2}{T_1} \mathcal{H}_e^{-\beta+1} \mathcal{Q}_e = f_0^{-K} Z^{(\beta+1)/\beta} \mathcal{Q}_e, \quad \mathcal{Q}_e := \mathcal{Q}(t)|_{t=1}. \tag{2.15}$$

Отметим, что в силу (2.12), (2.13), (1.18) обе производные  $dy/dt$  и  $dr/dt$  имеют нули порядка  $(M - 1)$  при  $t = 0$  и не обращаются в нуль в других точках единичного отрезка.

**2.1.2. Вычисление тейлоровских коэффициентов и оценка радиуса сходимости.** Найдем коэффициенты разложения введенных выше (2.2)–(2.4), (2.8) функций  $\mathcal{Q}(t), \mathcal{H}(t)$  по степеням переменной  $t$ . Используя обозначение (2.5), перепишем уравнение (2.3) в виде

$$g(t) \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = (\beta + 1)M \left( (1 - t)^{M-1} \mathcal{Q}^2(t) - (1 - t)^{\tilde{N}-M-1} \right), \quad t \in [0, 1], \tag{2.16}$$

и подставим в получившуюся систему (2.5), (2.16) формальные разложения

$$\mathcal{Q}(t) =: \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_n t^n, \quad \mathcal{Q}_0 = -1, \quad \mathcal{Q}_1 = -(\alpha + 1)M, \tag{2.17}$$

$$g(t) =: \sum_{n=1}^{\infty} g_n t^n, \quad g_n = \sum_{j=0}^M (-1)^j \binom{M}{j} \mathcal{Q}_{n-j}, \quad n \geq 1, \quad g_1 = -\alpha M. \tag{2.18}$$

Приравнявая коэффициенты при  $t^n, n \geq 2$ , в обеих частях равенства (2.16), получаем

$$\sum_{j=1}^n j \mathcal{Q}_j g_{n-j+1} = (\beta + 1)M \left[ \sum_{j,k=0}^n (-1)^{n-j-k} \binom{M-1}{n-j-k} \mathcal{Q}_j \mathcal{Q}_k + (-1)^{n+1} \binom{\tilde{N}-M-1}{n} \right].$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_n + n \mathcal{Q}_n g_1 - 2(\beta + 1)M \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_n = V_n, \tag{2.19}$$

где правая часть

$$V_n := (\beta + 1)M \left[ \sum_{j,k=0}^{n-1} (-1)^{n-j-k} \binom{M-1}{n-j-k} \mathcal{Q}_j \mathcal{Q}_k + (-1)^{n+1} \binom{\tilde{N}-M-1}{n} \right] - \mathcal{Q}_1 \sum_{j=1}^M (-1)^j \binom{M}{j} \mathcal{Q}_{n-j} - \sum_{j=2}^{n-1} j \mathcal{Q}_j g_{n-j+1} \tag{2.20}$$

зависит лишь от величин  $\mathcal{Q}_j, g_j, j = 0, \dots, (n - 1)$ , и не зависит от  $\mathcal{Q}_n$ . Найдем множитель при  $\mathcal{Q}_n$  в левой части (2.19):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 + n g_1 - 2(\beta + 1)M \mathcal{Q}_0 &= -(\alpha + 1)M - n\alpha M + 2(\beta + 1)M = \\ &= -(\alpha(n + 1) + 1 - 2(\beta + 1))M = -((n + 1)\alpha + \omega_0)M > 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Решая (2.19) как линейное уравнение относительно  $\mathcal{Q}_n$  последовательно при  $n = 2, 3, \dots$ , с учетом (2.21) получаем

$$\mathcal{Q}_n = \frac{V_n}{-(\omega_0 + (n + 1)\alpha)M}, \quad n \geq 2. \tag{2.22}$$

Формулы (2.18), (2.20), (2.22) позволяют вычислить каждый из коэффициентов разложения Тейлора (2.17) функции  $\mathcal{Q}(t)$  за конечное число арифметических операций.

Найдем коэффициенты ряда Тейлора

$$h(t) =: \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n \tag{2.23}$$

функции  $h(t)$  на основании (2.2), (2.5), (2.7):

$$h(t) = -\frac{1}{\alpha t} + \frac{M(1-t)^{M-1} \mathcal{Q}(t)}{g(t)} = \frac{M(1-t)^{M-1} \mathcal{Q}(t) - \alpha^{-1} t^{-1} g(t)}{g(t)} = \frac{t^{-1} (M(1-t)^{M-1} \mathcal{Q}(t) - \alpha^{-1} t^{-1} g(t))}{t^{-1} g(t)}. \tag{2.24}$$

Подставляя полученные выше разложения (2.17), (2.18) в выражение (2.24), находим

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n,$$

где  $G_n$  – коэффициент при  $t^n$  в числителе дроби (2.24),

$$G_n = -\frac{g_{n+2}}{\alpha} + M \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{M-1}{j} \mathcal{Q}_{n+1-j}, \quad n \geq 0, \tag{2.25}$$

откуда получаем

$$h_n = \frac{1}{g_1} \left( G_n - \sum_{j=0}^{n-1} h_j g_{n+1-j} \right), \quad n \geq 0. \tag{2.26}$$

Для тейлоровских коэффициентов  $H_n$  функции

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt =: \sum_{n=1}^{\infty} H_n t^n \tag{2.27}$$

имеем

$$H_n = \frac{h_{n-1}}{n}, \quad n \geq 1. \tag{2.28}$$

Ряд Тейлора функции (2.8) получаем, раскрывая скобки и приводя подобные члены в правой части формулы

$$\mathcal{H}(t) = \exp H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} H_{k+1} t^k \right)^n, \tag{2.29}$$

где коэффициент при  $t^n$  представляет собой многочлен от  $H_1, \dots, H_n$ .

Оценим радиус сходимости рядов (2.17), (2.18), (2.23), предполагая дополнительно, что значение параметра  $\sigma$  уравнения (1.5) лежит в диапазоне

$$\sigma \in (0, 1]. \tag{2.30}$$

Сначала покажем, что решение  $p = p_1(\psi)$  задачи (1.34),  $\mu = 1$ , является аналитической функцией в круге  $\mathbb{C} := \{|\psi - 1| < 1\}$ . Согласно предложению 4 работы [47] достаточно показать, что свободный член  $F(\psi) = f_0 \psi (1 - \psi^\sigma)$  этого уравнения обладает следующими свойствами: во-первых,  $F(\psi)$  является голоморфной внутри круга  $\mathbb{C}$  функцией, не обращающейся в этом круге в нуль нигде, кроме его центра  $\psi = 1$ , и, во-вторых, коэффициенты разложения функции  $F(\psi)/\psi$  в точке  $\psi = 1$  по степеням переменной  $\tau := (1 - \psi)$  образуют убывающую последовательность положительных чисел. Первое из этих условий, очевидно, выполнено; проверим второе условие:

$$f_0(1 - \psi^\sigma) = f_0(1 - (1 - \tau)^\sigma) = f_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \binom{\sigma}{k} \tau^k,$$

что с учетом условия (2.30) дает требуемый результат.

При замене переменной  $\psi$  на  $t$  при помощи подстановок (1.37), (2.6) круг  $\mathbb{C}$  сходимости функции  $p_1(\psi)$  конформно отображается на выпуклую “каплевидную” область  $\mathcal{D}$  аналитичности

функций  $\varrho(t), q(t), h(t), H(t), \mathcal{H}(t)$ . Область  $\mathcal{D}$  имеет угловую точку с раствором угла  $(\pi\sigma/\tilde{N})$  в точке  $t = 1$ . Расстояние от начала координат  $t = 0$  до границы  $\partial\mathcal{D}$  равно

$$R(\sigma, \tilde{N}) := 2^{\sigma/\tilde{N}} - 1. \tag{2.31}$$

Таким образом, получен следующий результат.

**Предложение 4.** При выполнении условия (2.30) функции  $\varrho(t), q(t), h(t), H(t), \mathcal{H}(t)$  голоморфны в области  $\mathcal{D}$  и величина (2.31) ограничивает снизу радиус сходимости рядов (2.17), (2.18), (2.23).

