ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 8, с. 1431–1438

УДК 621.396:517.9

# ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ДИСКЕ

**© 2019 г. С. И. Эминов**

*(173003 Великий Новгород, ул. Б. С.-Петербургская, 41, Новгородский гос. ун-т имени Ярослава Мудрого, Россия)*

*e-mail: eminovsi@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.04.2019 г.
Переработанный вариант 01.04.2019 г.
Принята к публикации 10.04.2019 г.

Построена теория интегрального уравнения для радиальных токов в осесимметричной задаче дифракции на диске. В основе исследования лежат выделение главной части, непрерывно-обратимого оператора и доказательство его положительной определенности. Получены теоремы существования и единственности. Построен ортонормированный базис энергетического пространства положительно-определенного оператора. Каждый элемент базиса на границе ведет себя, как и неизвестная функция. Изучена структура матрицы интегрального оператора в данном базисе: матрица главной части оказывается единичной, а матрица следующего оператора – трехдиагональной. Библ. 16.

**Ключевые слова:** дифракция на диске, непрерывно-обратимый оператор, положительно-определенный оператор, преобразование Ханкеля, компактный оператор, ортонормированный базис, присоединенные функции Лежандра 1-го рода, матрица оператора.

**DOI:** 10.1134/S0044466919080180

## ВВЕДЕНИЕ

Задачам дифракции электромагнитных волн на таких основных структурах, как полоса, отрезок кругового цилиндра посвящена большая научная литература. Интегральные уравнения для этих задач изучены достаточно полно [1], [2]. В то же время задача дифракции на диске, по известной нам литературе, мало исследована. По-видимому, это связано с некоторой трудностью анализа ядер интегральных уравнений, содержащих преобразование Ханкеля. Уравнение дифракции на диске требует дополнительного обсуждения с математической точки зрения, что и делается в работе.

## 1. ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ НЕПРЕРЫВНО ОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА

Пусть на идеально-проводящую поверхность диска радиуса $\tilde{a}$, расположенного в плоскости $z = 0$, падает первичная волна $\mathbf{E}^0(r,\varphi) = E_r^0(r)\mathbf{r}$, не зависящая от $\varphi$ (в цилиндрической системе координат $r$, $\varphi$, $z$) и направленная по радиусу. Такая волна может создаваться, например, электрическим диполем, расположенным над диском [3]. В результате на поверхности наводятся поверхностные токи, также не зависящие от $\varphi$ и направленные по радиусу. Нахождение функции токов связано с решением интегрального уравнения вида [4], [5]

$$a^3\int\limits_0^{+\infty} J_1(ax\tau)x\sqrt{x^2-1}\int\limits_0^1 J_1(axt)u(t)\,tdtdx = f(\tau), \quad 0 \le \tau \le 1, \tag{1}$$

где $a$ – параметр, электрический радиус диска, $J_1$ – функция Бесселя первого порядка.

Оператор в левой части (1) определяется следующим образом: вначале проводится интегрирование по переменной $t$, находится преобразование Ханкеля, а затем – по переменной $x$. Такой подход применяется при определении псевдо-дифференциальных операторов через преобразование Фурье [6].

Для выделения однозначной ветви у функции $\sqrt{x^2-1}$ на комплексной плоскости $x$ проведем разрезы из точек ветвления параллельно мнимой оси $[-1,-1+i\infty)$ и $[1,1-i\infty)$. Функция $\sqrt{x^2-1}$ принимает действительные значения при $|x|\geq 1$, а когда $|x|\leq 1$ выбирается та ветвь, для которой выполняется равенство

$$\sqrt{x^2-1}=i\sqrt{1-x^2},\quad \sqrt{1-x^2}>0.$$

Уравнение (1) представим в виде

$$(Au)(\tau)+(Ku)(\tau)=f(\tau), \tag{2}$$

где

$$(Au)(\tau)=\int_0^{+\infty}J_1(x\tau)x^2\int_0^1 J_1(xt)u(t)\,tdtdx, \tag{3}$$

$$(Ku)(\tau)=a^3\int_0^{+\infty}J_1(ax\tau)x(\sqrt{x^2-1}-x)\int_0^1 J_1(axt)u(t)\,tdtdx. \tag{4}$$

Как будет показано ниже, оператор $A$ ограниченно обратим, а оператор $K$ – компактный, другими словами, оператор $A$ выражает “главную часть”.

