ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 9, с. 1459–1481

УДК 519.61

Посвящается С.К. Годунову

О СТРУКТУРЕ ОЦЕНОК БЛИЗОСТИ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ ИСХОДНОЙ И ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Бабенко

(350063 Краснодар, ул. Красина, 4, Краснодарское высшее военное училище им. генерала армии С.М. Штеменко, Россия)

e-mail: rnibvd@mail.ru

Поступила в редакцию 05.05.2018 г.
Переработанный вариант 25.04.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

В статье рассмотрен пример исходной и возмущенной систем линейных алгебраических уравнений, причем параметр матрицы возмущения лежит в области непрерывной зависимости псевдорешения от матрицы возмущения. С другой стороны, при обращении к известной оценке С.К. Годунова применительно к рассматриваемому примеру обнаружилось, что используемое в ней условие непрерывной зависимости псевдорешения от матрицы возмущения не выполняется. Эти противоречия обусловили инициирование исследований по их разрешению. В настоящей работе получены оценки близости псевдорешений исходной и возмущенной систем, в которой область непрерывной зависимости псевдорешения от матрицы возмущения более широка. Сравнение этой оценки с оценкой, представленной Лоусоном и Хенсоном, показало завышенность последней. Библ. 7.

Ключевые слова: ядро и образ матрицы, псевдообратная матрица, ортопроектор, размерность подпространства, раствор подпространств, сингулярное разложение матрицы, число обусловленности матрицы.

DOI: 10.1134/S0044466919090060

1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СТРУКТУРЫ ОЦЕНОК БЛИЗОСТИ ИХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ

Пусть A – матрица размерности $m \times n$, причем ее ранг r (обозначение $rk(A)$) удовлетворяет неравенству $r < \min\{m, n\}$.

Обратимся к задаче решения систем линейных уравнений

$$Ax \cong y. \tag{1.1}$$

Здесь символ $\cong$ означает, что система (1.1) может быть как совместной, так и несовместной. Известно, что вектор y представим в виде суммы:

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где $\bar{y} \in R(A)$, $\tilde{y} \in N(A^{\mathrm{T}})$, здесь $R(A)$, $N(A^{\mathrm{T}})$ – образ матрицы A и ядро матрицы A^{T} соответственно [1].

Пусть x – произвольный вектор из R^n такой, что

$$Ax = \bar{y}.$$

Учитывая, что

$$x = \bar{x} + \tilde{x},$$

где $\bar{x} \in R(A^{\mathrm{T}})$, $\tilde{x} \in N(A)$, при подстановке x в последнее уравнение мы можем записать цепочку равенств

$$\bar{y} = A(\bar{x} + \tilde{x}) = A\bar{x} + A\tilde{x} = A\bar{x}.$$

Таким образом,

$$A\bar{x} = \bar{y}.$$

Умножив последнее уравнение на A^+, получим

$$A^+A\bar{x} = A^+\bar{y}.$$

Согласно определению (см. [1]) вектор $\bar{x} \in R(A^{\mathrm{T}})$, поэтому $A^+A\bar{x} = \bar{x}$ и, следовательно,

$$\bar{x} = A^+\bar{y}.$$

Итак, мы видим, на множествах $R(A)$ и $R(A^{\mathrm{T}})$ существует взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, справедлива цепочка равенств

$$A^+\bar{y} = A^+\bar{y} + A^+\tilde{y} = A^+(\bar{y} + \tilde{y}) = A^+y.$$

Таким образом, мы обнаружили, что в качестве приближенного решения системы (1.1) можно взять вектор $\bar{x}$, определяемый по формуле

$$\bar{x} = A^+y. \tag{1.2}$$

Отметим, что среди всех векторов $x : Ax = \bar{y}$, согласно разложению $x = \bar{x} + \tilde{x}$, где $\bar{x} \in R(A^{\mathrm{T}})$, $\tilde{x} \in N(A)$, $N(A) \perp R(A^{\mathrm{T}})$, вектор $x = \bar{x}$ имеет минимальную норму. Другими словами, из теоремы Пифагора $\|x\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2$ следует, что $\|x\| = \|\bar{x}\|$, когда $\tilde{x} = 0$.

