ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 9, с. 1482–1494

УДК 517.97

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБЩЕГО МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА[1)]

© 2019 г. А. Ф. Албу[1,2], В. И. Зубов[1,2,*]

([1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия;
[2] 141700 М. о., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ, Россия)
**e-mail: zubov@ccas.ru*

Поступила в редакцию 28.03.2019 г.
Переработанный вариант 28.03.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

В работе изучается особенность применения общего метода множителей Лагранжа к решению вариационных задач в случае, когда частью границы области, в которой определены фазовые переменные и управляющие функции, является характеристика системы уравнений с частными производными. Показано, что если на участке границы-характеристике фазовые переменные и управляющие функции не связаны никакими соотношениями и они не влияют на значение целевого функционала, то учитывать при варьировании функционала условия совместности системы определяющих уравнений нет необходимости. В противном случае условия совместности вдоль характеристики необходимо включать в обобщенный функционал Лагранжа со своими множителями. Библ. 13. Фиг. 2.

Ключевые слова: вариационная задача, первая вариация функционала, градиент, сопряженные уравнения, характеристики.

DOI: 10.1134/S0044466919090035

ВВЕДЕНИЕ

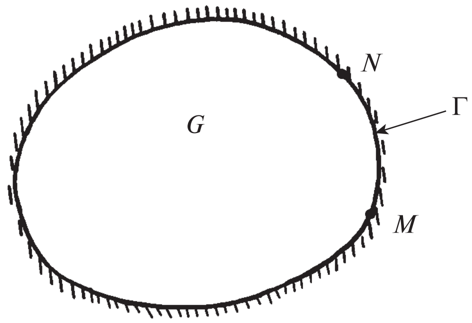
Общий метод множителей Лагранжа — эффективный инструмент исследования и решения задач оптимального управления сложными системами. Он является обобщением классического метода множителей Лагранжа и предназначен для оптимизации функционалов достаточно общего вида при связях, задаваемых дифференциальными уравнениями с частными производными. Указанное обобщение было проведено К.Г. Гудерлеем и Д.В. Армитейджем [1] и независимо от них Т.К. Сиразетдиновым [2] для связей, задаваемых дифференциальными уравнениями газовой динамики. Авторы работ [1], [2] предложили учитывать связи (дифференциальные уравнения с частными производными) с помощью надлежащим образом введенных множителей Лагранжа. Исследование ряда практически важных задач потребовало дополнительной модификации метода множителей Лагранжа, что и было сделано А.Н. Крайко в [3], [4]. Пользуясь обычной процедурой вариационного исчисления, можно получить уравнения Эйлера и естественные граничные условия. С помощью общего метода множителей Лагранжа решено большое число интересных с теоретической точки зрения и важных с практической точки зрения задач.

В настоящей работе исследуется методический вопрос, важный для понимания и использования общего метода множителей Лагранжа: нужно ли при постановке оптимизационной задачи в случае, когда частью границы области, в которой определены фазовые переменные и управляющие функции, является характеристика системы уравнений с частными производными, в функционал Лагранжа включать условия совместности этой системы.

Показано, что если часть границы — характеристика системы уравнений с частными производными, определяющей поведение оптимизируемого процесса, то эта часть границы является также характеристикой сопряженной системы уравнений с тем же, что и у исходной системы уравнений, числом линейно независимых характеристических соотношений.

Показано также, что если на участке границы-характеристике фазовые переменные и управляющие функции не связаны никакими соотношениями, и они не влияют на значение целевого

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 17-07-00493 а).



Фиг. 1. Рассматриваемая область G с границей Γ.

функционала, то учитывать при варьировании функционала условия совместности системы определяющих уравнений нет необходимости. В противном случае условия совместности вдоль характеристики необходимо включать в обобщенный функционал Лагранжа со своими множителями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как и в работе [5], рассмотрим задачу об определении первой вариации следующего функционала

$$\begin{gathered} I = J + i = \iint\limits_G F\left[x, y, \bar{Z}(x,y), \bar{U}(x,y)\right] dxdy + \\ + \oint\limits_\Gamma f\left[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \bar{Z}\left(x(t), y(t)\right), \bar{U}\left(x(t), y(t)\right), \bar{W}\left(x(t), y(t)\right), \bar{V}\left(x(t), y(t)\right)\right] dt = \\ = \iint\limits_G F\left[x, y, \bar{Z}(x,y), \bar{U}(x,y)\right] dxdy + \oint\limits_\Gamma f\left[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{w}(t), \bar{v}(t)\right] dt. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь G – некоторая ограниченная область в плоскости независимых переменных (x, y); Γ – кусочно-гладкая граница области G (см. фиг. 1); $t \in [0,1]$ – некоторый параметр вдоль границы Γ; f и F – гладкие функции своих аргументов; точка над переменной означает дифференцирование по параметру t;

$$\bar{Z}(x,y) \equiv \left[Z_1(x,y), \ldots, Z_n(x,y)\right], \quad \bar{U}(x,y) \equiv \left[U_1(x,y), \ldots, U_N(x,y)\right]$$

суть зависимые (фазовые) переменные и объемные управления соответственно, определенные в области G;

$$\bar{z}(t) \equiv \bar{Z}\left[x(t), y(t)\right], \quad \bar{u}(t) \equiv \bar{U}\left[x(t), y(t)\right]$$

суть значения зависимой переменной $\bar{Z}\left(x,y\right)$ и объемного управления $\bar{U}\left(x,y\right)$ на граничной линии Γ;

$$\bar{w}(t) = \bar{W}\left[x(t), y(t)\right], \quad \bar{v}(t) = \bar{V}\left[x(t), y(t)\right]$$

