УДК 517.929.7

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛА НА ДЕФОРМАЦИИ МАТЕРИАЛА С ДЕФЕКТОМ

© 2019 г. Е. В. Астахова[1,***], А. В. Глушко[1,*], Е. А. Логинова[1,**]

([1] 394018 Воронеж, Университетская пл., 1, ФГБОУ Воронежский гос. ун-т, Россия)

*e-mail: kuchp2@math.vsu.ru

**e-mail: loginova@vsu.ru

***e-mail: astahova.ekaterina.94@mail.ru

Поступила в редакцию 21.08.2018 г.
Переработанный вариант 28.02.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

Рассматривается система уравнений термоупругости. Граничные условия сопряжения задают разности температур, тепловых потоков, разность деформаций и их первых производных на границе. Изучается стационарный случай, граница (трещина) представляет собой отрезок $[-1;1]$ оси Ox_1. Проведено исследование задачи, обобщены результаты предыдущих работ, получено решение задачи и доказана корректность постановки. Наибольший интерес представляют результаты, посвященные асимптотическому поведению при $x_1 \to \pm 1$, $x_2 \to 0$ функций $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, отвечающих за смещение точки (x_1, x_2) при деформации материала и зависящих в том числе от $T(x_1, x_2)$ – температуры материала в точке (x_1, x_2), а также асимптотическое поведение производных функций $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$. Библ. 17.

Ключевые слова: задачи сопряжения, асимптотики по гладкости, система уравнений термоупругости, теплопроводность, деформация, граничные условия.

DOI: 10.1134/S0044466919090059

Задача изучения свойств композитных материалов не теряет актуальности до сих пор (см. [1]–[3]). В частности, решению задач теплопроводности, упругости, термоупругости для композитных материалов, в том числе с трещинами, посвящены работы [4]–[10]. Однако многие задачи были исследованы только с использованием численных методов. Целью данной работы является построение аналитического решения задачи термоупругости в плоском материале с трещиной в виде разреза и изучение асимптотических свойств его компонент и их производных вблизи границы.

Рассмотрим задачу термоупругости [10], описываемую в области

$$x = (x_1; x_2) \in \mathrm{R}^2 \setminus l, \quad \text{где} \quad l = \{x = (x_1; x_2) \,|\, x_2 = 0;\ x_1 \in (-1;1)\},$$

системой уравнений

$$\Delta T + \delta \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \tag{1}$$

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\frac{\partial T}{\partial x_1}, \tag{2}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\left((\beta+\gamma)T + \frac{\partial T}{\partial x_2}\right), \tag{3}$$

и условиями типа сопряжения на границе трещины $l = \{x = (x_1; x_2) \,|\, x_2 = 0;\ x_1 \in (-1;1)\}$

$$T(x_1, +0) - T(x_1, -0) = T_0(x_1), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{\delta}{2}T(x_1, +0) - \frac{\partial T(x_1, -0)}{\partial x_2} - \frac{\delta}{2}T(x_1, -0) = T_1(x_1), \tag{5}$$

$$u(x_1; +0) - u(x_1; -0) = 0, \tag{6}$$

$$v(x_1;+0) - v(x_1;-0) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v(x_1;+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1;-0)}{\partial x_2} = q_2(x_1). \tag{9}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $T(x_1, x_2)$ — температура в точке (x_1, x_2) материала, $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ — смещения точки (x_1, x_2) при деформации, δ входит в представление коэффициента внутренней теплопроводности $k(x_2) = k_0 e^{\delta x_2}$, β входит в представление модуля сдвига $\mu = \mu_0 e^{\beta x_2}$, γ входит в представление коэффициента теплового расширения $\alpha = \alpha_0 e^{\gamma x_2}$, величина $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3-\nu)(1+\nu)^{-1}$ для обобщенного плоского напряженного состояния [11], ν — коэффициент Пуассона, $\frac{5}{3} < \kappa < 3$.

Задача рассматривается при условии $0 < \gamma < \delta$ и $-\gamma^2 + \gamma\delta > 0$. Изучим задачу (1)—(9) в предположении, что функции $q_i(x_1) \equiv 0$, где $i = 1, 2$. Сделав замену $T(x_1, x_2) = e^{-\gamma x_2} p(x_1, x_2)$, перейдем к задаче

$$\Delta p(x_1, x_2) + (\delta - 2\gamma)\frac{\partial p(x_1, x_2)}{\partial x_2} + (\gamma^2 - \gamma\delta)p(x_1, x_2) = 0, \tag{10}$$

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 4\alpha_0\frac{\partial p}{\partial x_1}, \tag{11}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 4\alpha_0\left(\beta p + \frac{\partial p}{\partial x_2}\right), \tag{12}$$

$$p(x_1, +0) - p(x_1, -0) = T_0(x_1), \quad -1 < x_1 < 1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial p(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial p(x_1, -0)}{\partial x_2} = T_1(x_1) - \left(\frac{\delta}{2} - \gamma\right)T_0(x_1), \tag{14}$$