При осуществлении вычислений на ЭВМ в результаты выполнения арифметических операций неизбежно вносятся погрешности округления. Вследствие этого вместо псевдорешения $\bar{x}$ (1.2) системы (1.1) мы получим псевдорешение $\bar{u}$.

С помощью обратного анализа погрешностей, вносимых в результаты выполнения арифметических операций, их накопления сводятся к эквивалентным возмущениям матрицы A и вектора y. Пусть матрица B есть возмущение матрицы A, соответственно v — возмущение вектора y. Согласно сказанному можно считать, что вместо системы (1.1) мы решили другую систему

$$(A + B)u \cong y + v, \tag{1.3}$$

псевдорешение которой определяется формулой

$$\bar{u} = (A + B)^+(y + v). \tag{1.4}$$

Отметим, что в системе (1.3) матрица B и вектор v неизвестны.

Рассмотрим пример.

Пусть $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 2 \times 10^{-5}$, $c = 10^{-5}$, $\psi = \dfrac{c}{\sigma_3}$, $\varphi = \dfrac{c}{\sigma_2}$, $y_5 = 10^{-5}$,

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ y_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi c & 0 & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & 0 & -\psi c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По формулам (1.2) и (1.4) мы вычислили $\bar{x}$, $\bar{u}$, а также $\varepsilon = \dfrac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$, при этом обнаружилось, что $\varepsilon = 0.456$.

Обращение к оценке точности, взятой из [6, с. 411], формулы (6.33), (6.31):

$$\frac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le M,$$

где

$$M = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} c_r(\alpha' + \beta)}{1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha'} \sqrt{1 + c_r^2\gamma^2},$$

$$\alpha' = \alpha \sqrt{\frac{2\left(1 + 4/c_r^2(1 - c_r\alpha)\right)}{1 + 2/c_r^2 + \sqrt{1 + 4/c_r^2}}},$$

$$\|B\| \le \alpha\|A\|,$$

$$\|v\| \le \beta\|y\|,$$

привело к следующим результатам:

$$c_4 = 5 \times 10^4 \quad (c_i = \sigma_1/\sigma_i), \quad \alpha = 10^{-5}, \quad \beta = 0,$$

$$1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha' = -0.30902 < 0.$$

Последнее соотношение говорит о том, что для используемых в представленном примере значений величин c_4 и α требование непрерывной зависимости псевдорешения от возмущения матрицы исходной системы уравнений

$$1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha' > 0,$$

не выполняется.

С другой стороны, обращаясь к матрицам A и B нашего примера, мы видим, что требование непрерывной зависимости псевдорешения определяется неравенством $\sigma_4 - c > 0$, которое легко преобразуется к виду $1 - c_4\alpha > 0$. Отметим, что в нашем примере пара (c_4, α) $(c_4 = 5 \times 10^4, \alpha = 10^{-5})$ принадлежит множеству непрерывной зависимости псевдорешения от возмущения матрицы системы уравнений $(1 - c_4\alpha = 0.5 > 0)$.

Предложенный пример позволяет высказать предположение, что требование непрерывной зависимости псевдорешения в представленной оценке является завышенным. Последнее побудило нас провести исследование влияния возмущений системы линейных алгебраических уравнений на оценку близости псевдорешений исходной и возмущенной систем.

В дальнейшем нам потребуется опираться на следующие свойства раствора подпространств.

Лемма 1.1. *Пусть P_{R_1}, P_{R_2} – ортопроекторы на подпространства R_1 и R_2. Справедливы соотношения* (см. [3])

$$\|P_{R_1} - P_{R_2}\| = \max_{x \in R_1, \|x\|=1} \|(I - P_{R_2})x\| = \max_{x \in R_2, \|x\|=1} \|(I - P_{R_1})x\|.$$

Представленная ниже лемма посвящена формированию структуры разности $\bar{u} - \bar{x}$ и оценке величины $\frac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$, выраженной через возмущения B и v.

Лемма 1.2. *Пусть дана исходная система уравнений* (1.1) *и пусть возмущенная система определена соотношением* (1.3).