суть граничные зависимые переменные и граничные управления,

$$\bar{W}(x,y) \equiv \left[W_1(x,y), \ldots, W_m(x,y)\right], \quad \bar{V}(x,y) \equiv \left[V_1(x,y), \ldots, V_M(x,y)\right].$$

Интеграл по границе Γ области G зависит от самой кривой Γ и данных на ней, а не от выбора частного параметрического представления $\left\{x(t), y(t)\right\}$ этой кривой. Поэтому функция f должна быть положительно однородной функцией первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ (см. [6], [7]), т.е.

$$f\left(x, y, \rho\dot{x}, \rho\dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}\right) = \rho f\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}\right), \quad \rho > 0.$$

Зависимые переменные $\bar{Z}(x,y)$ определяются из решения следующей краевой задачи

$$\begin{gathered}\bar{L}(x,y,\bar{Z},\bar{U})=0, \quad (x,y)\in G,\\ \bar{l}\,[x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t),\bar{z}(t),\bar{u}(t),\bar{w}(t),\bar{v}(t)]=0, \quad t\in[0,1],\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\bar{l}\,(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})\equiv\left[l_1(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v}),\,\ldots,\,l_{\tilde{n}}(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})\right].$$

Последние соотношения в (2) – конечные соотношения, связывающие граничные значения зависимых переменных $\bar{z}$ с граничными управлениями $\bar{u}$ (функция $\bar{l}$ – положительно однородная функция первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$);

$$\bar{L}(x,y,\bar{Z},\bar{U})\equiv\left[L_1(x,y,\bar{Z},\bar{U}),\,\ldots,\,L_n(x,y,\bar{Z},\bar{U})\right],$$

$$\begin{gathered}L_k(x,y,\bar{Z},\bar{U})\equiv\frac{\partial}{\partial x}A_k\,[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)]+\frac{\partial}{\partial y}B_k\,[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)]-\\ -\,\varphi_k\,[x,y,\bar{Z}(x,y),\bar{U}(x,y)],\end{gathered}$$

$A_k,\ B_k,\ \varphi_k,\ k=1,\ldots,n$ – достаточно гладкие функции своих аргументов; под производной $\frac{\partial}{\partial x}A_k$ следует понимать полную производную функции A_k по x при фиксированном y, а под производной $\frac{\partial}{\partial y}B_k$ – полную производную функции B_k по y при фиксированном x.

Граничные зависимые переменные $\bar{w}(t)$ связаны с граничными управлениями $\bar{v}$ следующими соотношениями:

$$\bar{g}\,(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})=0, \tag{3}$$

где

$$\bar{g}\,(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})\equiv\left[g_1(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v}),\,\ldots,\,g_{\tilde{m}}(x,y,\dot{x},\dot{y},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{v})\right]$$

(функция $\bar{g}$ – положительно однородная функция первой степени однородности относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$).

Существование решения задачи (2) для управлений из рассматриваемой области предполагается. Предполагается также гладкая зависимость решений задачи (2) от управлений.

Область G и ее граница Γ зависят от управлений, т.е. меняются при варьировании функционала (1). Для простоты дальнейшего изложения будем в настоящей работе рассматривать случай, когда на границе Γ области G и в самой области отсутствуют особые точки.

Как и в работе [5], здесь рассматривается однопараметрическое семейство управлений $\bar{U}(x,y,\alpha)$ и $\bar{V}(x,y,\alpha)$. Управления $\bar{U}(x,y,\alpha)$ определены в области $G(\alpha)$ с зависящей от параметра α границей $\Gamma(\alpha)$, а управления $\bar{V}(x,y,\alpha)$ определены на границе $\Gamma(\alpha)$ (существование такого семейства всегда предполагается при определении необходимых условий слабого экстремума). Управления $\bar{U}(x,y)$ и $\bar{V}(x,y)$, "подозреваемые" на экстремум, входят в указанное семейство, и им соответствует значение параметра α, равное нулю, т.е. $\bar{U}(x,y)\equiv\bar{U}(x,y,0)$ и $\bar{V}(x,y)\equiv\bar{V}(x,y,0)$. Считается, что функции $\bar{U}(x,y,\alpha)$ и $\bar{V}(x,y,\alpha)$ имеют непрерывные производные по параметру α для любой точки (x,y) области $G(\alpha)$ и ее границы $\Gamma(\alpha)$. Координаты точек области $G(\alpha)$ являются гладкими функциями параметра α и могут быть определены с помощью соотношений

$$\begin{aligned}x&=x(\xi,\eta,\alpha),\\ y&=y(\xi,\eta,\alpha).\end{aligned}$$

В этих соотношениях переменные (ξ,η) являются (x,y)-координатами точек области $G(0)$, т.е. $x(\xi,\eta,0)=\xi$ и $y(\xi,\eta,0)=\eta$. Если граница $\Gamma(0)$ области $G(0)$ задается параметрическим представлением $x = \xi(t),\ y = \eta(t)$, то граница $\Gamma(\alpha)$ области $G(\alpha)$ определяется с помощью следующего параметрического представления:

$$x(t,\alpha) = x\left[\xi(t),\eta(t),\alpha\right],$$
$$y(t,\alpha) = y\left[\xi(t),\eta(t),\alpha\right],$$

причем предполагается гладкость этих функций по параметру α.

Под первой вариацией функционала (1) понимают (см., например, [6]–[8]) дифференциал следующей функции параметра α:

$$I(\alpha) = i(\alpha) + J(\alpha) \equiv \oint\limits_{\Gamma(\alpha)} f[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)]dt + \\ + \iint\limits_{G(\alpha)} F[x, y, \bar{Z}(x,y,\alpha), \bar{U}(x,y,\alpha)]dxdy, \tag{4}$$

вычисленный при $\alpha = 0$. В соотношении (4) точка над буквой обозначает частную производную по параметру t.