Введем также в рассмотрение следующий оператор:

$$(Iu)(\tau)=\int_0^{+\infty}J_1(x\tau)x\int_0^1 J_1(xt)u(t)\,tdtdx. \tag{5}$$

По свойству ортогональности функций Бесселя с весом [3]

$$\int_0^{+\infty}J_1(x\tau)J_1(xt)\,xdx=\frac{\delta(t-\tau)}{t},$$

оператор $I$ с таким ядром является единичным: $Iu=u$. Все операторы будем изучать в пространстве $L_{2,t}[0,1]$, в котором скалярное произведение и норма определяются по формулам

$$(u,v)=\int_0^1 u(t)\overline{v(t)}tdt,\quad \|u\|^2=\int_0^1|u|^2tdt. \tag{6}$$

## 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Оператор $A$ включим в семейство операторов $A_s$ вида

$$(A_su)(\tau)=\int_0^{+\infty}J_1(x\tau)x^s\int_0^1 J_1(xt)u(t)\,tdtdx,\quad s\geq 1. \tag{7}$$

Область определения $D(A_s)=C_0^\infty(0,1)$ – множество всех бесконечно-дифференцируемых функций с компактным в $(0,1)$ носителем. Множество $D(A_s)$ всюду плотно в $L_{2,t}[0,1]$ (см. [7, с. 88]). С другой стороны, как показано в [8], преобразование Ханкеля

$$\tilde{u}(x)=\int_0^1 J_1(xt)u(t)\,tdt \tag{8}$$

от функции $u$ из множества $C_0^\infty(0,1)$ обладает хорошими свойствами: $\tilde{u}(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией и убывает на бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{x}$. Поэтому несобственный интеграл (7) сходится равномерно и $A_su\in L_{2,t}[0,1]$.

Далее оператор $A_s$ симметричен

$$(A_s u, v) = (u, A_s v) \quad \forall u, v \in D(A_s).$$

**Теорема 1.** *Оператор $A_s$ при $s \geq 1$ является положительно-определенным, т.е.*

$$(A_s u, u) \geq \gamma^2 (u, u), \quad \gamma^2 > 0. \tag{9}$$

**Доказательство.** Это неравенство, с учетом (5), (7) и (8) эквивалентно неравенству

$$\int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x^s dx \geq \gamma^2 \int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x dx = \gamma^2 \|u\|^2. \tag{10}$$

Равенство, входящее в (10), называется *равенством Парсеваля*, оно вытекает прямо из (5). С учетом верхней границы для функции Бесселя $|J_1(x)| \leq 1$ и неравенства Коши—Буняковского имеем

$$|\tilde{u}(x)|^2 = \left| \int_0^1 J_1(xt) u(t) t dt \right|^2 \leq \left( \int_0^1 |u(t)| t dt \right)^2 \leq \int_0^1 |u(t)|^2 t dt \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \|u\|^2. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует оценка

$$\int_0^1 |\tilde{u}(x)|^2 x dx \leq \frac{1}{4} \|u\|^2. \tag{12}$$

Наконец, используя неравенство (12), получим

$$\int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x^s dx \geq \int_1^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x^s dx \geq \int_1^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x dx = \int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2 x dx - \int_0^1 |\tilde{u}(x)|^2 x dx \geq \frac{3}{4} \|u\|^2.$$

Теорема доказана.