Получив значение функции  $\varrho(t)$  в некоторой внутренней точке единичного интервала  $t \in (0, 1)$ , можно найти в этой точке тейлоровские разложения функций  $\varrho(t), g(t)$  методом неопределенных коэффициентов из уравнений (2.5), (2.16), и затем вычислить соответствующие разложения функций  $h(t), H(t), \mathcal{H}(t)$  по формулам (2.24), (2.27)–(2.29).

Суммируем результаты, полученные в пп. 2.1.1, 2.1.2, в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Рассмотрим задачу (1.5)–(1.7),  $R = +\infty$  при  $Z \in (0, +\infty)$  и при условии (1.17). Тогда для решения  $y(r)$  этой задачи и его первой производной  $dy/dr$  справедливо параметрическое представление (1.18), (2.11), (2.14), т.е.

$$r = T_1(1-t)^M t^{1/\alpha} \mathcal{H}(t), \quad t \in (0, 1], \quad T_1 = \frac{f_0^K}{\mathcal{H}_e} Z^{-1/\beta}, \tag{2.32}$$

$$y = T_2 t^{-\beta/\alpha} \mathcal{H}^{-\beta}(t), \quad T_2 = \mathcal{H}_e^\beta Z, \tag{2.33}$$

$$\frac{dy}{dr} = T_3 t^{-(\beta+1)/\alpha} \mathcal{H}^{-(\beta+1)}(t) \varrho(t), \quad T_3 = \beta f_0^{-K} \mathcal{H}_e^{\beta+1} Z^{(\beta+1)/\beta}, \tag{2.34}$$

где константы  $\beta, f_0, \omega_0, \alpha, K, \mathcal{H}_e$  зависят только от  $\sigma, \nu$  и задаются формулами (1.9), (1.15), (1.16), (1.35), (2.10), функция  $\mathcal{H}(t)$  является положительной аналитической на отрезке  $t \in [0, 1]$  и выражается через решение  $\varrho(t)$  задачи (2.3), (2.4) по формулам (2.24), (2.27), (2.29). Разложения (2.17), (2.29) функций  $\varrho(t), \mathcal{H}(t)$  в ряды Тейлора в точке  $t = 0$  можно получить по формулам (2.18), (2.20), (2.22), (2.25)–(2.29). Если  $\sigma \in (0, 1]$ , то радиус сходимости этих рядов ограничен снизу величиной (2.31).

**2.1.3. Исключение параметра  $t$ .** Рассмотрим решение  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7), (1.17),  $R = +\infty$  при  $Z \in (0, +\infty)$  в виде (2.32), (2.33) и исключим параметр  $t$  из этого представления. Возводя в степень  $\sigma/\tilde{N}$  обе части равенства  $\psi = (f_0^{-1/\sigma} r^\beta y)$ , т.е. первой формулы (1.25), запишем результат с учетом (2.1), (2.7) в следующем виде:

$$r^{1/M} y^{\sigma/\tilde{N}} = f_0^{1/\tilde{N}} (1-t). \tag{2.35}$$

Выразим параметр  $t$  через  $r$  из равенства (2.32). Разделив обе части (2.32) на  $T_1$  и возведя их в степень  $\alpha$ , введем обозначения соответственно  $\tilde{r}$  и  $\xi$  для преобразованных левой и правой частей:

$$\tilde{r} = \tilde{r}(r) := \left(\frac{r}{T_1}\right)^\alpha = (1-t)^{M\alpha} t \mathcal{H}^\alpha(t) =: \xi(t), \quad t \in [0, 1], \quad r, \tilde{r} \in [0, +\infty], \tag{2.36}$$

где функция  $\xi = \xi(t)$  является аналитической по  $t$  на единичном полуинтервале.

Проверим, что  $d\xi/dt \neq 0$  при  $t \in [0, 1)$ . В самом деле, в силу (2.13) с учетом (2.5) имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi(t) \frac{d \ln \xi}{dt} = \alpha \xi(t) \frac{d \ln r(t)}{dt} = -\frac{M\alpha \xi(t)}{(1-t)g(t)} = -M\alpha(1-t)^{M\alpha-1} \frac{t}{g(t)} \mathcal{H}^\alpha(t) > 0,$$

таким образом, задаваемое формулой (2.36) соответствие  $t \mapsto \tilde{r} = \xi(t)$  монотонно и взаимно однозначно отображает полуинтервал  $t \in [0, 1)$  на луч  $\tilde{r} \in [0, +\infty)$ . Тогда существует обратная к  $\xi(t)$  возрастающая положительная аналитическая функция  $\theta = \theta(\tilde{r})$ , отображающая полуось  $\tilde{r} \in [0, +\infty)$  на промежуток  $t \in [0, 1)$ , и параметр  $t$  в представлении (2.32) с учетом связи (2.36) между  $\tilde{r}$  и  $r$  выражается через  $r$  в виде

$$t = \theta(\tilde{r}(r)). \tag{2.37}$$

Вычислим разложение функции  $\xi(t)$  по степеням переменной  $t$ . В окрестности  $t = 0$  справедливы формулы

$$(1 - t)^{M\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{M\alpha}{n} t^n = 1 - M\alpha t + \dots, \tag{2.38}$$

$$t \mathcal{H}^\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} \left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} H_{k+1} t^k \right)^n = t + \alpha H_1 t^2 + \dots,$$

перемножая которые, находим

$$\xi(t) = t - \alpha(H_1 - M)t^2 + \dots := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n t^n, \tag{2.39}$$

$$\theta(\tilde{r}) = \tilde{r} + \alpha(H_1 - M)\tilde{r}^2 + \dots := \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \tilde{r}^n, \tag{2.40}$$

где коэффициенты  $\xi_n, \theta_n$  полиномиально зависят от известных величин  $\alpha, M, H_1, \dots, H_{n-1}$ .

Подставляя выражение (2.37) для  $t$  в формулу (2.35), получаем следующие представления функции  $y = y(r)$ :

$$y^{\sigma/\tilde{N}} = \frac{f_0^{1/\tilde{N}}}{r^{1/M}} (1 - \theta(\tilde{r})), \quad y(r) = \frac{f_0^{1/\sigma}}{r^\beta} (1 - \theta(\tilde{r}))^{\tilde{N}/\sigma}, \quad \tilde{r} = \tilde{r}(r) \in (0, +\infty), \tag{2.41}$$

причем в окрестности  $r = +\infty$  представление (2.41) с учетом (2.40) принимает вид (1.20):

$$y(r) = \frac{f_0^{1/\sigma}}{r^\beta} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (rZ^{1/\beta} f_0^{-K} \mathcal{H}_e)^{n\alpha} \right)^{\tilde{N}/\sigma} =: \frac{f_0^{1/\sigma}}{r^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (rZ^{1/\beta})^{n\alpha}, \tag{2.42}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{\tilde{N}}{\sigma f_0^{\alpha K}} \mathcal{H}_e^\alpha. \tag{2.43}$$

Таким образом, получена следующая

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 параметр  $t \in (0, 1]$  выражается через  $r$  в виде (2.37). Для решения  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7),  $R = +\infty$ , справедливо представление (2.41), принимающее в окрестности  $r = +\infty$  вид (2.42), (2.43).