Для учета связей, накладываемых на варьируемые функции, используется обобщенный метод множителей Лагранжа [1]–[4], [9]. Суть этого метода заключается в добавлении к основному функционалу (4) двух вспомогательных функционалов $S(\alpha)$ и $s(\alpha)$ такого вида:

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{G(\alpha)} \mu_k(x,y) L_k\left[x, y, \bar{Z}(x,y,\alpha), \bar{U}(x,y,\alpha)\right]dxdy,$$
$$s(\alpha) = \sum_{h=1}^{\tilde{m}} \int\limits_0^1 \sigma_h(t) g_h\left[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)\right]dt + \\ + \sum_{r=1}^{\tilde{n}} \int\limits_0^1 \lambda_r(t) l_r\left[x(t,\alpha), y(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), \bar{z}(t,\alpha), \bar{u}(t,\alpha), \bar{w}(t,\alpha), \bar{v}(t,\alpha)\right]dt. \tag{5}$$

Функционал $S(\alpha)$ учитывает дифференциальные связи, накладываемые на варьируемые в области G функции, а функционал $s(\alpha)$ учитывает связи, накладываемые на варьируемые на границе Γ области G функции.

Определение первой вариации обобщенного функционала $\tilde{I}(\alpha) = i(\alpha) + J(\alpha) + s(\alpha) + S(\alpha)$ проведено в [5]. Там получено, что при отсутствии особых точек на границе $\Gamma(0)$ области $G(0)$ имеем

$$\tilde{I}'(0) = i'(0) + J'(0) + s'(0) + S'(0) = \iint\limits_{G(0)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\Psi_i^Z \frac{\partial Z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\Psi_j^U \frac{\partial U_j}{\partial\alpha}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta + \\ + \int\limits_0^1\left[\Omega^x \frac{\partial x}{\partial\alpha} + \Omega^y \frac{\partial y}{\partial\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\left(\Omega_i^z \frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\Omega_j^u \frac{\partial u_j}{\partial\alpha}\right) + \sum_{p=1}^{m}\left(\Omega_p^w \frac{\partial w_p}{\partial\alpha}\right) + \sum_{q=1}^{M}\left(\Omega_q^v \frac{\partial v_q}{\partial\alpha}\right)\right]dt, \tag{6}$$

где

$$\Psi_i^Z = \frac{\partial F}{\partial Z_i} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial Z_i}\right),$$
$$\Psi_j^U = \frac{\partial F}{\partial U_j} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial y} + \mu_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial U_j}\right),$$
$$\Omega^x = \dot{y}F + \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\right] + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left[\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial\dot{x}}\right)\right] + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left[\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial\dot{x}}\right)\right] - \\ - \sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{\partial Z_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right)\right]\frac{\partial U_j}{\partial x},$$

$$\Omega^y = -\dot{x}F + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left[\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial \dot{y}}\right)\right] + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left[\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial \dot{y}}\right)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\theta_i \frac{\partial Z_i}{\partial y} - \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right)\right]\frac{\partial U_j}{\partial y},$$

$$\Omega_i^z = \frac{\partial f}{\partial Z_i} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial Z_i} + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial Z_i} + \theta_i,$$

$$\Omega_j^u = \frac{\partial f}{\partial U_j} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial U_j} + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial U_j} + \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial U_j} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\right),$$

$$\Omega_p^w = \frac{\partial f}{\partial W_p} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial W_p}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial W_p}\right),$$

$$\Omega_q^v = \frac{\partial f}{\partial V_q} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\left(\lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial V_q}\right) + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\left(\sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial V_q}\right),$$

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\right).$$

Выражение (6) позволяет вычислить первую производную вспомогательной функции $\tilde{I}(\alpha)$ (для $\alpha = 0$) при любом (конечном) выборе множителей Лагранжа $\mu_k(x, y)$, $\lambda_r(t)$, $\sigma_h(t)$, и значение этой производной не зависит от выбора указанных множителей.

После специального выбора множителей Лагранжа, определяемого соотношениями

$$\begin{gathered} \Psi_i^Z = 0, \quad (x, y) \in G(0), \\ \Omega_i^z(t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\Omega_p^w(t) = 0, \qquad t \in [0,1], \quad p = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

для первой производной вспомогательной функции $\tilde{I}(\alpha)$ при значении $\alpha = 0$ получим такое выражение:

$$\begin{gathered} \tilde{I}'(0) = i'(0) + J'(0) + s'(0) + S'(0) = \iint\limits_{G(0)}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\Psi_j^U \frac{\partial U_j}{\partial \alpha}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi d\eta + \\ + \int_0^1\left[\Omega^x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \Omega^y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^{N}\left(\Omega_j^u \frac{\partial u_j}{\partial \alpha}\right) + \sum_{q=1}^{M}\left(\Omega_q^v \frac{\partial v_q}{\partial \alpha}\right)\right]dt. \end{gathered} \tag{9}$$

Система уравнений (7), (8) в целом служит для определения всех перечисленных выше множителей Лагранжа. Здесь мы не будем обсуждать важный и непростой вопрос о корректности поставленной задачи (7), (8), но будем предполагать, что из системы уравнений (7), (8) указанные множители Лагранжа $\mu_k(x, y)$, $\lambda_r(t)$, $\sigma_h(t)$ можно определить (в каждом конкретном случае этот факт следует отдельно проверять).