1. *Если*

$$r < \min\{m, n\},$$

то

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\left\|A+B^+\right\|\left\|((A+B)(A+B)^+ - AA^+)\right\|\|\tilde{y}\| + \max_{w\in R(B),\|w\|=1}\left\|(A+B)^+w\right\| \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \max_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Bz\|\|\bar{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|\right)^2 + \left\|(A+B)^+(A+B)-A^+A\right\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

2. *Если*

$$rk(A+B) = r = m = n,$$

то

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left\|(A+B)^+\right\|(\|B\|\|\bar{x}\| + \|v\|). \tag{1.6}$$

3. *Если*

$$m > n = r = rk(A+B),$$

то

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left\|A+B^+\right\|\left\|((A+B)(A+B)^+ - AA^+)\right\|\|\tilde{y}\| + \max_{w\in R(B),\|w\|=1}\left\|(A+B)^+w\right\|\|B\|\|\bar{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|. \tag{1.7}$$

4. *Если*

$$rk(A+B) = r = m < n,$$

то

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\left\|(A+B)^+\right\|\max_{z\in R(A^T),\|z\|=1}\|Bz\|\|\bar{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|\right)^2 + \left\|(A+B)^+(A+B)-A^+A\right\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Доказательство. 1. Из (1.4) и (1.2) следует очевидная цепочка равенств

$$\begin{aligned}\bar{u}-\bar{x} &= (A+B)^+(y+v) - A^+y = (A+B)^+y + (A+B)^+v - A^+y = (A+B)^+((I-AA^+)+AA^+)y + \\ &+ (A+B)^+v - \bar{x} = (A+B)^+(I-AA^+)y + (A+B)^+AA^+y + (A+B)^+v - \bar{x} = \\ &= (A+B)^+\tilde{y} + (A+B)^+(A+B-B)\bar{x} + (A+B)^+v - \bar{x} = \\ &= (A+B)^+\tilde{y} + (A+B)^+(A+B)\bar{x} - (A+B)^+B\bar{x} + (A+B)^+v - A^+A\bar{x}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Выполним преобразование выражения $(A+B)^+\tilde{y}$, взятого из цепочки равенств (1.9):

$$(A+B)^+\tilde{y} = (A+B)^+(I-AA^+)\tilde{y} = (A+B)^+(A+B)(A+B)^+(I-AA^+)\tilde{y} =$$
$$= (A+B)^+((A+B)(A+B)^+ - (A+B)(A+B)^+AA^+)\tilde{y} = (A+B)^+(((A+B)(A+B)^+)^2 -$$
$$-(A+B)(A+B)^+AA^+)\tilde{y} = (A+B)^+(A+B)(A+B)^+((A+B)(A+B)^+ - AA^+)\tilde{y} =$$
$$= (A+B)^+((A+B)(A+B)^+ - AA^+)\tilde{y} = (A+B)^+((I-AA^+) - (I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}.$$

После подстановки результата преобразований в (1.9) получим

$$\bar{u}-\bar{x} = (A+B)^+((I-AA^+) - (I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y} + (A+B)^+(A+B)\bar{x} - (A+B)^+B\bar{x} +$$
$$+ (A+B)^+v - A^+A\bar{x} = (A+B)^+(((I-AA^+) - (I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y} - B\bar{x} + v) +$$
$$+ ((A+B)^+(A+B) - A^+A)\bar{x}.$$

Таким образом, мы установили равенство

$$\begin{aligned}\bar{u}-\bar{x} &= (A+B)^+(((I-AA^+) - (I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y} - B\bar{x} + v) + \\ &+ ((A+B)^+(A+B) - A^+A)\bar{x}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Учитывая соотношения

$$(A+B)^+(((I-AA^+) - (I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y} - B\bar{x} + v) \in R((A+B)^{\mathrm{T}}),$$

$((A+B)^+(A+B)-A^+A)\overline{x} \in N(A+B)$, $R((A+B)^{\mathrm{T}}) \perp N(A+B)$ в (1.10), мы, согласно теореме Пифагора, можем записать

$$\|\overline{u}-\overline{x}\| = \left(\left\|(A+B)^+(((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}-B\overline{x}+v)\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \left\|((A+B)^+(A+B)-A^+A)\overline{x}\right\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Раскрывая скобки в первой норме, будем иметь

$$\left\|(A+B)^+(((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}-B\overline{x}+v)\right\| =$$
$$= \left\|(A+B)^+((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}-(A+B)^+B\overline{x}+(A+B)^+v\right\|.$$