Выразим теперь параметр  $t$  через  $y$  из равенства (2.33). Возводя в степень  $-\alpha/\beta$  обе части этого равенства и вводя по аналогии с (2.36) обозначения  $\tilde{y}, \Xi$ , находим

$$\tilde{y} = \tilde{y}(y) := \left( \frac{y}{\mathcal{H}_e^\beta Z} \right)^{-\alpha/\beta} = t \mathcal{H}^\alpha(t) =: \Xi(t). \tag{2.44}$$

В силу (2.44), (2.12), (2.5), (1.18), при  $t \in [0, 1]$  имеем

$$\frac{d\Xi}{dt} = \Xi(t) \frac{d \ln \Xi}{dt} = t \mathcal{H}^\alpha(t) \left( -\frac{\alpha}{\beta} \frac{d \ln y(t)}{dt} \right) = M\alpha \frac{t}{g(t)} (1 - t)^{M-1} \mathcal{Q}(t) \mathcal{H}^\alpha(t),$$

следовательно, производная  $d\Xi/dt$  положительна при  $t \in (0, 1]$  и имеет нуль порядка  $(M - 1)$  при  $t = 0$ . Таким образом, заданное равенством (2.44) отображение  $t \mapsto \tilde{y} = \Xi(t)$  определяет взаимно однозначное (в силу монотонности) соответствие между отрезками  $t \in [0, 1]$  и  $\tilde{y} \in [0, \mathcal{H}_e^\alpha]$ , и существует обратная к  $\Xi(t)$  возрастающая аналитическая на полуинтервале  $\tilde{y} \in [0, \mathcal{H}_e^\alpha)$  функция  $\Theta = \Theta(\tilde{y})$ , имеющая (как функция комплексной переменной  $\tilde{y}$ )  $M$  – листовое ветвление при  $\tilde{y} = \mathcal{H}_e^\alpha$ . С помощью функции  $\Theta(\tilde{y})$  параметр  $t$  выражается через  $y$  в виде

$$t = \Theta(\tilde{y}(y)). \tag{2.45}$$

Для функции  $\Xi(t)$  в окрестности  $t = 0$  справедливо разложение (2.38), откуда находим разложение Тейлора в точке  $\tilde{y} = 0$  обратной функции:

$$\Theta(\tilde{y}) = \tilde{y} - \alpha H_1 \tilde{y}^2 + \dots =: \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \tilde{y}^n. \tag{2.46}$$

Подставляя  $t$  в виде (2.45) в формулу (2.35) и разрешая ее относительно  $r$ , получаем

$$r^{1/M} = \frac{f_0^{1/\tilde{N}}}{y^{\sigma/\tilde{N}}} (1 - \Theta(\tilde{y}(y))), \tag{2.47}$$

откуда с учетом разложения (2.46) вытекает представление (1.21) в окрестности  $r = 0$ , т.е.

$$r(y) = \frac{f_0^K}{y^{1/\beta}} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \tilde{y}^n \right)^M =: \frac{f_0^K}{y^{1/\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (y/Z)^{-n\alpha/\beta}, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = -M \mathcal{H}_e^\alpha. \tag{2.48}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** В условиях теоремы 1 параметр  $t \in (0, 1]$  выражается через  $y$  в виде (2.45), причем функция  $t = t(y)$  имеет в комплексной области  $M$  – листовое ветвление при  $y = Z$ . Для обратной к решению функции  $r = r(y)$  верно представление (2.44), (2.47), принимающее вид (2.48) в окрестности  $y = 0$ .

Круг сходимости ряда в правой части (2.48) заведомо не покрывает точку ветвления  $y = Z$  аналитической (по  $y$ ) функции (2.45), соответствующую точке  $M$  – листового ветвления  $\tilde{y} = \mathcal{H}_e^\alpha$  функции  $\Theta(\tilde{y})$ . Устраним эту особую точку, введя, во-первых, переменную  $\mathcal{U} \in [0, 1]$  по формулам

$$\tilde{y} =: \mathcal{H}_e^\alpha (1 - (1 - \mathcal{U})^M), \quad \mathcal{U} = 1 - \left( 1 - \frac{\tilde{y}}{\mathcal{H}_e^\alpha} \right)^{1/M} = 1 - \left( 1 - (y/Z)^{\alpha/\beta} \right)^{1/M}, \tag{2.49}$$

и, во-вторых, аналитическую на единичном отрезке функцию

$$\epsilon(\mathcal{U}) := \Theta(\tilde{y}(\mathcal{U})), \quad \frac{d\epsilon}{d\mathcal{U}} > 0, \quad \mathcal{U} \in [0, 1], \tag{2.50}$$

взаимно однозначно отображающую отрезок  $\mathcal{U} \in [0, 1]$  на промежуток изменения параметра  $t \in [0, 1]$ . Тогда формулу обращения (2.45) с учетом (2.49), (2.50) запишем следующим образом:

$$t = \epsilon(\mathcal{U}(y)). \tag{2.51}$$

Отметим, что в силу (2.46), (2.50) разложение  $\epsilon(\mathcal{U})$  в окрестности  $\mathcal{U} = 0$  имеет вид

$$\epsilon(\mathcal{U}) =: \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{U}^n = M \mathcal{H}_e^\alpha \mathcal{U} - \left( \frac{M(M-1)}{2} \mathcal{H}_e^\alpha + \alpha M^2 H_1 \mathcal{H}_e^{2\alpha} \right) \mathcal{U}^2 + \dots. \tag{2.52}$$

Подставляя (2.50) в (2.47), получаем зависимость  $r$  от  $y$  в виде

$$r^{1/M} = \frac{f_0^{1/\tilde{N}}}{y^{\sigma/\tilde{N}}} (1 - \epsilon(\mathcal{U})), \quad y \in (0, Z], \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(y) \in (0, 1]. \tag{2.53}$$

Возводя обе части равенства (2.54) в степень  $M$  и подставляя разложение (2.52), после раскрытия скобок получаем совпадающее с (1.22) представление в окрестности  $y = 0$  для обратной к решению функции

$$r(y) = \frac{f_0^K}{y^{1/\beta}} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{U}^n \right)^M =: \frac{f_0^K}{y^{1/\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \mathcal{U}^n, \quad A'_0 = 1, \quad A'_1 = -M^2 \mathcal{H}_e^\alpha. \tag{2.54}$$

Таким образом, получена

**Теорема 4.** В условиях теоремы 1 параметр  $t \in (0, 1]$  выражается через  $y$  в виде (2.51), (2.49), где функция  $\epsilon(\mathcal{U})$  является аналитической функцией на замкнутом отрезке  $\mathcal{U} \in [0, 1]$ . Для обратной к решению  $y(r)$  функции  $r = r(y)$  верно представление (2.53), принимающее вид (2.54) в окрестности  $y = 0$ .

2.2. Решение задачи на отрезке

Получим решение задачи (1.5)–(1.7), (1.17) при  $Z, R \in (0, +\infty)$  в предположении, что известно соответствующее (см. предложение 2) значение параметра  $\mu \in (0, 1)$ .

Теорема 3 работы [47] утверждает, что решение  $\psi = \psi_\mu(\rho)$  задачи (1.26)–(1.29), (1.31) при заданном  $\mu$  допускает следующее параметрическое представление:

$$\psi = \mu(1 - u)^{\tilde{N}/\sigma}(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma}, \quad \rho = M \ln(1 - u) + S(u), \quad u \in (u_1, 1], \quad u_1 := -\frac{1}{\tilde{N}}, \quad (2.55)$$

где функция  $S(u)$  является аналитической на полуинтервале  $u \in (u_1, 1]$  и выражается в виде

$$S(u) = \int^u s(u)du, \quad s(u) = M \frac{(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma-1} + (1 - u)^{M-1}\mathcal{P}(u)}{(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} + (1 - u)^M\mathcal{P}(u)} \quad (2.56)$$

через решение  $\mathcal{P}(u)$  следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathcal{P}}{du} = M(\beta + 1) \frac{(1 - u)^{M-1}\mathcal{P}^2(u) + (\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma-1}\mathcal{P}(u) + c(u)}{(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} + (1 - u)^M\mathcal{P}(u)}, \quad u \in (u_1, 1], \quad (2.57)$$

$$c(u) := -(\tilde{N} + 1)\mu^\sigma u(\tilde{N}u + 1)^{2/\sigma}(1 - u)^{\tilde{N}-M-1},$$

$$\mathcal{P}(0) = -1, \quad \frac{d\mathcal{P}}{du}(0) = M(\beta + 1) \left( -1 + \sqrt{\frac{(1 - \mu^\sigma)(\tilde{N} + 1)}{M(\beta + 1)}} \right). \quad (2.58)$$

Также в работе [47] показано, что  $\mathcal{P}(u) < 0$  при  $u \in (u_1, 1]$ , а знаменатель правой части уравнения (2.57) не обращается в нуль при  $u \neq 0$ .