Предположим теперь, что часть MN границы $\Gamma = \Gamma(0)$ области $G = G(0)$ (фиг. 1) является характеристикой системы (2) дифференциальных уравнений с частными производными. Возникает вопрос: нужно ли при решении оптимизационной задачи включать в функционал Лагранжа условия совместности управляющей системы уравнений на границе $\Gamma = \Gamma(\alpha)$?

2. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система дифференциальных уравнений, определяющая поведение оптимизируемого процесса, имеет вид

$$\frac{\partial A_k\left(x,y,\bar{Z},\bar{U}\right)}{\partial x}+\frac{\partial B_k\left(x,y,\bar{Z},\bar{U}\right)}{\partial y}=\varphi_k\left(x,y,\bar{Z},\bar{U}\right),\quad k=1,\ldots,n. \tag{10}$$

Здесь $\bar{Z}(x,y)\equiv\left[Z_1(x,y),\ldots,Z_n(x,y)\right]$ – зависимые переменные, определяемые в результате решения краевой задачи (2), а $\bar{U}(x,y)\equiv\left[U_1(x,y),\ldots,U_N(x,y)\right]$ – объемные управления.

В соответствии с общей теорией характеристик (см., например, [10]–[13]) приведем рассматриваемую систему к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial y}\right)=\varphi_k-\frac{\partial A_k}{\partial x}-\frac{\partial B_k}{\partial y}-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Пусть A – квадратная матрица порядка n, элементы a_{ki} которой определяются равенствами

$$a_{ki}=\frac{\partial A_k}{\partial Z_i},\quad k=1,\ldots,n,\quad i=1,\ldots,n;$$

B – квадратная матрица порядка n, элементы b_{ki} которой определяются равенствами

$$b_{ki}=\frac{\partial B_k}{\partial Z_i};$$

$\bar{\beta}$ – вектор порядка n, элементы β_k которого определяются равенствами

$$\beta_k=\varphi_k-\frac{\partial A_k}{\partial x}-\frac{\partial B_k}{\partial y}-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial B_k}{\partial U_j}\frac{\partial U_j}{\partial y}\right).$$

Тогда система уравнений (10) может быть записана в матричном виде:

$$\mathrm{A}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial y}=\bar{\beta}. \tag{12}$$

Каждая компонента вектора $\bar{Z}$ – скалярная функция $Z_i(x,y)$ с непрерывными частными производными – определена в области G (и на ее границе Γ). В любой точке области G (включая точки границы) можно рассмотреть градиент скалярной функции $Z_i(x,y)$ – вектор, определяемый в виде

$$\nabla Z_i=\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x},\frac{\partial Z_i}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}}.$$

Если функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ задают параметрическое представление границы Γ области G (причем $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)>0$), то в каждой точке границы Γ определим два вектора: касательный вектор $\bar{\tau}(t)=\left(\tau_x,\tau_y\right)^{\mathrm{т}}$ и нормальный вектор $\bar{\nu}(t)=\left(\tau_y,-\tau_x\right)^{\mathrm{т}}$, где

$$\tau_x=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\quad\text{и}\quad\tau_y=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}.$$

Теперь наряду с градиентом ∇Z_i функции $Z_i(x,y)$ рассмотрим ее производные по касательному и нормальному направлениям, т.е.

$$\frac{dZ_i}{d\tau}=\left(\bar{\tau},\nabla Z_i\right)=\tau_x\frac{\partial Z_i}{\partial x}+\tau_y\frac{\partial Z_i}{\partial y},\quad\frac{dZ_i}{d\nu}=\left(\bar{\nu},\nabla Z_i\right)=\tau_y\frac{\partial Z_i}{\partial x}-\tau_x\frac{\partial Z_i}{\partial y}.$$

Компоненты вектора градиента функции $Z_i(x,y)$ выражаются через производные по тангенциальному и нормальному направлениям:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x} = \tau_x \frac{dZ_i}{d\tau} + \tau_y \frac{dZ_i}{d\nu}, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial y} = \tau_y \frac{dZ_i}{d\tau} - \tau_x \frac{dZ_i}{d\nu}.$$

Учитывая полученные выражения для частных производных $\frac{\partial Z_i}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z_i}{\partial y}$, систему уравнений (12) запишем в виде

$$\mathrm{A}\left(\tau_x \frac{d\bar{Z}}{d\tau} + \tau_y \frac{d\bar{Z}}{d\nu}\right) + \mathrm{B}\left(\tau_y \frac{d\bar{Z}}{d\tau} - \tau_x \frac{d\bar{Z}}{d\nu}\right) = \bar{\beta},$$

или

$$-\left(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B}\right)\frac{d\bar{Z}}{d\nu} = \left(\tau_x \mathrm{A} + \tau_y \mathrm{B}\right)\frac{d\bar{Z}}{d\tau} - \bar{\beta}.$$

Так как вектор $\bar{\tau}(t)$ касается характеристики MN (задает характеристическое направление), то матрица $\left(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B}\right)$ вырожденная, и $Rg\left(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B}\right) = r < n$ (см. [10]–[13]). Это значит, что существуют $(n - r)$ линейно независимых вектор-строк $\bar{\gamma}^{(s)} = \left\|\gamma_1^{(s)}, \ldots, \gamma_n^{(s)}\right\|$ таких, что $\bar{\gamma}^{(s)}\left(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B}\right) = \|0\ldots0\|$ – нулевая строка. При этом вдоль характеристики MN выполняются $(n - r)$ условий совместности вида

$$\bar{\gamma}^{(s)}\left[\left(\tau_x \mathrm{A} + \tau_y \mathrm{B}\right)\frac{d\bar{Z}}{d\tau} - \bar{\beta}\right] = 0, \quad s = 1, \ldots, n - r,$$