Из положительной определенности оператора следует ограниченность обратного оператора

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} (A_s u, u) \leq \frac{1}{\gamma^2} \|A_s u\| \|u\|,$$

так, что $\|A_s u\| \geq \gamma^2 \|u\|$ и $\left\|A_s^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\gamma^2}$. С симметричным, положительно-определенным оператором с плотной областью определения связывают энергетическое гильбертово пространство [9], в котором скалярное произведение и норма определяются по формулам

$$[u, v] = (A_s u, v), \quad [u] = \sqrt{(A_s u, u)}, \tag{13}$$

при этом справедлива оценка

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} [u]. \tag{14}$$

## 3. КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЯДРА КОТОРЫХ СОДЕРЖАТ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Обратимся к уравнению (2). Оператор $A$ является ограниченно обратимым. Покажем, что оператор $K$ компактный. С этой целью докажем более общие теоремы.

**Теорема 2.** *Оператор $B_s$, определяемый формулой*

$$(B_s u)(\tau) = \int_0^{+\infty} J_1(x\tau)(1 + x)^{-s} x \int_0^1 J_1(xt) u(t) t dt dx, \quad s > 0, \tag{15}$$

*является компактным в пространстве $L_{2,t}[0,1]$.*

**Доказательство.** Введем интегральный оператор

$$(B_s^N u)(\tau) = \int_0^N J_1(x\tau)(1+x)^{-s} x \int_0^1 J_1(xt) u(t)\, t dt dx = \int_0^1 \left( \int_0^N J_1(x\tau) J_1(xt)(1+x)^{-s} x dx \right) u(t)\, t dt. \qquad (16)$$

Оператор $B_s^N$, как интегральный оператор с непрерывным ядром компактен [10].

Покажем, что

$$\left\| B_s - B_s^N \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to 0.$$

Пусть $T = B_s - B_s^N$. Рассмотрим выражение

$$(Tu, v) = \int_N^{+\infty} (1+x)^{-s} x\tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}(x)} dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши–Буняковского и равенства Парсеваля получим

$$|(Tu,v)| \le \int_N^{+\infty} (1+x)^{-s} x|\tilde{u}(x)|\left|\overline{\tilde{v}(x)}\right| dx \le (1+N)^{-s} \left( \int_0^{+\infty} x|\tilde{u}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} x|\tilde{v}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (1+N)^{-s} \|u\|\|v\|. \qquad (17)$$

Полагая в неравенстве (17) $v = Tu$ будем иметь

$$\|Tu\|^2 \le (1+N)^{-s} \|u\|\|Tu\|$$

или

$$\|Tu\| \le (1+N)^{-s} \|u\|.$$

Следовательно,

$$\|T\| = \left\| B_s - B_s^N \right\| \le (1+N)^{-s} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to 0.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Оператор $A^{-1}B$, когда оператор $A$ положительно определен, а $B$ компактен в $L_{2,t}[0,1]$, является компактным в энергетическом пространстве $H_A$ оператора $A$.*

**Доказательство.** Оператор $T = A^{-1}B$ компактен в $L_{2,t}[0,1]$, как произведение ограниченного и компактного операторов. Далее имеем оценку

$$[Tv]^2 = (ATv, Tv) = (AA^{-1}Bv, Tv) = (Bv, Tv) \le \|B\|\|v\|\|Tv\|. \qquad (18)$$

Возьмем ограниченное в $H_A$ множество $M$, оно будет ограничено и в $L_{2,t}[0,1]$ по неравенству (14). Оператор $T$ компактен в $L_{2,t}[0,1]$, поэтому найдется такая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$, что $\{Tu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна в $L_{2,t}[0,1]$. В силу оценки (18) последовательность $\{Tu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет фундаментальной и в $H_A$. Теорема доказана.