Отметим, что если справедливо включение

$$\frac{1}{\sigma} \in \mathbb{N}, \quad (2.59)$$

то уравнение (2.57) удовлетворяет условию теоремы Коши (см. [56, § 3]) при  $u = -1/\tilde{N} = u_1$ , следовательно, функция  $\mathcal{P}(u)$  в этом случае является аналитической на всем отрезке  $u \in [u_1, 1]$ , включая его левый конец.

Подставляя параметризацию (2.55) в формулы (1.27) и полагая

$$\mathcal{S}(u) := \exp S(u), \quad (2.60)$$

с учетом (2.7) получаем

$$r = U_1(1 - u)^M \mathcal{S}(u), \quad U_1 = \text{const} > 0, \quad u \in (u_1, 1], \quad (2.61)$$

$$y = U_2(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} \mathcal{S}^{-\beta}(u), \quad U_2 = \mu f_0^{1/\sigma} U_1^{-\beta}. \quad (2.62)$$

Значение постоянной  $U_1$  найдем из сопоставления (2.62) и краевого условия (1.6), т.е.  $y = Z$  при  $u = 1$ :

$$U_1 = \frac{f_0^K \mu^{1/\beta}}{\mathcal{S}_e} (\tilde{N} + 1)^K Z^{-1/\beta}, \quad \mathcal{S}_e := \mathcal{S}(u)|_{u=1}, \quad (2.63)$$

где  $K$  задано формулой (1.35).

Вычислим производную  $dy/dr$  как функцию параметра  $u$ . Из формул (2.56), (2.60)–(2.62) с учетом (2.7) находим

$$\frac{d \ln y}{du} = \frac{\tilde{N}}{\sigma(\tilde{N}u + 1)} - \beta s(u) = \frac{-\beta M(\tilde{N} + 1)u(1 - u)^{M-1}}{(\tilde{N}u + 1)((\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} + (1 - u)^M\mathcal{P}(u))} \mathcal{P}(u), \quad (2.64)$$

$$\frac{d \ln r}{du} = -\frac{M}{1 - u} + s(u) = \frac{-M(\tilde{N} + 1)u(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma-1}}{(1 - u)((\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} + (1 - u)^M\mathcal{P}(u))}, \quad (2.65)$$

откуда получаем следующее выражение для производной:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{y}{r} \frac{d \ln y}{du} \left( \frac{d \ln r}{du} \right)^{-1} = U_3 \mathcal{G}^{-(\beta+1)}(u) \mathcal{P}(u) < 0, \quad U_3 = \beta \frac{U_2}{U_1} \mu \beta f_0^{1/\sigma} U_1^{-(\beta+1)}.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 5.** *Решение  $y(r)$  задачи (1.5)–(1.7), (1.17) при  $Z, R \in (0, +\infty)$  допускает следующее параметрическое представление:*

$$r = U_1(1-u)^M \mathcal{S}(u), \quad U_1 = \frac{f_0^K \mu^{1/\beta}}{\mathcal{S}_e} (\tilde{N} + 1)^K Z^{-1/\beta}, \quad u \in (u_1, 1], \tag{2.66}$$

$$y = U_2(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma} \mathcal{S}^{-\beta}(u), \quad U_2 = \frac{\mathcal{S}_e^\beta}{(\tilde{N} + 1)^{1/\sigma}} Z, \tag{2.67}$$

$$\frac{dy}{dr} = U_3 \mathcal{G}^{-(\beta+1)}(u) \mathcal{P}(u), \quad U_3 = \beta \frac{U_2}{U_1} = \frac{\beta \mathcal{S}_e^{\beta+1}}{\mu^{1/\beta} f_0^K (\tilde{N} + 1)^{(\beta+1)K}} Z^{(\beta+1)/\beta}, \tag{2.68}$$

где числа  $K, M, \tilde{N}$  заданы формулой (1.35),  $u_1 = (-1/\tilde{N})$ , функция  $\mathcal{S}(u)$  является аналитической на полуинтервале  $u \in (u_1, 1]$ ,  $\mathcal{S}_e = \mathcal{S}(1)$ , и справедливо представление (2.56), (2.60) функции  $\mathcal{S}(u)$  через решение  $\mathcal{P}(u)$  задачи (2.57), (2.58). Значение параметра  $\mu \in (0, 1)$ , входящего в уравнение (2.57), связано с решением  $y(r)$  формулами (1.31), (1.25).

Если выполнено условие (2.59), то функции  $\mathcal{P}(u), \mathcal{S}(u)$  являются аналитическими на всем отрезке  $u \in [u_1, 1]$ , включая его левый конец  $u = u_1$ .

Из формулы (2.68) при  $u = 1$  получаем значение наклона графика решения  $y(r)$  в концевой точке  $r = 0$  в следующем виде, аналогичном (2.15):

$$\frac{dy}{dr}(0) = \frac{\beta Z^{(\beta+1)/\beta}}{\mu^{1/\beta} f_0^K (\tilde{N} + 1)^{(\beta+1)K}} \mathcal{P}_e, \quad \mathcal{P}_e := \mathcal{P}(u)|_{u=1}. \tag{2.69}$$

Из формул (2.64), (2.65) и (2.61), (2.62) следует, что каждая из производных  $dr/du$  и  $dy/du$  представляется в виде произведения множителя  $(1-u)^{M-1}(\tilde{N}u + 1)^{1/\sigma-1}$ , задающего кратность нулей в концах отрезка параметризации  $u \in [u_1, 1]$ , и некоторой функции, не обращающейся в нуль нигде на этом отрезке.

Тейлоровские разложения функций  $\mathcal{P}(u), s(u), \mathcal{S}(u)$  в точке  $u = 0$  и других точках промежутка  $u \in (u_1, 1]$  могут быть вычислены, исходя из уравнения (2.57) по схеме, изложенной в п. 2.1.2.

### 2.3. Поведение решения вблизи начала координат

Покажем, что для решения  $y(r)$  уравнения (1.5), (1.17),  $Z \in (0, +\infty)$ , с условием (1.6) справедливо разложение вида (1.19) в окрестности  $r = 0$ . Для этого воспользуемся параметрическим представлением этого решения с параметром  $z$ , определяемым подстановкой (1.37).

Из второй формулы (1.25), подстановок (1.33), (1.37) и равенства (2.7) находим

$$\ln r = \int_{\psi}^{\Psi} \frac{d\psi}{p(\psi)} = \int_{\psi q(\psi)}^{\Psi} \frac{d\psi}{\psi q(\psi)} = \frac{\tilde{N}}{\sigma} \int_{z q(z)}^{\tilde{z}} \frac{dz}{z q(z)} =: \frac{\tilde{N}}{\sigma \beta} \int_{z}^{\tilde{z}} \frac{dz}{z} + G(z) = M \ln z + G(z), \tag{2.70}$$

где функция  $G(z)$ , имеющая с учетом (1.40) вид

$$G(z) = M \int \left( -\frac{1}{z} + \frac{1}{z(1+z^M \mathcal{Q}(z))} \right) dz = -M \int \frac{z^{M-1} \mathcal{Q}(z)}{1+z^M \mathcal{Q}(z)} dz, \tag{2.71}$$

является аналитической при  $z = 0$  и определена с точностью до аддитивной константы. Из равенств (2.70), (1.37), (2.7) и первой формулы (1.25) получаем искомую параметризацию

$$r = z^M \mathcal{G}(z), \quad y = f_0^{1/\sigma} \mathcal{G}^{-\beta}(z), \quad \mathcal{G}(z) := \exp G(z) \tag{2.72}$$

в окрестности  $z = 0$  ( $r = 0, y = Z$ ), охватывающую представления (2.32), (2.33) и (2.66), (2.67). Отметим, что параметрическое представление (2.72) в частном случае задачи (1.2), (1.3) было получено в работе [40].