Отсюда благодаря неравенству треугольника следует

$$\left\|(A+B)^+(((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}-B\overline{x}+v)\right\| \le$$
$$\le \left\|(A+B)^+((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}\right\| +$$
$$+ \left\|(A+B)^+B\overline{x}\right\| + \left\|(A+B)^+v\right\| \le \left\|A+B^+\right\| \max_{z\in N(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\left\|((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))z\right\|\|\tilde{y}\| +$$
$$+ \max_{w\in R(B),\|w\|=1}\left\|(A+B)^+w\right\| \max_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Bz\|\|\overline{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|.$$

Следуя соотношению леммы 1.1, получаем

$$\max_{z\in N(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\left\|((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))z\right\| = \left\|((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\right\| =$$
$$= \left\|(A+B)(A+B)^+-AA^+\right\|.$$

Таким образом,

$$\left\|(A+B)^+(((I-AA^+)-(I-(A+B)(A+B)^+))\tilde{y}-B\overline{x}+v)\right\| \le$$
$$\le \left\|A+B^+\right\|\left\|(A+B)(A+B)^+-AA^+\right\|\|\tilde{y}\| + \max_{w\in R(B),\|w\|=1}\left\|(A+B)^+w\right\| \max_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Bz\|\|\overline{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|.$$

С другой стороны, обращение ко второй норме даст нам неравенство

$$\left\|((A+B)^+(A+B)-A^+A)\overline{x}\right\| \le \left\|(A+B)^+(A+B)-A^+A\right\|\|\overline{x}\|.$$

Применив полученные результаты в (1.11), получим (1.5).

2. В рассматриваемом случае выполняются равенства $\dim(R(A)) = \dim(R(A^{\mathrm{T}})) = m$, поэтому $A^+ = A^{-1}$, а соотношение (1.1) превращается в точное равенство ($\tilde{y}$ обращается в ноль). Кроме этого, дополнительно из условия леммы следует, что $(A+B)^+ = (A+B)^{-1}$, а соотношение (1.3) превращается в точное равенство.

Благодаря последним соотношениям последуют цепочки равенств:

$$(A+B)^+(A+B)-A^+A = (A+B)^{-1}(A+B)-A^{-1}A = I-I = O,$$
$$(A+B)(A+B)^+-AA^+ = (A+B)(A+B)^{-1}-AA^{-1} = I-I = O.$$

Здесь O – нулевая матрица. Согласно этим соотношениям, выражения $\left\|(A+B)(A+B)^+-AA^+\right\|$ и $\left\|(A+B)^+(A+B)-A^+A\right\|$ обратятся в ноль и (1.5) примет вид

$$\|\overline{u}-\overline{x}\| \le \left\|(A+B)^+B\right\|\|\overline{x}\| + \left\|(A+B)^+\right\|\|v\|.$$

Отсюда следует (1.6).

3. В этом случае $\dim(R(A^{\mathrm{T}})) = n$, поэтому матрица A^+ является обратной слева для матрицы A, другими словами, $A^+A = I$. Дополнительно из условия леммы следует, что $(A+B)^+(A+B) = I$. Благодаря последним двум равенствам получаем $(A+B)^+(A+B) - A^+A = O$ (O — нулевая матрица).

Вследствие этого выражение $\|(A+B)^+(A+B) - A^+A\|$ в (1.5) обратится в ноль.

Опять же благодаря тому, что $\dim(R(A^{\mathrm{T}})) = n$, следует равенство $\max\limits_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1} \|Bz\| = \|B\|$.

Согласно сказанному (1.5) примет вид (1.7).

4. В рассматриваемом случае выполняется равенство $\dim(R(A)) = m$, поэтому матрица A^+ является обратной справа для матрицы A, другими словами, $AA^+ = I$, а соотношение (1.1) превращается в точное равенство ($\tilde{y}$ обращается в ноль). Дополнительно из условия теоремы ($rk(A+B) = r = m < n$) следует, что $(A+B)(A+B)^+ = I$. Благодаря последним двум равенствам получаем $(A+B)(A+B)^+ - AA^+ = O$. Вследствие этого в (1.5) выражение $\|(A+B)(A+B)^+ - AA^+\|$ обратится в ноль. Отметим также, что соотношение (1.3) превращается в точное равенство благодаря условию леммы ($rk(A+B) = r = m < n$).