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v(x_1;+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1;-0)}{\partial x_2} = 0, \tag{15}$$

$$u(x_1;+0) - u(x_1;-0) = 0, \quad v(x_1;+0) - v(x_1;-0) = 0, \tag{16}$$

которая (см. [11]—[13]) в $S'(\mathrm{R}^2)$ сводится к обобщенной задаче, состоящей из уравнения

$$\begin{gathered}\Delta p(x_1, x_2) + (\delta - 2\gamma)\frac{\partial p(x_1, x_2)}{\partial x_2} + (\gamma^2 - \gamma\delta)p(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_0(x_1)\delta_{[-1;1]}\right) + \\ + \delta_{[-1;1]}\left(T_1(x_1) + \left(\frac{\delta}{2} - \gamma\right)T_0(x_1)\right)\end{gathered} \tag{17}$$

и уравнений (11), (12). Для построения решения задачи (11), (12), (17) используем преобразование Фурье, а также методы и оценки, аналогичные тем, что были применены в [14], [15]. В результате получим представления

$$u(x_1, x_2) = \frac{4\alpha_0(1-\kappa)}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{-ixs} is_1\left(|s|^2 + \beta^2\right)\left((is_2 - 0.5\delta + \gamma)R_0(s_1) - R_1(s_1)\right)}{\det B(s_1, s_2)\left(|s|^2 + is_2(\delta - 2\gamma) - (\gamma^2 - \gamma\delta)\right)}ds,$$

$$v(x_1, x_2) = \frac{4\alpha_0(1-\kappa)}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{-ixs}\left(is_2\left(|s|^2 - \beta^2\right) - 2\beta|s|^2\right)}{\det B(s_1, s_2)}\frac{(is_2 - 0.5\delta + \gamma)R_0(s_1) - R_1(s_1)}{|s|^2 + is_2(\delta - 2\gamma) - (\gamma^2 - \gamma\delta)}ds,$$

где

$$R_r(s_1) = \int_{-1}^{1} e^{ix_1 s_1} T_r(x_1) dx_1, \quad r = 0,1.$$

Далее рассмотрим интегралы

$$I_{pqr} = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\left(|s|^2 + is_2(\delta - 2\gamma) - (\gamma^2 - \gamma\delta)\right)} R_r(s_1)\right], \quad p,q \ge 0.$$

Заметим, что компоненты решения u, v и их первые производные состоят из линейных комбинаций интегралов I_{pqr}. Проводя оценку интегралов I_{pqr} при различных значениях $p+q$ аналогично [14], [15] и используя свойства специальных функций [16], [17], получаем доказательство следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть функции* $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ *принадлежат пространству* $C^1([-1;\ 1])$. *Пусть также* $T_0(\pm 1) = 0$. *Пусть* $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ *— решение задачи* (1)–(9), *где функции* $q_i(x_1) \equiv 0$, $i = 1,2$. *Тогда условия* (6), (7) *выполнены по непрерывности. Условия* (8), (9) *выполнены в смысле главного значения.*

Теорема 2. *Пусть функции* $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ *принадлежат пространству* $C^1([-1;1])$, *функции* $q_i(x_1) \equiv 0$, *где* $i = 1,2$. *Тогда справедливы следующие асимптотические по гладкости вблизи границы представления компонент решения задачи* (1)–(9) $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ *и их производных*

$$u(x_1,x_2) = P_1(x_1,x_2), \quad v(x_1,x_2) = P_2(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{x_2(x_1-1)}{(x_1-1)^2 + x_2^2} - \frac{x_2(x_1+1)}{(x_1+1)^2 + x_2^2}\right)T_0(x_1) + P_3(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right) + \frac{x_2^2}{(x_1-1)^2 + x_2^2}\right)T_0(x_1) -$$
$$- \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1+1)^2 + x_2^2\right) + \frac{x_2^2}{(x_1+1)^2 + x_2^2}\right)T_0(x_1) + P_4(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right) + \frac{x_2^2}{(x_1-1)^2 + x_2^2}\right)T_0(x_1) -$$
$$- \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1+1)^2 + x_2^2\right) + \frac{x_2^2}{(x_1+1)^2 + x_2^2}\right)T_0(x_1) + P_5(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{x_2(x_1+1)}{(x_1+1)^2 + x_2^2} - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1) -$$
$$- \frac{\alpha_0}{3\pi(\kappa+1)}\left(\frac{x_2(x_1-1)}{(x_1-1)^2 + x_2^2} - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1) + P_6(x_1,x_2),$$

где $P_j(x_1,x_2)$, $j = \{1, \ldots, 6\}$ *— непрерывные и ограниченные на* R^2 *функции.*

На основании результатов работ [14], [15] и теоремы 2, получим теорему 3.