Используя обозначение  $C := \mathcal{Q}(0)$  (см. предложение 3), вычислим начальные члены тейлоровских разложений величин  $G, \mathcal{G}, r^{1/M}, y$  по степеням  $z$ , исходя из формул (2.71), (2.72):

$$G(z) = G_0 - Cz^M + G_{M+1}z^{M+1} + \dots, \quad G_0, G_{M+1} = \text{const},$$

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_0(1 - Cz^M + \gamma_1 z^{M+1} + \dots), \quad \mathcal{G}_0 = \exp G_0 > 0, \quad \gamma_1 = G_{M+1} + \delta_M^1 \frac{C^2}{2},$$
(2.73)

$$r^{1/M}(z) = \mathcal{G}_0^{1/M} z \left( 1 - \frac{C}{M} z^M + \frac{\gamma_1}{M} z^{M+1} + \dots \right),$$
(2.74)

$$y(z) = f_0^{1/\sigma} \mathcal{G}_0^{-\beta} (1 + \beta Cz^M + \gamma_2 z^{M+1} + \dots), \quad \gamma_2 = -\beta \gamma_1 + \delta_M^1 \frac{\beta(\beta+1)}{2} C^2,$$
(2.75)

где символ Кронекера  $\delta_M^1$  равен единице при  $M = 1$  и нулю в противном случае. Согласно предложению 3 коэффициенты рядов внутри скобок в правых частях равенств (2.73)–(2.75) рационально выражаются через  $\beta, M, \tilde{N}, C$ . Сопоставляя равенство (2.75) и условие (1.6), находим

$$f_0^{1/\sigma} \mathcal{G}_0^{-\beta} = Z, \quad \mathcal{G}_0 = f_0^K Z^{-1/\beta}.$$
(2.76)

Выражая  $z$  через  $r$  из равенства (2.74), получаем в окрестности  $r = 0$  разложения

$$z = \left( \frac{r}{\mathcal{G}_0} \right)^{1/M} + \frac{C}{M} \left( \frac{r}{\mathcal{G}_0} \right)^{1+(1/M)} + \gamma_3 \left( \frac{r}{\mathcal{G}_0} \right)^{1+(2/M)} + \dots, \quad \gamma_3 = -\frac{\gamma_1}{M} + \delta_M^1 \frac{M+1}{M^2} C^2$$
(2.77)

$$z^M = \frac{r}{\mathcal{G}_0} + C \left( \frac{r}{\mathcal{G}_0} \right)^2 + M \gamma_3 \left( \frac{r}{\mathcal{G}_0} \right)^{2+(1/M)} + \dots,$$
(2.78)

где коэффициенты рядов в правых частях также являются рациональными функциями от  $\beta, M, \tilde{N}, C$ . Подставляя равенства (2.77), (2.78) в формулу (2.75), с учетом (2.76) получаем в окрестности  $r = 0$  представление (1.19):

$$y(r) = Z \left( 1 + \frac{\beta C}{f_0^K} Z^{1/\beta} r + \gamma_4 r^{1+(1/M)} + \dots \right) =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{n/M},$$

$$\gamma_4 = \frac{\gamma_2}{\mathcal{G}_0^{1+1/M}} + \delta_M^1 \frac{\beta C^2}{\mathcal{G}_0^2}, \quad b_0 = Z, \quad b_1 = \dots = b_{M-1} = 0, \quad b_M = \frac{\beta C}{f_0^K} Z^{1+(1/\beta)},$$
(2.79)

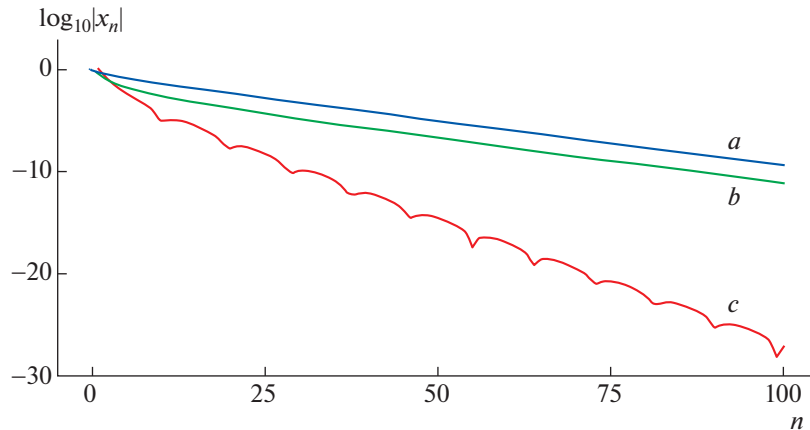
причем в силу предложения 3 каждому  $C \in \mathbb{R}$  соответствует решение  $y(r)$  вида (2.79).

Решение сингулярной задачи Коши для уравнения (1.5) с условием (1.6) и заданной производной при  $r = 0$  существует и единственно по теореме Каратеодори (см. [57, гл. 2, § 1]). Получаем следующее уточнение этого результата.

**Теорема 6.** Для всякого  $b \in \mathbb{R}$  задача Коши для уравнения (1.5), (1.17) с условиями (1.6),  $dy/dr(0) = b$  однозначным образом разрешима на некотором отрезке  $[0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , при этом ее решение  $y(r)$  представимо в окрестности  $r = 0$  сходящимся рядом (2.79), где  $b_M = b$ .

Коэффициенты  $b_n$  разложения (2.79) при заданном  $b_M = b$  можно найти методом неопределенных коэффициентов, подставив его в уравнение (1.5). Кроме того, в силу (2.76) и указанных выше свойств коэффициентов разложений (2.77), (2.78), при каждом  $n \geq M$  величина  $b_n f_0^{n/\tilde{N}} / Z^{1+(\sigma n/\tilde{N})}$  рационально выражается через  $\beta, M, \tilde{N}$  и  $C = b_M f_0^K / (\beta Z^{1+(1/\beta)})$ .





**Фиг. 2.** Поведение абсолютных величин тейлоровских коэффициентов функций  $a$  – для  $\mathcal{Q}(t)$ ;  $b$  – для  $\mathcal{H}(t)$ ;  $c$  – для  $\epsilon(\tilde{\Psi})$ ; см. (3.3), (3.4).

### 3. ЗАДАЧА ТОМАСА–ФЕРМИ

Показатель  $\nu = -1/2$  в уравнении Томаса–Ферми (1.2) удовлетворяет условию рациональности (1.17), следовательно, к задаче (1.2), (1.3) применимы доказанные в разд. 2 теоремы 1–6. Введенные выше числовые параметры (в частности, (1.9), (1.15)–(1.17), (1.36)) имеют следующие значения:

$$\nu = -\frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad M = 2, \quad \tilde{N} = 3, \quad K = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \frac{7 - \sqrt{73}}{2}, \quad \beta = 3, \quad \omega_0 = -7, \quad f_0 = 12.$$

#### 3.1. Решение задачи Томаса–Ферми на луче

Представление (2.32)–(2.34) решения  $\Psi(r)$  задачи (1.2), (1.3) при  $R = +\infty$  имеет вид

$$r = T_1(1-t)^2 t^{1/\alpha} \mathcal{H}(t), \quad \Psi = T_2 t^{-3/\alpha} \mathcal{H}^{-3}(t), \quad \frac{d\Psi}{dr} = \frac{T_3}{t^{4/\alpha} \mathcal{H}^4(t)} \mathcal{Q}(t), \quad t \in (0, 1], \tag{3.1}$$

$$T_1 = \frac{12^{2/3}}{\mathcal{H}_e} Z^{-1/3}, \quad T_2 = \mathcal{H}_e^3 Z, \quad T_3 = \frac{3\mathcal{H}_e^4}{12^{2/3}} Z^{4/3}, \quad \mathcal{H}_e = \mathcal{H}(t)|_{t=1},$$

где функции  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{H}(t)$  являются аналитическими на отрезке  $t \in [0, 1]$ , при этом  $\mathcal{Q}(t)$  есть решение задачи (2.3), (2.4), т.е.