Опять же благодаря тому, что $\dim(R(A)) = m$, следует равенство $\max\limits_{w\in R(B),\|w\|=1} \|(A+B)^+w\| = \|(A+B)^+\|$.

Согласно сказанному (1.5) примет вид (1.8). Лемма доказана.

В заключение сделаем несколько иллюстрирующих результат замечаний. В выражениях, определяющих оценки, (1.5)–(1.8) наряду с величинами $\|A+B^+\|$, $\max\limits_{w\in R(B),\|w\|=1} \|(A+B)^+w\|$, $\max\limits_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1} \|Bz\|$, $\|B\|$, присутствуют растворы подпространств $\rho(R((A+B),R(A)) = \|((A+B)(A+B)^+ - AA^+)\|$, и $\rho(R((A+B)^{\mathrm{T}},R(A)^{\mathrm{T}}) = \|(A+B)^+(A+B) - A^+A)\|$, обусловленные отклонением подпространств: $R(A+B)$ от $R(A)$ и $R((A+B)^{\mathrm{T}})$ от $R(A)^{\mathrm{T}}$ соответственно. Значения перечисленных величин, как это будет показано ниже, тесно связаны между собой.

2. МАТРИЦЫ ПРОСТЕЙШИХ СТРУКТУР И МОДЕЛИ ИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Нашей целью в этом разделе является изучение свойств перечисленных выше величин. Обратимся к более коротким и удобным обозначениям:

$$I_1(A,B) = \|(A+B)^+\|, \quad I_2(A,B) = \max_{w\in R(B),\|w\|=1} \|(A+B)^+w\|,$$

$$J_1(A,B) = \max_{z\in N(A),\|z\|=1} \|((A+B)(A+B)^+ - AA^+)z\|, \quad J_2(A,B) = \|(A+B)^+(A+B) - A^+A\|$$

и матрицам простейшей структуры.

В качестве матриц простейшей структуры, не нарушая при этом требования общности результатов, мы будем рассматривать блочно-диагональные матрицы Σ_3, взятые из сингулярного разложения матрицы $A = P\Sigma Q^{\mathrm{T}}$, на главной диагонали которой располагаются сингулярные числа $\sigma_{r-2}, \sigma_{r-1}, \sigma_r$. Будем предполагать, что $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Матрицы возмущений мы будем обозначать через C_3.

Здесь же мы должны сказать, что обращение к различным моделям матрицы возмущений обусловлено свойствами части сингулярного спектра $\{\sigma_{r-2}, \sigma_{r-1}, \sigma_r\}$ матрицы $A(\Sigma)$.

Более точно структуры указанных матриц мы будем определять непосредственно перед изучением их свойств.

Ниже будет установлено, что рассмотренные ниже матрицы простейшей структуры и модели их возмущений вполне исчерпывают вопрос об оценке точности псевдорешения $\bar{u}$.

Поскольку на протяжении всего этого раздела мы будем рассматривать указанные величины только для матриц Σ_3 и C_3, постольку вместо обозначений $I_1(\Sigma_3,C_3)$, $J_2(\Sigma_3,C_3)$, $J_1(\Sigma_3,C_3)$, $J_2(\Sigma_3,C_3)$ мы будем применять совсем короткие I_1, I_2, J_1, J_2.

Вариант 1 структуры матрицы Σ_3.

Пусть

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\varphi & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & 0 & -c\psi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2} & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} -c\varphi & 0 & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & -c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель2. 1.2.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Отметим, что

$$\Sigma_3 + C_3 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} - c\varphi & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & 0 & \sigma_r - c\psi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} - c\varphi & 0 & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & \sigma_{r-1} - c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - c & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1. 2} \end{cases}$$

Обратимся к сингулярному разложению матрицы $\Sigma_3 + C_3$. Нетрудно показать, что