## 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ОПЕРАТОРА $A$ И ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС В ЭТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построим энергетическое гильбертово пространство оператора $A$. Введем систему финитных, обращающихся в нуль вне отрезка $[0,1]$, функций $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{n=+\infty}$, преобразование Ханкеля которых имеет вид (см. [11], [12])

$$\Phi_n(x) = \int_0^1 J_1(xt)\varphi_n(t)\, t dt = \sqrt{4n+1}\frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad n = 1,2,3,\ldots, \qquad (19)$$

где $J_{2n+\frac{1}{2}}(x)$ – функция Бесселя с индексом $2n+\dfrac{1}{2}$.

Сами функции определяются с помощью табличного интеграла [13, с. 210]

$$\begin{aligned}\varphi_n(\tau) &= \int\limits_0^{+\infty} J_1(x\tau)\Phi_n(x)\,x\,dx = \sqrt{4n+1}\int\limits_0^{+\infty} J_1(x\tau)\frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \\ &= \frac{\sqrt{2(4n+1)}\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}P_{2n}^{-1}(\sqrt{1-\tau^2}), \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad 0 \le \tau \le 1,\end{aligned} \tag{20}$$

где $\Gamma$ – гамма-функция, $P_{2n}^{-1}$ – присоединенные функции Лежандра I рода.

**Теорема 4.** *Система функций* $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{n=+\infty}$ *полна в пространстве* $L_{2,t}[0,1]$.

**Доказательство.** Свойства присоединенных функций Лежандра I рода описаны в [14]. В частности, показана связь с многочленами Лежандра и выведена рекуррентная формула. Из этих двух свойств вытекает, что функции $\varphi_n(\tau)$ представляют собой произведение весовой функции $\sqrt{1-\tau^2}$ на многочлены $Q_n(\tau)$. Многочлены являются плотными в $L_{2,t}[0,1]$ (см. [7, с. 88]). Далее, пусть некоторая функция $f \in L_{2,t}[0,1]$ ортогональна всем функциям $\varphi_n(\tau)$

$$(f,\varphi_n) = \left(f(\tau), \sqrt{1-\tau^2}Q_n(\tau)\right) = 0,$$

тогда

$$\left(f(\tau)\sqrt{1-\tau^2}, Q_n(\tau)\right) = 0.$$

Поскольку функция $\sqrt{1-\tau^2}$ ограничена, то $f(\tau)\sqrt{1-\tau^2} \in L_{2,t}[0,1]$. Из полноты многочленов следует, что $f(\tau)\sqrt{1-\tau^2} = 0$. Отсюда и $f = 0$ в пространстве $L_{2,t}[0,1]$. Теорема доказана.

Оператор $A$ определим на системе функций $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{n=+\infty}$ и по линейности распространим на их конечные линейные комбинации. Оператор $A$ является плотно определенным, симметричным и, в силу теоремы 1, положительно-определенным.

**Теорема 5.** *Система функций* $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{n=+\infty}$ *образует ортонормированный базис энергетического пространства* $H_A$ *оператора* $A$.

**Доказательство.** С помощью табличного интеграла изучим множество $\{A\varphi_n\}_{n=1}^{n=+\infty}$. Имеем (см. [13, с. 210])

$$(A\varphi_m)(\tau) = \sqrt{(4m+1)}\int\limits_0^{+\infty} J_{2m+\frac{1}{2}}(x)J_1(x\tau)\sqrt{x}\,dx = \frac{2\sqrt{2}\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m)\sqrt{1-\tau^2}}P_{2m}^{-1}(\sqrt{1-\tau^2}), \quad m = 1,2,3,\ldots. \tag{21}$$

Правые части (21) представляют собой полиномы и они всюду плотны в пространстве $L_{2,t}[0,1]$ (см. [7, с. 88]). Таким образом, замыкание образа оператора $A$ совпадает со всем пространством: $\overline{R(A)} = L_{2,t}[0,1]$. Из этого факта, как показано в [15, с. 116], следует полнота системы функций $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{n=+\infty}$ в энергетическом пространстве. А ортонормированность вытекает из табличного интеграла [10, с. 211]

$$(A\varphi_m,\varphi_n) = \sqrt{(4m+1)(4n+1)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(x)J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x}dx = \delta_{mn} = \begin{cases}1, & m = n,\\ 0, & m \ne n.\end{cases} \tag{22}$$

Теорема доказана.