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 8 \frac{(1-t)\mathcal{Q}^2(t) - 1}{1 + (1-t)^2 \mathcal{Q}(t)}, \quad \mathcal{Q}(0) = \mathcal{Q}_0 := -1, \quad \frac{d\mathcal{Q}}{dt}(0) = \mathcal{Q}_1 := -2(\alpha + 1), \tag{3.2}$$

и  $\mathcal{H}(t)$  выражается через  $\mathcal{Q}(t)$  по формулам (2.2), (2.8). Отметим, что уравнение (3.2) было получено Э. Майораной (см. [40]) непосредственно из уравнения (1.2).

Разложения функций  $\mathcal{Q}(t)$  и  $\mathcal{H}(t)$  в ряды Тейлора в окрестности  $t = 0$  могут быть вычислены по формулам (2.17), (2.18), (2.20), (2.22) и (2.25)–(2.29) соответственно, т.е.

$$g_0 = 0, \quad g_1 = -2\alpha, \quad g_n = \mathcal{Q}_n - 2\mathcal{Q}_{n-1} + \mathcal{Q}_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad \mathcal{Q}_n = \frac{V_n}{2(7 - (n+1)\alpha)}, \quad n \geq 2,$$

$$V_n = 8 \left( -\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{Q}_j (\mathcal{Q}_{n-j} - \mathcal{Q}_{n-j-1}) \right) - \mathcal{Q}_1 (\mathcal{Q}_{n-2} - 2\mathcal{Q}_{n-1}) - \sum_{j=2}^{n-1} j \mathcal{Q}_j g_{n-j+1}, \quad n \geq 2,$$

$$h_n = -\frac{1}{2\alpha} \left( -\frac{g_{n+2}}{\alpha} + 2(\mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n) - \sum_{j=0}^{n-1} h_j g_{n+1-j} \right), \quad H_{n+1} = \frac{h_n}{n}, \quad n \geq 0, \tag{3.3}$$

**Таблица 1.** Коэффициенты рядов Тейлора при  $t = 0$  функций  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $H(t) = \ln \mathcal{H}(t)$ ,  $\epsilon(\Psi)$ ; см. (3.3), (3.4)

$n$	$\mathcal{Q}_n$	$H_n$	$\epsilon_n$
0	-1	0	0
1	0.4559963	0.37541199	1.231293471269155
2	-0.3044551	0.11680513	-1.762572651223578E-01
3	-0.2221798	0.05301555	-3.586264513410257E-02
4	-0.1682126	0.02866072	-1.188294019140811E-02
5	-0.1298041	0.01715679	-4.527629495209355E-03
6	-0.1013002	0.01096849	-1.786511681720532E-03
7	-0.0796352	0.00733582	-6.888630288626336E-04
8	-0.0629230	0.00506758	-2.446296099146174E-04
9	-0.0499053	0.00358590	-7.102100665478879E-05
10	-0.0396962	0.00258466	-9.114850026654934E-06
11	-0.0316498	0.00189023	8.628385118260053E-06
12	-0.0252839	0.00139865	1.055443881972420E-05
13	-0.0202322	0.00104492	7.992270000062715E-06
14	-0.0162136	0.00078697	5.020985928867133E-06
15	-0.0130101	0.00059677	2.790922739565175E-06
16	-0.0104518	0.00045523	1.390873927946046E-06
17	-0.0084056	0.00034904	6.107369113157270E-07
18	-0.0067666	0.00026885	2.202119071036909E-07
19	-0.0054522	0.00020791	4.755499195027076E-08
20	-0.0043968	0.00016137	-1.546319759284382E-08
21	-0.0035485	0.00012565	-2.963705543713770E-08
22	-0.0028660	0.00009813	-2.574541382040214E-08
23	-0.0023164	0.00007684	-1.761541125892188E-08
24	-0.0018734	0.00006032	-1.043404093568663E-08
25	-0.0015161	0.00004746	-5.471632131286884E-09
26	-0.0012277	0.00003742	-2.507170177006865E-09
27	-0.0009947	0.00002956	-9.383306761822078E-10
28	-0.0008064	0.00002339	-2.107653561459858E-10
29	-0.0006540	0.00001854	6.735556420063704E-11
30	-0.0005307	0.00001472	1.344897961831818E-10
31	-0.0004309	0.00001170	1.192816857741852E-10
32	-0.0003500	0.00000932	8.286855224853180E-11
33	-0.0002844	0.00000743	4.959995317512788E-11
34	-0.0002312	0.00000593	2.612434022331377E-11
35	-0.0001880	0.00000474	1.189884390936907E-11
36	-0.0001530	0.00000379	4.309774068847392E-12
37	-0.0001245	0.00000304	7.936738883378811E-13
38	-0.0001014	0.00000243	-5.214790707757887E-13
39	-0.0000825	0.00000195	-7.998120745465573E-13
40	-0.0000673	0.00000157	-6.785731610539916E-13

причем радиус сходимости этих рядов ограничен снизу величиной (2.31):  $\sqrt[6]{2} - 1 \approx 0.12$ . Эмпирический радиус круга сходимости при этом составляет  $\approx 1.2$ , т.е. этот круг полностью покрывает область изменения параметра  $t$  – единичный отрезок  $t \in [0, 1]$ .

Представление (2.54) обратной к решению функции принимает вид

$$r(\Psi) = \frac{12^{2/3}}{\Psi^{1/3}} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \tilde{\Psi}^n \right)^2 =: \frac{12^{2/3}}{\Psi^{1/3}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n' \tilde{\Psi}^n, \quad \mathcal{Q} = \tilde{\Psi} := 1 - \sqrt{1 - (\Psi/Z)^{-\alpha/3}}, \quad (3.4)$$

причем ряды в правой части (3.4) демонстрируют еще более быструю сходимость, чем тейлоровские разложения функций  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{H}(t)$ , с эмпирическим радиусом сходимости  $\approx 1.8$  (см. табл. 1 и фиг. 2). При помощи значений коэффициентов  $\epsilon_n$ , представленных в табл. 1, значение функции  $\epsilon(\tilde{\Psi})$  может быть найдено с точностью до 12 знаков после запятой. Графики функций  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{H}(t)$ ,  $\epsilon(\tilde{\Psi})$  представлены на фиг. 3 и 4.

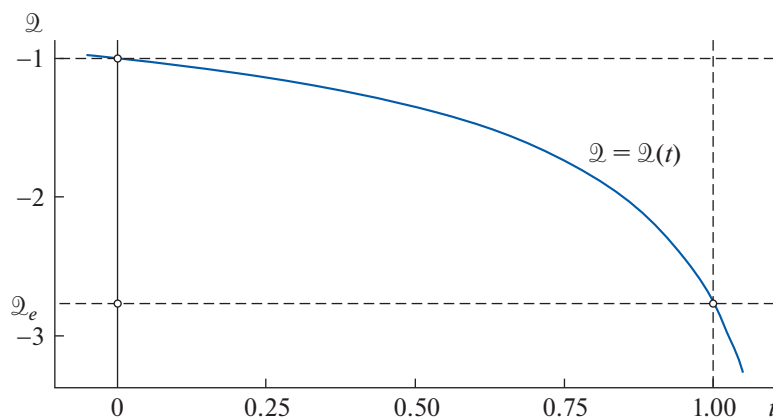
Представление (2.42) принимает вид (1.14) с константой  $A$ , заданной формулой (2.43):

$$A = -\frac{6\mathcal{H}_e^\alpha}{12^{2\alpha/3}} = -13.270973848026935153531683853762148437493478662432830\dots, \quad (3.5)$$

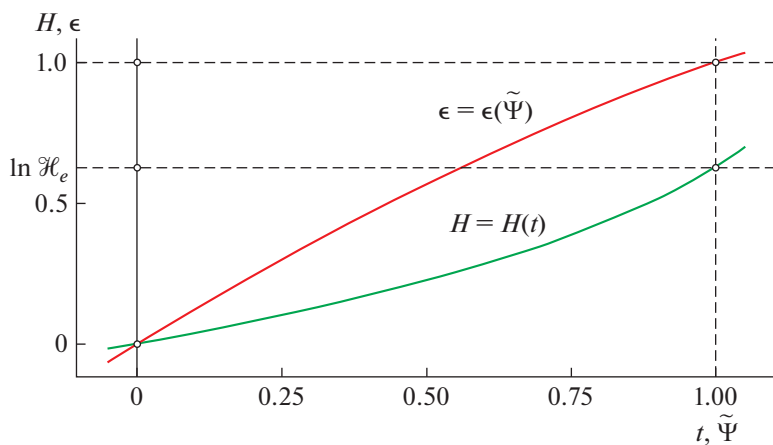
где в силу рекуррентных соотношений (3.3) имеем

$$\mathcal{H}_e = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} H_n \right\} = 1.874501926556901049744114038434817246829720167631\dots \quad (3.6)$$

Сформулируем полученный результат.