или

$$\Lambda_s \equiv \bar{\gamma}^{(s)}\left[(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\frac{d\bar{Z}}{d\tau} - \bar{\beta}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right] = 0. \tag{13}$$

3. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В области G множители Лагранжа $\mu_k(x,y)$, $k = 1, \ldots, n$, определим с помощью равенств (14), которые вытекают из выражений (6), (7) для первой вариации обобщенного функционала

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial Z_i}\frac{\partial \mu_k}{\partial x} + \frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\frac{\partial \mu_k}{\partial y} + \mu_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial Z_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial Z_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

В матричном виде система уравнений (14) может быть представлена в виде

$$\mathrm{A}^{\mathrm{т}}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} + \mathrm{B}^{\mathrm{т}}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} + \Phi^{\mathrm{т}}\bar{\mu} = \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}}, \tag{15}$$

где матрицы A и B определены выше, а элементы ϕ_{ki} матрицы Φ вычисляются с помощью формул $\phi_{ki} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial Z_i}$, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n$. Выражая, как это сделано выше, частные производные $\frac{\partial \mu_k}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mu_k}{\partial y}$ функций $\mu_k(x,y)$ через их производные вдоль касательного и нормального направлений $\frac{d\mu_k}{d\tau}$ и $\frac{d\mu_k}{d\nu}$, придадим системе уравнений (14) вид

$$-(\tau_y \mathrm{A}^{\mathrm{т}} - \tau_x \mathrm{B}^{\mathrm{т}})\frac{d\bar{\mu}}{d\nu} = (\tau_x \mathrm{A}^{\mathrm{т}} + \tau_y \mathrm{B}^{\mathrm{т}})\frac{d\bar{\mu}}{d\tau} + \Phi^{\mathrm{т}}\bar{\mu} - \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}},$$

или

$$-(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{т}}\frac{d\bar{\mu}}{d\nu} = (\tau_x \mathrm{A} + \tau_y \mathrm{B})^{\mathrm{т}}\frac{d\bar{\mu}}{d\tau} + \Phi^{T}\bar{\mu} - \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}}.$$

Ранг матрицы $(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}}$ равен рангу матрицы $(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})$, т.е. $Rg(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = r$. Это означает следующее.

1. Если часть MN границы Γ является характеристикой системы уравнений (10), то она является также характеристикой сопряженной системы уравнений (14) с таким же числом линейно независимых характеристических соотношений.

2. Существуют $(n-r)$ линейно независимых вектор-строк $\overline{\eta}^{(s)} = \left\|\eta_1^{(s)}, \ldots, \eta_n^{(s)}\right\|$ таких, что $\overline{\eta}^{(s)}(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \|0 \ldots 0\|$; при этом вдоль характеристики MN справедливы $(n-r)$ условий совместности для сопряженной системы (14) вида

$$\overline{\eta}^{(s)}\left[(\tau_x \mathrm{A} + \tau_y \mathrm{B})^{\mathrm{T}} \frac{d\overline{\mu}}{d\tau} + \Phi^{\mathrm{T}}\overline{\mu} - \frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}\right] = 0, \quad s = 1, \ldots, n-r. \tag{16}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В результирующем выражении (6) для первой вариации обобщенного функционала фигурируют члены θ_i, определяемые равенством

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно заметить, что θ_i есть i-я компонента вектор-столбца $\overline{\theta} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}}\,\overline{\mu}$.

В предыдущем разделе было отмечено, что существуют $(n-r)$ линейно независимых (и, конечно, ненулевых) вектор-строк $\overline{\eta}^{(s)}$ таких, что

$$\overline{\eta}^{(s)}(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \|0 \ldots 0\|.$$

Умножив обе части последнего равенства справа на вектор-столбец $\overline{\mu} = \|\mu_1, \ldots, \mu_n\|^{\mathrm{T}}$, получим $\overline{\eta}^{(s)}(\tau_y \mathrm{A} - \tau_x \mathrm{B})^{\mathrm{T}}\,\overline{\mu} = 0$, или

$$\overline{\eta}^{(s)}\overline{\theta} = 0, \quad s = 1, \ldots, n-r.$$

Последнее равенство означает, что среди компонент вектора $\overline{\theta}$ (если их рассматривать как функции переменных $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$) только r являются линейно независимыми. Остальные $(n-r)$ компоненты могут быть представлены как их линейные комбинации.

В соответствии с идеологией общего метода множителей Лагранжа будем стараться обратить в нуль коэффициенты при $\dfrac{\partial z_i}{\partial \alpha}$ в интеграле по границе Γ области G. Для первой вариации обобщенного функционала имеем (см. (6))

$$\tilde{I}'(0) = \ldots + \int_0^1 \left[\ldots + \sum_{i=1}^{n}\left(\Omega_i^z \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right) + \ldots\right] dt,$$

где

$$\Omega_i^z = \frac{\partial f}{\partial Z_i} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}} \lambda_r \frac{\partial l_r}{\partial Z_i} + \sum_{h=1}^{\tilde{m}} \sigma_h \frac{\partial g_h}{\partial Z_i} + \theta_i, \quad \theta_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если участок MN границы Γ не является характеристикой системы управляющих уравнений (10), то $\det\|\dot{y}A - \dot{x}B\| \neq 0$, и ранг матрицы $(\dot{y}A - \dot{x}B)^{\mathrm{T}}$ равен n. В этом случае из системы уравнений

$$\Omega_i^z = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

(см. (7)) можно однозначно найти все множители Лагранжа μ_k, $k = 1, \ldots, n$, при любых множителях Лагранжа $\{\lambda_r\}_1^{\tilde{n}}$, $\{\sigma_h\}_1^{\tilde{m}}$ и любой функции f. Система уравнений (17) в этом случае совместна.