$$\Sigma_3 + C_3 = \begin{cases} S\begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}T^{\text{т}}, & \text{модель 2.1.1,} \\ S\begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r-1} - c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}T^{\text{т}}, & \text{модель 2.1. 2,} \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$S = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} & -\tilde{s} \\ 0 & 0 & \tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1. 1,} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 & -\tilde{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{s} & 0 & \tilde{c} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1. 2,} \end{cases} \qquad \tilde{c} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_r - \psi c}{\eta}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{\sigma_{r-1} - \psi c}{\eta}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\tilde{s} = \frac{\sqrt{1-\psi^2}c}{\eta}, \quad \eta = \begin{cases} \sqrt{(\sigma_r - \psi c)^2 + (1-\psi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \sqrt{(\sigma_{r-1} - \psi c)^2 + (1-\psi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 & -\bar{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{s} & 0 & \bar{c} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1}, \\ \begin{bmatrix} \bar{c} & 0 & 0 & -\bar{s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{s} & 0 & 0 & \bar{c} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2}, \end{cases} \qquad \bar{c} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{r-1} - \varphi c}{\nu}, & \text{модель 2.1.1}, \\ \dfrac{\sigma_{r-2} - \varphi c}{\nu}, & \text{модель 2.1.2}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\bar{s} = \frac{\sqrt{1-\varphi^2}c}{\nu}, \quad \nu = \begin{cases} \sqrt{(\sigma_{r-1} - \varphi c)^2 + (1-\varphi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.1}, \\ \sqrt{(\sigma_{r-2} - \varphi c)^2 + (1-\varphi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.2}. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Пусть матрицы* Σ_3 *и* C_3 *определены соотношениями* (2.1). *Если величины* c, φ, ψ *удовлетворяют неравенствам*: $c > 0$, $0 \le \varphi$, $\psi \le 1$, $\sigma_r - c > 0$, *то*

а) $$(\Sigma_3 + C_3)^+ = \begin{cases} \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\bar{c}}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tilde{c}}{\eta} & \dfrac{\tilde{s}}{\eta} \\ 0 & \dfrac{\bar{s}}{\nu} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \textit{модель } 2.1.1, \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{c}}{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\tilde{c}}{\eta} & 0 & \dfrac{\tilde{s}}{\eta} \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} & 0 \\ \dfrac{\bar{s}}{\nu} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \textit{модель } 2.1.2, \end{cases} \qquad I_1 = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{1}{\eta}, \dfrac{1}{\nu}\right\}, & \textit{модель } 2.1.1, \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \textit{модель } 2.1.2, \end{cases} \tag{2.5}$$

б) $$J_1 = \tilde{s}\,, \tag{2.6}$$

в) $$I_2 = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{1}{\eta}, \dfrac{1}{\nu}\right\}, & \textit{модель } 2.1.1, \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \textit{модель } 2.1.2, \end{cases} \qquad \max_{z \in R\left(\Sigma_3^{\mathrm{T}}\right), \|z\|=1} \|C_3 z\| = c, \tag{2.7}$$

г) $$J_2 = \bar{s}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Установим истинность утверждений пп. а)–г). Начнем с доказательства утверждения п. а).

Учитывая, что матрицы S и T ортогональны, мы можем записать

$$\Sigma_3 + C_3 = SS^{\mathrm{T}}(\Sigma_3 + C_3)TT^{\mathrm{T}}. \tag{2.9}$$

Осуществляя перемножение матриц в выражении $S^{\mathrm{T}}(\Sigma_3 + C_3)T$ с учетом (2.3) и (2.4), получаем равенство

$$S^{\mathrm{T}}(\Sigma_3 + C_3)T = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

Подставляя последнее соотношение в (2.9), приходим к (2.2).

Вводя упрощающее обозначение $S^{\mathrm{T}}(\Sigma_3 + C_3)T = \bar{\Sigma}$ и действуя далее, получаем

$$(\Sigma_3 + C_3)^{+} = (S\bar{\Sigma}T^{\mathrm{T}})^{+} = T\bar{\Sigma}^{+}S^{\mathrm{T}},$$

где

$$\bar{\Sigma}^{+} = \begin{cases} \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} \nu^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

Осуществляя перемножение матриц $T\bar{\Sigma}^{+}S^{\mathrm{T}}$, получаем первое соотношение в (2.5).