## 5. ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ К УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА II РОДА

Положительно-определенный оператор имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}$. Последний, как следует из теоремы 2, определен на плотном в $L_{2,t}[0,1]$ множестве. Введем в рассмотрение самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора $A$ по методу Фридрихса [9], [16]. Оператор $\tilde{A}$ также является положительно-определенным и его энергетическое пространство $H_{\tilde{A}}$ совпадает с энергетическим пространством $H_A$ оператора $A$. Оператор $\tilde{A}^{-1}$ ограничен и определен уже на всем пространстве $L_{2,t}[0,1]$. Если функция $u$ является решением уравнения (2), т.е.

$$Au + Ku = f, \tag{23}$$

то, поскольку оператор $\tilde{A}^{-1}$ ограничен и определен на всем пространстве $L_{2,t}[0,1]$,

$$\tilde{A}^{-1}Au + \tilde{A}^{-1}Ku = \tilde{A}^{-1}f, \tag{24}$$

или

$$u + \tilde{A}^{-1}Ku = \tilde{A}^{-1}f. \tag{25}$$

Последнее уравнение будем рассматривать в гильбертовом пространстве $H_{\tilde{A}}$, оно является уравнением Фредгольма II рода в силу теорем 2 и 3.

Если функция $u$ удовлетворяет уравнению (25) и $u \in D(A)$, то $u = \tilde{A}^{-1}Au$. Поэтому для любого $v \in H_{\tilde{A}}$ из (25) получим

$$[\tilde{A}^{-1}Au + \tilde{A}^{-1}Ku, v] = [\tilde{A}^{-1}f, v] \tag{26}$$

или

$$(Au + Ku, v) = (f, v). \tag{27}$$

И поскольку $H_{\tilde{A}}$ плотно в $L_{2,t}[0,1]$, то

$$Au + Ku = f. \tag{28}$$

Однако решение уравнения (25) может не принадлежать $D(A)$ и даже $D(\tilde{A})$.

**Определение 1.** Следуя работе [15, с. 112], элемент из пространства $H_{\tilde{A}}$, который удовлетворяет уравнению (25), будем называть *обобщенным решением* уравнения (2).

Таким образом, с учетом определения 1, доказана

**Теорема 6.** *Исходное уравнение* (2) *эквивалентно уравнению Фредгольма* II *рода* (25).

## 6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

**Теорема 6.** *Однородное уравнение, соответствующее уравнению Фредгольма* II *рода* (25), *имеет только нулевое решение в пространстве* $H_{\tilde{A}}$.

**Доказательство.** Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (25)

$$u + \tilde{A}^{-1}Ku = 0.$$

Если функция $u \in H_{\tilde{A}}$ удовлетворяет этому уравнению, то

$$[u,u] + [\tilde{A}^{-1}Ku, u] = 0. \tag{29}$$

Первое слагаемое в (29) является вещественным и неотрицательным. Запишем второе слагаемое, с учетом определения оператора $K$

$$[\tilde{A}^{-1}Ku, u] = (Ku, u) = a^3 \int_0^{+\infty} x(\sqrt{x^2-1} - x)|\tilde{u}_a(x)|^2\, dx, \tag{30}$$

где

$$\tilde{u}_a(x) = \int_0^1 J_1(axt)\,u(t)\,tdt.$$

Найдем мнимую часть выражения (30)

$$\operatorname{Im}(Ku,u) = a^3 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\left|\tilde{u}_a(x)\right|^2 dx = 0.$$

А это равенство возможно только тогда, когда преобразование Ханкеля $\tilde{u}_a(x)$ и неизвестная функция $u(\tau)$ тождественно равны нулю. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Операторное уравнение II рода (25) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве $H_{\tilde{A}}$.