Фиг. 3. График функции  $\mathcal{Q}(t)$ ; см. (3.3).



Фиг. 4. Графики функций  $H(t)$  и  $\epsilon(\tilde{\Psi})$ ; см. (3.3), (3.4).

**Теорема 7.** *Решение  $\Psi(r)$  задачи (1.2), (1.3) при  $R = +\infty$  допускает параметрическое представление (3.1). Коэффициенты Тейлора входящих в него функций  $\mathcal{H}(t)$ ,  $\mathcal{Q}(t)$  могут быть вычислены по формулам (3.3), (2.8). Обратная к решению функция  $r = r(\Psi)$  допускает представление (3.4), где ряды в правой части сходятся в окрестности  $\tilde{\Psi} = \Psi = 0$ . Для константы  $A$  в разложении (1.14) справедлива формула (3.5).*

Подчеркнем отличие формул (3.5), (3.6), основанных на суммировании экспоненциально сходящегося числового ряда, каждый член которого вычисляется явно за конечное число операций из соотношений рекуррентного типа (3.3), от аналогичной формулы (см. [42, § 2.12]), опирающейся на параметризацию вида (2.72) и требующей численного разрешения неопределенности вида  $(0 \cdot \infty)$ , где бесконечно большой множитель является результатом численного интегрирования неограниченно растущей функции.

Отметим, что выражение для константы (1.13), даваемое формулой (2.15) при  $Z = 1$ ,

$$B = \frac{3\mathcal{Q}_e}{12^{2/3}} = -1.58807102261137531271868450942395010945274662167482\dots,$$

$$\mathcal{Q}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_n,$$

было получено Э. Майораной (см. [40], [42, § 2.12]).

Вычислить решение  $\Psi(r)$  и его производную  $d\Psi/dr$  в заданной точке  $r_0 \in (0, +\infty)$  с помощью представления (3.1) можно, найдя соответствующее значение параметра  $t = t_0$  и подставив его в формулу  $\Psi = \Psi(t_0)$ . Для обращения функции  $r = r(t)$  методом Ньютона нужно учесть, что в силу формулы (2.13) эта функция имеет кратный нуль порядка  $M = 2$  при  $t = 1$ , и ее производная не обращается в нуль более нигде на отрезке  $t \in [0, 1]$ . Таким образом, эффективность метода Ньютона обеспечена для задачи обращения не самой функции  $r(t)$ , а функции  $\sqrt{r(t)}$  (или функции  $r^{1/M}(t)$  в общем случае представления (2.32)), при этом начальное приближение для  $t_0$  можно выбрать на отрезке  $[0, 1]$  произвольно.

Принимая в (3.4) приближение  $\epsilon(\tilde{\Psi}) \approx \tilde{\Psi}$ , получаем формулу (1.23). Аппроксимируя функции  $\epsilon(\tilde{\Psi})$ ,  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{H}(t)$  тем или иным способом, можно получить из представлений (3.1), (3.4) другие эффективные формулы приближенного решения задачи в явном аналитическом виде.

### 3.2. Решение задачи Томаса–Ферми на отрезке

Представление (2.66)–(2.68) решения  $\Psi(r)$  задачи (1.2), (1.3) при  $Z, R \in (0, +\infty)$  имеет вид

$$\begin{aligned} r &= U_1(1-u)^2 \mathcal{S}(u), & \Psi &= U_2(3u+1)^2 \mathcal{S}^{-3}(u), & \frac{d\Psi}{dr} &= U_3 \mathcal{S}^{-4}(u) \mathcal{P}(u), & u &\in (u_1, 1], \\ U_1 &= \frac{4 \cdot (36\mu)^{1/3}}{\mathcal{S}_e} Z^{-1/3}, & U_2 &= \frac{\mathcal{S}_e^3}{16} Z, & U_3 &= \frac{3\mathcal{S}_e^4}{64(36\mu)^{1/3}} Z^{-4/3}, & \mathcal{S}_e &= \mathcal{S}(1), & u_1 &= -\frac{1}{3}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где функция  $\mathcal{P}(u)$  является решением задачи (2.57), (2.58), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{du} &= 8 \frac{(1-u)\mathcal{P}^2(u) + (3u+1)\mathcal{P}(u) - 4\sqrt{\mu}u(3u+1)^4}{(3u+1)^2 + (1-u)^2 \mathcal{P}(u)}, & u &\in (u_1, 1], \\ \mathcal{P}(0) &= -1, & \frac{d\mathcal{P}}{du}(0) &= 8 \left( -1 + \sqrt{\frac{1-\sqrt{\mu}}{2}} \right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

аналитическая при  $u \in (u_1, 1]$  функция  $\mathcal{S}(u)$  выражается через  $\mathcal{P}(u)$  в виде (2.56), т.е.

$$S(u) = 2 \int_0^u \frac{(3u+1) + (1-u)\mathcal{P}(u)}{(3u+1)^2 + (1-u)^2 \mathcal{P}(u)} du, \quad \mathcal{S}(u) = \exp S(u). \tag{3.9}$$

Численное решение  $\Psi(r)$  задачи (1.2), (1.3) при  $R, Z \in (0, \infty)$  с помощью представления (3.7) проводится аналогично случаю  $R = +\infty$ , рассмотренному в п. 3.1. Круг сходимости ряда Тейлора функции  $S(u)$  с центром  $u = 0$  может не покрывать всего отрезка изменения параметра

**Таблица 2.** Числовые характеристики (нормированные по  $Z$ ) решений задачи Томаса–Ферми (1.2), (1.3) при различных значениях параметра  $\mu$ : 1) производная в нуле, см. (1.12), (2.69); 2) размер иона,  $R = r(u_1)$  в (3.7); 3) степень ионизации, см. (1.4)

$\mu$	$Z^{-4/3}\Psi'_r(0)$	$Z^{-1/3}R$	$1 - Z'/Z$
0.0001	-2.5864080	0.53	9.30E-01
0.02	-1.5938269	4.17	3.68E-01
0.1	-1.5881541	10.84	1.02E-01
0.2	-1.5880743	19.49	3.42E-02
0.3	-1.5880712	30.74	1.28E-02
0.4	B - 1.39E-08	46.65	4.81E-03
0.5	B - 8.16E-10	70.85	1.68E-03
0.6	B - 3.42E-11	111.14	5.14E-04
0.7	B - 7.67E-13	187.62	1.22E-04
0.8	B - 4.98E-15	369.34	1.79E-05
0.9	B - 1.41E-18	1082.77	7.83E-07
0.999	B - 6.59E-41	824236.00	1.91E-15
0.9999	B - 5.62E-52	21893653.21	1.02E-19
1.0	B	$+\infty$	0

$u \in [-1/3, 1]$  – в этом случае можно построить тейлоровские разложения функций  $\mathcal{P}(u)$ ,  $S(u)$  в нескольких других точках этого отрезка с помощью уравнения (3.8).