Истинность второго соотношения очевидна

$$I_1 = \left\|(\Sigma_3 + C_3)^{+}\right\| = \|T\|\left\|\bar{\Sigma}^{+}\right\|\left\|S^{\mathrm{T}}\right\| = \left\|\bar{\Sigma}^{+}\right\|.$$

Доказательство п. б). Пусть здесь $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_i$, тогда согласно определению величины J_1 мы можем записать

$$J_1 = \max_{z \in N(\Sigma_3), \|z\|=1} \left\|\left((\Sigma_3 + C_3)(\Sigma_3 + C_3)^{+} - \Sigma_3\Sigma_3^{+}\right)z\right\| = \left\|\left((\Sigma_3 + C_3)(\Sigma_3 + C_3)^{+} - \Sigma_3\Sigma_3^{+}\right)e_4\right\| =$$

$$= \left\|(\Sigma_3 + C_3)(\Sigma_3 + C_3)^{+}e_4\right\| = \left\|(S\bar{\Sigma}T^{\mathrm{T}})(S\bar{\Sigma}T^{\mathrm{T}})^{+}e_4\right\| = \left\|S\bar{\Sigma}T^{\mathrm{T}}T\bar{\Sigma}^{+}S^{\mathrm{T}}e_4\right\| = \left\|S\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}S^{\mathrm{T}}e_4\right\| = \tilde{s}.$$

Доказательство п. в). Обращаясь к определению величины I_2, запишем

$$I_2 = \max_{w \in R(C_3), \|w\|=1} \left\|(\Sigma_3 + C_3)^{+}w\right\|.$$

Согласно (2.1) имеем

$$R(C_3) \subseteq \begin{cases} R(e_2, e_3, e_4), & \text{модель 2.1.1,} \\ R(e_1, e_2, e_3, e_4), & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

следовательно, $R(C_3) \subseteq R(e_1, e_2, e_3, e_4)$, поэтому из соотношения $R(\Sigma_3) \subseteq R(e_1, e_2, e_3, e_4)$ заключаем, что

$$I_2 = \left\|(\Sigma_3 + C_3)^+\right\| = I_1.$$

Выше мы установили, что

$$I_1 = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{1}{\eta}, \dfrac{1}{\nu}\right\}, & \text{модель 2.1.1,} \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

Очевидно (см. (2.1)),

$$\max_{z \in R\left(\Sigma_3^{\mathrm{T}}\right), \|z\|=1} \|C_3 z\| = \|C_3 e_3\| = c.$$

Справедливость утверждения п. в) доказана.

Приступим к доказательству п. г). Удалим у матриц Σ_3, C_3 четвертую строку. Получившиеся матрицы обозначим через Σ_{33} и C_{33} соответственно.

В матрице $\Sigma_3 + C_3$ четвертая строка пропорциональна третьей (модель 2.1.1) и второй (модель 2.1.2), вследствие этого имеем

$$R(\Sigma_3^{\mathrm{T}}) = R(\Sigma_{33}^{\mathrm{T}}), \quad R((\Sigma_3 + C_3)^{\mathrm{T}}) = R((\Sigma_{33} + C_{33})^{\mathrm{T}}).$$

Поэтому верно

$$\Sigma_3^+\Sigma_3 = \Sigma_{33}^+\Sigma_{33}, \quad (\Sigma_3 + C_3)^+(\Sigma_3 + C_3) = (\Sigma_{33} + C_{33})^+(\Sigma_{33} + C_{33}),$$

$$(\Sigma_3 + C_3)^+(\Sigma_3 + C_3) - \Sigma_3^+\Sigma_3 = (\Sigma_{33} + C_{33})^+(\Sigma_{33} + C_{33}) - \Sigma_{33}^+\Sigma_{33},$$

соответственно,

$$\left\|(\Sigma_3 + C_3)^+(\Sigma_3 + C_3) - \Sigma_3^+\Sigma_3\right\| = \left\|(\Sigma_{33} + C_{33})^+(\Sigma_{33} + C_{33}) - \Sigma_{33}^+\Sigma_{33}\right\|. \tag{2.10}$$

Отметим, что выражения в левой и правой частях последнего равенства представляют собой растворы $\rho(R(\Sigma_3^{\mathrm{T}}), R(\Sigma_3 + C_3)^{\mathrm{T}})$ и $\rho(R(\Sigma_{33}^{\mathrm{T}}), R(\Sigma_{33} + C_{33})^{\mathrm{T}})$.