Если же участок MN границы Г является характеристикой системы управляющих уравнений (10), то

$$\det\|\dot{y}A - \dot{x}B\| = 0, \quad Rg\,(\dot{y}\mathrm{A} - \dot{x}\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = r < n.$$

Здесь следует отдельно рассмотреть два случая.

Случай 1. Пусть на участке-характеристике MN фазовые переменные и управляющие функции не связаны никакими соотношениями, и они здесь не влияют на значение целевого функционала (т.е., $l_r \equiv 0$, $g_h \equiv 0$, $f \equiv 0$). В этом случае система уравнений (17) является однородной относительно множителей Лагранжа μ_k, $k = 1, \ldots, n$. Эта система позволяет выразить r функций μ_k через $(n-r)$ остальных, которые определяются с помощью условий совместности (16). Иначе говоря, в данном случае система уравнений (17) разрешима и накладывает только r связей на множители Лагранжа μ_k.

Случай 2. Пусть на участке-характеристике MN хотя бы одна из функций l_r, g_h, f не равна нулю (либо параметры течения связаны дополнительными соотношениями, либо значение целевого функционала определяется параметрами течения на этом участке, либо и то и другое вместе). В этом случае система уравнений (17) является неоднородной системой относительно множителей Лагранжа μ_k, и, вообще говоря, она несовместна (ранг основной матрицы не равен рангу расширенной). Это означает, что с помощью выбора множителей Лагранжа μ_k невозможно обратить в нуль все коэффициенты при $\dfrac{\partial z_i}{\partial\alpha}$ в интеграле по границе Г области G.

Для того чтобы выйти из сложной ситуации, возникающей в данном случае, добавим к обобщенному функционалу $\tilde{I}$ следующее дополнительное слагаемое (см. фиг. 1):

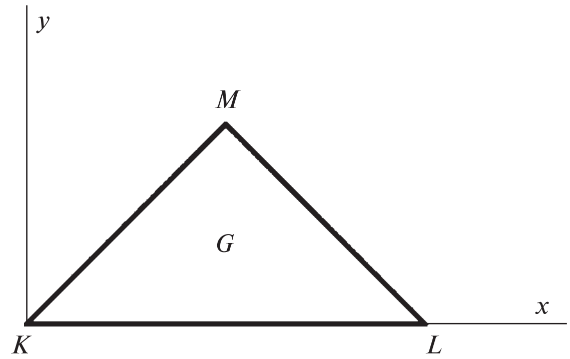
$$J_{add} = -\int\limits_M^N \sum_{s=1}^{n-r} \chi_s(t)\overline{\gamma}^{(s)}\left[(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\frac{d\overline{z}}{d\tau} - \overline{\beta}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right]dt = -\int\limits_M^N \sum_{s=1}^{n-r} \chi_s \Lambda_s dt.$$

Дополнительный функционал J_{add} зависит от функций x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\overline{z}$, $\overline{u}$, которые будут варьироваться при варьировании обобщенного функционала. Отсюда следует, что при варьировании функционала J_{add} в интеграле вдоль характеристики MN появятся слагаемые с теми же вариациями тех же функций, что были и раньше. Это означает, что в выражении для первой вариации обобщенного функционала $\tilde{I}$ изменятся коэффициенты при $\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial z_i}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial u_j}{\partial\alpha}$, но членов с новыми вариациями не появится. Поставим перед собой вопрос: как добавление к обобщенному функционалу Лагранжа $\tilde{I}$ функционала J_{add} скажется на разрешимости задачи по определению множителей Лагранжа μ_k на линии MN?

Теперь, после добавления функционала J_{add}, перед производной $\dfrac{\partial z_i}{\partial\alpha}$ (вариацией функции z_i) в контурном интеграле вдоль характеристики MN будет стоять коэффициент $\tilde{\Omega}_i^z$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_i^z &= \Omega_i^z + \sum_{s=1}^{n-r}\chi_s\left\{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\partial}{\partial z_i}(\overline{\gamma}^{(s)}\overline{\beta}) - \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\overline{\gamma}^{(s)}(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\right]\frac{d\overline{z}}{dt}\right\} + \sum_{s=1}^{n-r}\frac{d}{dt}\left\{\chi_s\left[\overline{\gamma}^{(s)}(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\right]_i\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\dot{y}\frac{\partial A_k}{\partial Z_i} - \dot{x}\frac{\partial B_k}{\partial Z_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial Z_i} + \sum_{r=1}^{\tilde{n}}\lambda_r\frac{\partial l_r}{\partial Z_i} + \sum_{h=1}^{\tilde{m}}\sigma_h\frac{\partial g_h}{\partial Z_i} + \sum_{s=1}^{n-r}\frac{d}{dt}\left\{\chi_s\left[\overline{\gamma}^{(s)}(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\right]_i\right\} + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{n-r}\chi_s\left\{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\partial}{\partial z_i}(\overline{\gamma}^{(s)}\overline{\beta}) - \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\overline{\gamma}^{(s)}(\dot{x}\mathrm{A} + \dot{y}\mathrm{B})\right]\frac{d\overline{z}}{dt}\right\}, \quad i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Функции $\tilde{\Omega}_i^z$ зависят от множителей Лагранжа μ_k и от множителей Лагранжа χ_s, $s = 1, \ldots, n-r$, причем функции Ω_i^z зависят от функций μ_k и не зависят от функций χ_s.