Теорема 3. *Пусть* $q_r(x_1)$, $T_0(x_1)$, $T_1(x_1) \in C^1([-1;1])$; $r \in \{1;2\}$. *Тогда справедливы асимптотические при* $x_2 \to 0$; $x_1 \to \pm 1$ *представления компонент решения задачи* (1)–(9) *и производных компонент решения указанной задачи*

$$u(x_1,x_2) = W_{10}(x_1,x_2); \quad v(x_1,x_2) = W_{20}(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\left(\frac{q_1(x_1)(2k^2-2k+1)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{x_2(x_1-1)}{(x_1-1)^2+x_2^2}T_0(x_1)-\frac{x_2(x_1+1)}{(x_1+1)^2+x_2^2}T_0(x_1)\right)+W_{11}(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{q_1(x_1)}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2\operatorname{arctg}\frac{x_1-1}{x_2}+2\operatorname{arctg}\frac{x_1+1}{x_2}\right)-$$
$$-\frac{q_2(x_1)}{2\pi(k-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)+W_{12}(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{q_2(x_1)(2k^2+2k)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1-1)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2}\right)T_0(x_1)+W_{21}(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_1(x_1)}{\pi(k+1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2\operatorname{arctg}\frac{x_1-1}{x_2}+2\operatorname{arctg}\frac{x_1+1}{x_2}\right)q_2(x_1)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{x_2(x_1+1)}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2\operatorname{arctg}\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi(k+1)}\left(\frac{x_2(x_1-1)}{(x_1-1)^2+x_2^2}-2\operatorname{arctg}\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right)\right)T_0(x_1)+W_{22}(x_1,x_2).$$

Здесь функции $W_{pq}(x_1,x_2)$, $1\le p\le 2$, $0\le q\le 2$, – непрерывные ограниченные на любом компакте $K\in\mathrm{R}^2$ функции своих аргументов.

Заметим, что асимптотики третьей компоненты решения данной задачи выписаны в [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически решена задача термоупругости для материала с конечным разрезом (трещиной). Задача была задана системой трех уравнений: уравнением теплопроводности и двумя уравнениями упругости. Рассматриваемые уравнения были дополнены условиями типа сопряжения, т.е. условиями на разность неизвестных функций и их производных на границе разреза. Исследуемая задача была сведена к обобщенной, построено ее решение, доказано выполнение граничных условий. Основным результатом работы является построение сингулярных составляющих асимптотических представлений решения и его первых производных по расстоянию до границы – трещины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Koeller R.C.* Applications of fractional calculus to the theory of Viscoelasticity // J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. P. 299–307.
2. *Torvik P.J., Bagley R.L.* On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials // J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. P. 294–298.
3. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of functionally graded materials // Compreh. Structural Integrity. 2003. V. 2. P. 607–644.
4. *Mishuris G.S., Kuhn G.* Asymptotic behaviour of the elastic solution near the tip of a crack situated at a nonideal interface // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2001. V. 81. P. 811–826.
5. *Sladek V., Sladek J., Zhang C.* Transient heat conduction in anisotropic and functionally graded media by local integral equations // Eng. Analys. with Boundary Elements. 2005. V. 29. № 11. P. 1047–1065.
6. *Krahulec S., Sladek J., Sladek V., Hon Y.-Ch.* Meshless analyses for time-fractional heat diffusion in functionally graded materials // Engng. Analys. with Boundary Elements. 2016. V. 62. P. 57–64.
7. *Vitucci G., Mishuris G.* Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // J. of the European Ceramic Soc. 2016. V. 36. P. 2411–2417.
8. *Lei W.-S.* Non oscillatory and non-singular asymptotic solutions to stress fields at interface cracks // Willey Publish. Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct. 2017. P. 1–18.
9. *Рябенко А.С., Черникова А.С.* О единственности решения задачи, моделирующей распределение тепла в плоскости с трещиной на стыке двух материалов // Вестн. Воронежского Гос. Ун-та. Сер. Физ., Матем. 2017. № 4. С. 124–133.
10. *El-Borgi S., Erdogan F., Hidri L.* A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading // Internat. Journal of Engng Sci. 2004. № 42. С. 371–393.
11. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестн. ВГУ Серия: Физ. Матем. 2010. № 2. С. 47–50.
12. *Логинова Е.А.* Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной // Вестн. СПбГУ серия 1. Матем. Механ. Астрономия. 2012. Вып. 1. С. 40–47.
13. *Глушко А.В., Логинова Е.А., Петрова В.Е., Рябенко А.С.* Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 4. С. 695–703.
14. *Глушко А.В., Логинова Е.А., Пронина С.В.* Решение задачи деформаций неоднородного материала с трещиной под воздействием нагрузок // Сб. научн. трудов по итогам международной научно-практической конференции "Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны". С.-Пб: ИЦРОН. 2017. Вып. IV. С. 11–15.
15. *Глушко А.В., Логинова Е.А., Пронина С.В.* Асимптотическое поведение производных решения задачи упругих деформаций неоднородного материала под воздействием механических нагрузок // Вестн. ВГУ серия Физ. Матем. 2017. № 4. С. 70–87.
16. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. С. 456.
17. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Ч. 1. С. 787.