Значение параметра  $\mu$ , соответствующее заданным  $R, Z \in (0, +\infty)$ , может быть приблизительно установлено с помощью интерполяции согласно табл. 2 (вычисления проведены на основе формул (3.7)–(3.9), (2.69)).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprieta dell'atomo // Rend. Accad. Naz. Lincei 6. 1927. P. 602–607.
2. *Thomas L.H.* The calculations of atomic fields // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1927. № 23. P. 542–598.
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989.
4. *March N.H.* The Fermi–Thomas theory // Theory of the inhomogeneous electron gas / Ed. by S. Lunqvist, N.H. March. New York, London: Plenum Press, 1983. P. 9–85.
5. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
6. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
7. *Sommerfeld A.* Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Fermi–Thomas // Rend. R. Accademia dei Lincei 15. 1932. P. 293–308.
8. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974. Т. 2.
9. *Hille E.* Some aspects of the Fermi–Thomas equation // J. Anal. Math. 1970. V. 23. P. 147–170.
10. *Baker E.B.* The application of the Fermi–Thomas statistical model to the calculation of potential distribution in positive ions // Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 630–647.
11. *Coulson C.A., March N.H.* Momenta in atoms using the Fermi–Thomas method // Proc. Phys. Soc. Sect. A. 1950. V. 63. № 4. P. 367–367.
12. *Дышко А.Л., Карпенцьер М.П., Конюхова Н.Б., Лима П.М.* О сингулярных задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка типа Эмдена–Фаулера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 595–619.
13. *Bush V., Caldwell S.H.* Fermi–Thomas equation solution by the differential analyzer // Phys. Rev. 1931. V. 38. № 10. P. 1898–1902.
14. *Miranda C.* Teoremi e metodi per l'integrazione numerica dell' equazione differenziale di Fermi // Mem. della R. Acc. Italia. 1934. № 5. P. 285–322.
15. *Slater J.C., Krutter H.M.* The Fermi–Thomas method for metals // Phys. Rev. 1935. V. 47. № 7. P. 559–568.

16. *Feynman R.P., Metropolis N., Teller E.* Equations of state of elements based on the generalized Fermi–Thomas theory // *Phys. Rev.* 1949. V. 75. № 10. P. 1561–1573.
17. *Kobayashi S., Matsukuma T., Nagai S., Umeda K.* Accurate value of the initial slope of the ordinary TF function // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1955. V. 10. P. 759–762.
18. *Krutter H.* Numerical integration of the Thomas–Fermi equation from zero to infinity // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 47. № 2. P. 308–312.
19. *Bellman R.* Dynamic programming and the variational solution of the Fermi–Thomas equation // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1957. V. 12. P. 1049.
20. *Ikebe T., Kato T.* Application of variational method to the Fermi–Thomas equation // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1957. V. 12. № 2. P. 201–203.
21. *Ramnath R.V.* A new analytical approximation for the Fermi–Thomas model in atomic physics // *J. Math. Anal. and Appl.* 1970. V. 31. № 2. P. 285–296.
22. *Torrens I.M.* *Interatomic Potentials.* New York: Academic, 1972.
23. *Anderson N., Arthurs A.M.* Variational solutions of the Fermi–Thomas equation // *Quart. Appl. Math.* 1981/82. V. 39. P. 127–129.
24. *Desaix M., Anderson D., Lisak M.* Variational approach to the Fermi–Thomas equation // *Eur. J. Phys.* 2004. V. 25. P. 699–705.
25. *Oulne M.* Variation and series approach to the Fermi–Thomas equation // *Appl. Math. and Comput.* 2011. V. 218. № 2. P. 303–307.
26. *Flagg R.C., Luning C.D., Perry W.L.* Implementation of new iterative techniques for solutions of Thomas–Fermi and Emden–Fowler equations // *J. Comput. Phys.* 1980. V. 38. P. 396–405.
27. *Bender C.M., Milton K.A., Pinsky S.S., Simmons L.M.* A new perturbative approach to nonlinear problems // *J. Math. Phys.* 1989. V. 30. № 7. P. 1447–1455.
28. *Tu K.* Analytic solution to the Fermi–Thomas and Fermi–Thomas–Dirac–Weizsäcker equations // *J. Math. Phys.* 1991. V. 32. P. 2250–2253.
29. *Zaitsev N.A., Matyushkin I.V., Shamonov D.V.* Numerical solution of the Fermi–Thomas equation for the centrally symmetric atom // *Russ. Microelectron.* 2004. V. 33. № 5. P. 303–309.
30. *MacLeod A.J.* Chebyshev series solution of the Fermi–Thomas equation // *Computer Phys. Commun.* 1992. V. 67. № 3. P. 389–391.
31. *Parand K., Shahini M.* Rational Chebyshev pseudospectral approach for solving Fermi–Thomas equation // *Phys. Lett. A.* 2009. V. 373. № 2. P. 210–213.
32. *Parand K., Rabiei K., Delkhosh M.* An efficient numerical method for solving nonlinear Thomas–Fermi equation // *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica.* 2018. V. 10. № 1. P. 134–151.
33. *Boyd J.P.* Rational Chebyshev series for the Fermi–Thomas function: Endpoint singularities and spectral methods // *J. Comput. and Appl. Math.* 2013. V. 244. P. 90–101.
34. *Mason J.C.* Rational approximations to the ordinary Fermi–Thomas function and its derivative // *Proc. Phys. Soc.* 1964. V. 84. № 3. P. 357.
35. *Abbasbandy S., Bervillier C.* Analytic continuation of Taylor series and the boundary value problems of some nonlinear ordinary differential equations // *Appl. Math. Comput.* 2011. V. 218. P. 2178–2199.
36. *Epele L.N., Fanchiotti H., Canal C.A. García, Ponciano J.A.* Padé approximant approach to the Fermi–Thomas problem // *Phys. Rev. A.* 1999. V. 60. P. 280–283.
37. *Liao S.* An explicit analytic solution to the Fermi–Thomas equation // *Appl. Math. and Comput.* 2003. V. 144. P. 495–506.
38. *Plindov G.I., Pogrebnaya S.K.* The analytical solution of the Fermi–Thomas equation for a neutral atom // *J. Phys. B.* 1987. V. 20. P. 547–550.
39. *Fernández F.M., Ogilvie J.F.* Approximate solutions to the Fermi–Thomas equation // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 42. № 1. P. 149–154.
40. *Esposito S.* Majorana solution of the Fermi–Thomas equation // *Am. J. Phys.* 2002. V. 70. № 8. P. 852–856.
41. *Esposito S.* Majorana transformation for differential equations // *Int. J. Theor. Phys.* 2002. V. 41. № 12. P. 2417–2426.
42. *Finch S.R.* *Mathematical Constants II.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
43. *Panayotounakos D.E., Kravvaritis D.C.* Exact analytic solutions of the Abel, Emden–Fowler and generalized Emden–Fowler nonlinear ODEs // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2006. V. 7. № 4. P. 634–650.
44. *Panayotounakos D.E., Sotiropoulos N.* Exact analytic solutions of unsolvable classes of first- and second-order nonlinear ODEs (Part II: Emden–Fowler and relative equations) // *Appl. Math. Lett.* 2005. V. 18. № 4. P. 367–374.

45. *Theotokoglou E.E., Zampoutis T.I., Stampouloglou I.H.* Closed-form solutions of the Fermi–Thomas in heavy atoms and the Langmuir–Blodgett in current flow ODEs in mathematical physics // *Math. Problems in Engng.* 2015. V. 2015, Article ID 721637.
46. *Безродных С.И., Власов В.И.* Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44. № 12. С. 2112–2142.
47. *Пикулин С.В.* О поведении решений уравнения Абеля II рода специального вида вблизи узловой особой точки // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 12. С. 2074–2095.
48. *Conte R.M., Musette M.* The Painlevé Handbook. Dordrecht: Springer Science + Business Media B.V., 2008.
49. *Hille E.* Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1976.
50. *Varin V.P.* A solution of the Blasius problem // *Comput. Math. Math. Phys.* 2014. V. 54. № 6. P. 1025–1036.
51. *Варин В.П.* Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. V. 58. № 4. P. 530–540.
52. *Bender C.M., Orszag S.A.* Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill book company, 1978.
53. *Пикулин С.В.* О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 2. С. 244–252.
54. *Пикулин С.В.* О промежуточных асимптотических режимах в некоторых моделях теории горения // *Таврический вестник информатики и математики.* 2017. Т. 3. № 36. С. 55–72.
55. *Пикулин С.В.* О решениях типа бегущей волны для нелинейного параболического уравнения // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* 2015. Т. 6. № 128. С. 110–116.
56. *Голубев В.В.* Курс аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1950.
57. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.