Фиг. 2. Область G, границы MK и LM – характеристики управляющей системы уравнений.

Будем, как и прежде, пытаться обратить в нуль коэффициенты при $\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}$ в интеграле вдоль характеристики MN путем подходящего выбора множителей Лагранжа μ_k. Теперь система уравнений для определения функций μ_k будет иметь вид

$$\tilde{\Omega}_i^z = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Основная матрица системы (18) будет той же, что и основная матрица системы (17). Ее ранг равен, как и прежде, r. Изменится вектор свободных членов, так как в нем появятся новые множители Лагранжа χ_s. При произвольно выбранных множителях Лагранжа χ_s система уравнений (18) относительно функций μ_k будет по-прежнему неразрешима. Однако теперь у нас появились $(n - r)$ свободных функций χ_s, выбирая которые специальным образом можно добиться того, что ранг расширенной матрицы станет равным рангу основной матрицы. Это означает, что задача определения множителей Лагранжа μ_k будет разрешима и что, выбирая функции μ_k как решение системы уравнений (18), можно исключить из выражения для первой вариации обобщенного функционала Лагранжа члены с $\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}$.

5. ПРИМЕР

Для иллюстрации результатов, полученных выше, рассмотрим следующую вариационную задачу. Пусть G – треугольная область в плоскости (x, y), части границы KL, LM, MK которой лежат соответственно на линиях $y = 0$, $y = 1 - x$ и $y = x$ (фиг. 2). Целевой функционал (1) здесь имеет вид

$$I = \iint_G F\left[x, y, Z_1(x, y), Z_2(x, y), U(x, y)\right] dxdy + \oint_{KLM} f\left[x, y(x), Z_1\left(x, y(x)\right), Z_2\left(x, y(x)\right), u(x)\right] dx. \tag{19}$$

Фазовые переменные $Z_1(x, y)$, $Z_2(x, y)$ и управления $U(x, y)$, $u(x)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} L_1\left(x, y, Z_1, Z_2, U\right) \equiv \frac{\partial A\left(x, y, Z_1\right)}{\partial x} + \frac{\partial B\left(x, y, Z_2\right)}{\partial y} - \varphi_1\left(x, y, Z_1, Z_2, U\right) = 0, \\ L_2\left(x, y, Z_1, Z_2, U\right) \equiv \frac{\partial B\left(x, y, Z_2\right)}{\partial x} + \frac{\partial A\left(x, y, Z_1\right)}{\partial y} - \varphi_2\left(x, y, Z_1, Z_2, U\right) = 0, \\ (x, y) \in G, \\ Z_1(x, 0) = \rho_0\left(x, u(x)\right), \quad Z_2(x, 0) = \rho_1\left(x, u(x)\right), \quad x \in (0, 1). \end{gathered} \tag{20}$$

Будем предполагать, что функции $A(x, y, Z_1)$, $B(x, y, Z_2)$, $\varphi_1(x, y, Z_1, Z_2, U)$, $\varphi_2(x, y, Z_1, Z_2, U)$, $F(x, y, Z_1, Z_2, U)$, $f(x, y, Z_1, Z_2, u)$, $\rho_0(x, u)$, $\rho_1(x, u)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов, что $\frac{\partial A}{\partial Z_1} \neq 0$ и $\frac{\partial B}{\partial Z_2} \neq 0$ всюду в $\bar{G}$, и что область G не меняется при варьировании управляющих функций. Что касается функции $f(x, y, Z_1, Z_2, u)$, то на линии MK она тождественно равна нулю.

Система уравнений (20) имеет гиперболический тип. Ее характеристиками являются линии $y'(x) = \pm 1$, условия совместности вдоль которых задаются соотношениями

$$y'(x)\frac{dA(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx} = y'(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x). \tag{21}$$

Таким образом, часть границы области G – линии LM и MK – являются характеристиками системы уравнений (20), и на этой части фазовые переменные и управления связаны условиями (21). Учтем эти связи, добавив к обобщенному функционалу Лагранжа дополнительный функционал

$$J_{add}^{(\pm)} = \int_{x_i^{(\pm)}}^{x_f^{(\pm)}} \chi^{(\pm)}(x)\left[y'\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} - y'(x)\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right]dx.$$

Здесь знак плюс указывает на линию MK – характеристику первого семейства ($x_i^{(+)} = x_M$, $x_f^{(+)} = x_K$), а знак минус – на характеристику второго семейства LM ($x_i^{(-)} = x_L$, $x_f^{(-)} = x_M$), $\chi^{(\pm)}(x)$ – множители Лагранжа.

Применение описанной выше техники для вычисления первой вариации целевого функционала (19) приводит к следующему.

Множители Лагранжа $\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$, учитывающие связи (20) в области G, должны удовлетворять сопряженной системе уравнений (22)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2(x,y)}{\partial y} = \Phi_1(x, y, Z_1, Z_2, U), \\ &\frac{\partial \mu_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1(x,y)}{\partial y} = \Phi_2(x, y, Z_1, Z_2, U), \end{aligned} \tag{22}$$

где введены такие обозначения

$$\Phi_1(x, y, Z_1, Z_2, U) = \frac{\partial(F - \varphi_1 - \varphi_2)}{\partial Z_1}\left(\frac{\partial A}{\partial Z_1}\right)^{-1},$$

$$\Phi_2(x, y, Z_1, Z_2, U) = \frac{\partial(F - \varphi_1 - \varphi_2)}{\partial Z_2}\left(\frac{\partial B}{\partial Z_2}\right)^{-1}.$$