**Следствие 2.** Исходное интегральное уравнение (2) имеет единственное обобщенное решение в пространстве $L_{2,t}[0,1]$.

## 7. О МАТРИЦЕ ОПЕРАТОРА В БАЗИСЕ ИЗ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА I РОДА

Матрица оператора $A$ в базисе (20) является единичной. Рассмотрим вопрос вычисления матричных элементов оператора $K$. Для этого разложим подынтегральную функцию в (1) в ряд

$$\sqrt{x^2-1} = x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} - \frac{1}{16x^5} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(1-2n)(n!)^2\, 4^n} \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad |x| > 1. \tag{31}$$

Если в уравнении (1) заменить функцию $\sqrt{x^2-1}$ на функцию $x$, то получим оператор $A$. Второму слагаемому в разложении (31) соответствует с точностью до постоянной интегральный оператор

$$(K_1u)(\tau) = \int_0^{+\infty} J_1(x\tau) \int_0^1 J_1(xt)\,u(t)\,tdtdx.$$

Имеем

$$[\tilde{A}^{-1}K_1\varphi_m,\varphi_n] = (K_1\varphi_m,\varphi_n) = \sqrt{(4m+1)(4n+1)} \int_0^{+\infty} \frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(x)\,J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x^3}dx.$$

А теперь вычислим этот интеграл, как табличный [13, с. 211]

$$(K_1\varphi_m,\varphi_n) = \frac{\sqrt{(4m+1)(4n+1)}}{4\Gamma(m-n+2)\,\Gamma(n-m+2)\left(m+n+\frac{3}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+n-\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, матрица оператора $A^{-1}K_1$ в базисе (20) найдена в аналитическом виде и обладает замечательным свойством: при условии $|m-n| \geq 2$ матрица равна нулю, т.е. она является трехдиагональной. Кроме того, выполняется условие

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(K_1\varphi_m,\varphi_n)\right|^2 < +\infty,$$

т.е. оператор $\tilde{A}^{-1}K_1$ является оператором Гильберта-Шмидта.

Нетрудно показать, что ядро интегрального оператора $K - K_1$ является непрерывным вместе с частными производными первого порядка.

Как показывают вычисления, матрица оператора уравнения (2) в базисе (20) имеет ярко выраженный трехдиагональный характер и именно поэтому метод Галеркина на основе базиса (20) обладает быстрой внутренней сходимостью.

## 8. ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе получены следующие результаты.

1. Доказана положительная определенность одного класса операторов в пространстве $L_{2,t}[0,1]$. И этот класс включает в себя положительно-определенный оператор задачи дифракции на диске.

2. Построен ортонормированный базис энергетического пространства для задачи дифракции на диске.

3. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Смирнов Ю.Г., Ильинский А.С.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции: М.: ИПРЖР, 1996.
2. *Уфимцев П.Я.* Основы физической теории дифракции / Пер. с англ. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
3. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
4. *Эминов С.И.* Базис Мейкснера в задаче дифракции на диске // Ж. техн. физ. 2007. Т. 77. Вып. 3. С. 96–99.
5. *Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. Вып. 1. С. 96–100.
6. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
8. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Матем. сборник. 1955. Т. 36 (78). № 2. С. 299–310.
9. *Копачевский Н.Д.* Операторные методы математической физики. Симферополь, 2008.
10. *Треногин В.Л.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
11. *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* Аналитические свойства преобразования Ханкеля и их использование при численной реализации вариационных принципов // Радиотехн. и электроника. 1978. Т. 23. № 8. С. 1625–1630.
12. *Ахиезер Н.И.* К теории спаренных интегральных уравнений // Уч. зап. Харьковского гос. ун-та. 1957. Т. 80. С. 5–21.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962.
15. *Даугавет И.К.* Теория приближенных методов. Линейные уравнения. С.Пб: “БХВ-Петербург”, 2006.
16. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.