Система дифференциальных уравнений (22) является гиперболической. Ее характеристики – линии $y'(x) = \pm 1$ (те же, что и у системы уравнений (20)), условия совместности на характеристиках таковы

$$y'(x)\frac{d\mu_1(x)}{dx} + \frac{d\mu_2(x)}{dx} = y'(x)\Phi_1(x) + \Phi_2(x). \tag{23}$$

Обращение в нуль коэффициентов перед вариациями фазовых переменных $Z_1(x, y)$ и $Z_2(x, y)$ на характеристиках MK (знак плюс) и LM (знак минус) приводит к следующей системе уравнений для множителей Лагранжа, которые должны выполняться на этих линиях:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial Z_1}\left[y'\mu_1 - \mu_2 - \frac{d}{dx}(y'\chi^{(\pm)})\right] - \chi^{(\pm)}\left[y'\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial Z_1}\right] + \frac{\partial f}{\partial Z_1} = 0, \\ &\frac{\partial B}{\partial Z_2}\left[y'\mu_2 - \mu_1 - \frac{d}{dx}(\chi^{(\pm)})\right] - \chi^{(\pm)}\left[y'\frac{\partial \varphi_1}{\partial Z_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial Z_2}\right] + \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Кроме того, анализ получающихся внеинтегральных членов в выражении для первой вариации целевого функционала Лагранжа в точке M позволяет заключить, что $\chi^{(+)}(x_M) = \chi^{(-)}(x_M) = 0$.

Рассмотрим вначале линию MK – характеристику первого семейства. В точках этой линии $f(x, y, Z_1, Z_2, u) \equiv 0$, $y'(x) = 1$. Равенства (24) представляют собой систему двух уравнений относительно функций $\nu^{(+)}(x) = \mu_1(x,x) - \mu_2(x,x)$ и $\chi^{(+)}(x)$. Нетрудно заметить, что эта система совместна лишь при условии

$$2\frac{d\chi^{(+)}}{dx} + \chi^{(+)}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_1}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial Z_1}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_2}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial Z_2}\right)^{-1}\right] = 0.$$

Последнее соотношение есть однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\chi^{(+)}(x)$. Вместе с условием $\chi^{(+)}(x_M) = 0$ оно позволяет заключить, что $\chi^{(+)}(x) \equiv 0$ на линии MK. Отсюда следует, что равенства (24) удовлетворяются одновременно при $\nu^{(+)}(x) = \mu_1(x,x) - \mu_2(x,x) \equiv 0$. Если значения множителей Лагранжа $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ в точке M известны, то условие совместности (23) и полученное условие $\mu_1(x,x) = \mu_2(x,x)$ позволяют однозначно определить множители Лагранжа $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ на всей характеристике MK. Так как целевой функционал (19) не зависит от значений фазовых переменных на характеристике MK и фазовые переменные и управляющие функции не связаны здесь никакими соотношениями, то, как и утверждалось в основной части статьи, включать условия совместности (23) на характеристике MK в обобщенный функционал Лагранжа нет необходимости. Мы могли сразу положить $\chi^{(+)}(x) \equiv 0$.

По-другому обстоит дело в случае характеристики LM. В точках этой линии $f(x,y,Z_1,Z_2,u)$ не равна тождественно нулю, и здесь без использования условия совместности (23) удовлетворить равенствам (24) не удастся. На линии LM система уравнений (24) будет совместна, если выполняется равенство

$$2\frac{d\chi^{(-)}}{dx} + \chi^{(-)}\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_1}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial Z_1}\right)^{-1} - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_2}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial Z_2}\right)^{-1}\right] - \left(\frac{\partial A}{\partial Z_1}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial Z_1} + \left(\frac{\partial B}{\partial Z_2}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0.$$

Последнее равенство, рассматриваемое как уравнение относительно функции $\chi^{(-)}(x)$, вместе с условием $\chi^{(-)}(x_M) = 0$ позволяет однозначно определить множитель Лагранжа $\chi^{(-)}(x)$ для всех точек характеристики LM. При таком выборе функции $\chi^{(-)}(x)$ система уравнений (24) уже будет совместна и позволит определить в точках линии LM функцию $\nu^{(-)}(x) = \mu_1(x,1-x) + \mu_2(x,1-x)$. Если значения множителей Лагранжа $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ в точке M известны, то условие совместности (23) и известные значения функции $\nu^{(-)}(x) = \mu_1(x,1-x) + \mu_2(x,1-x)$ позволяют однозначно определить множители Лагранжа $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ на всей характеристике LM.

Что касается значений множителей Лагранжа $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ в точке M, то они однозначно определяются известными значениями в этой точке функций

$$\nu^{(+)}(x) = \mu_1(x,x) - \mu_2(x,x) \quad \text{и} \quad \nu^{(-)}(x) = \mu_1(x,1-x) - \mu_2(x,1-x).$$

Таким образом, рассмотренный пример подтверждает выводы, сформулированные при исследовании задачи в общем виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guderley K.G., Armitage J.V.* A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Science Laboratory. Seattle. Washington. December 3–4. 1962. Рус. перев.: Гудерлей К.Г., Армитейдж Д.В. Общий метод определения оптимальных сверхзвуковых ракетных сопл // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. № 6. С. 85–101.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Сер. Авиац. техника. 1963. № 2. С. 11–21.
3. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.
4. *Крайко А.Н.* К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 312–320.

5. *Албу А.Ф., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И.* Об одном подходе к определению вариации функционала с особенностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1277–1295.
6. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
7. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ГИТТЛ, 1955. 248 с.
8. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
9. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 508 с.
10. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Издательство иностранной литературы, 1950. 427 с.
11. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
12. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
13. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 368 с.