Опираясь на лемму 1.1, мы можем записать

$$J_2 = \left\|(\Sigma_{33} + C_{33})^+(\Sigma_{33} + C_{33}) - \Sigma_{33}^+\Sigma_{33}\right\| = \max_{x \in R((\Sigma_{33}+C_{33})^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_{33}^+\Sigma_{33})x\right\| . \tag{2.11}$$

Следуя введенному выше определению, выпишем матрицы $\Sigma_{33} + C_{33}$ и $(\Sigma_{33} + C_{33})^+$ в явном виде

$$\Sigma_{33} + C_{33} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} - c\varphi & 0 & \sqrt{1-\varphi^2} \\ 0 & 0 & \sigma_r - c\psi & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} - c\varphi & 0 & 0 & \sqrt{1-\varphi^2} \\ 0 & \sigma_{r-1} - c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - c & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

$$(\Sigma_{33} + C_{33})^{+} = \begin{cases} \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_{r-1} - \varphi c}{\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_r - \psi c)^{-1} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{1-\varphi^2} c}{\nu^2} & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{r-2} - \varphi c}{\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{r-1} - \psi c)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} \\ \dfrac{\sqrt{1-\varphi^2} c}{\nu^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

где ν определена в (2.4).

Анализируя структуру матриц $\Sigma_{33} + C_{33}$ и $(\Sigma_{33} + C_{33})^{+}$, мы видим, что

$$\max_{x \in R((\Sigma_{33}+C_{33})^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_{33}^{+}\Sigma_{33})x\right\| = \begin{cases} (I - \Sigma_{33}^{+}\Sigma_{33}) \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{c} \\ 0 \\ \bar{s} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.1,} \\ (I - \Sigma_{33}^{+}\Sigma_{33}) \begin{bmatrix} \bar{c} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{s} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

Проведя непосредственные вычисления в последнем выражении, получим

$$\max_{x \in R((\Sigma_{33}+C_{33})^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_{3333}^{+})x\right\| = \bar{s}.$$

Сопоставляя (2.10), (2.11) с последним равенством, мы приходим к соотношению в (2.8).

Лемма доказана.

Дополнительно введем в рассмотрение величины

$$I_{11} = \frac{1}{\eta}, \quad I_{12} = \frac{1}{\nu}. \tag{2.12}$$

Отметим, что величины ν, η, $\bar{s}$, $\tilde{s}$, определенные соотношениями (2.3), (2.4), очевидно, являются функциями переменных φ, ψ и параметра c. Поэтому мы можем записать

$$I_{11} = I_{11}(\psi, c), \quad I_{12} = I_{12}(\varphi, c), \quad J_1 = J_1(\psi, c), \quad J_2 = J_2(\varphi, c).$$

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда верно следующее:

$$1) \quad I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta}, & \text{модель 2.1.1,} \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \tag{2.13}$$

причем функции $\dfrac{1}{\eta}$ и $\dfrac{1}{\nu}$, монотонно возрастая, на концах отрезка принимают следующие значения:

$$I_{11}(0, c) = \begin{cases} 1/\sqrt{\sigma_r^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/\sqrt{\sigma_{r-1}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \quad I_{11}(1, c) = \begin{cases} 1/(\sigma_r - c), & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/(\sigma_{r-1} - c), & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

$$I_{12}(0,c) = \begin{cases} 1/\sqrt{\sigma_{r-1}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/\sqrt{\sigma_{r-2}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \quad I_{12}(1,c) = \begin{cases} 1/(\sigma_{r-1} - c), & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/(\sigma_{r-2} - c), & \text{модель 2.1.2;} \end{cases}$$

2) функции $J_1(\varphi,c)$, $J_2(\psi,c)$ положительны и имеют единственный экстремум на отрезке $[0,1]$, причем

$$\max_{0\le\psi\le1} J_1(\psi,c) = J_1(\overline{\psi},c) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_r}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{c}{\sigma_{r-1}}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \quad J_1(0,c) = \begin{cases} c/\sqrt{\sigma_r{}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ c/\sqrt{\sigma_{r-1}{}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

$$J_1(1,c) = 0, \quad \max_{0\le\varphi\le1} J_2(\varphi,c) = J_2(\overline{\varphi},c) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_{r-1}}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{c}{\sigma_{r-2}}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$J_2(0,c) = \begin{cases} c/\sqrt{\sigma_{r-1}{}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ c/\sqrt{\sigma_{r-2}{}^2 + c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \quad J_2(1,c) = 0, \quad J_1(\overline{\varphi},c) \le J_2(\overline{\psi},c),$$

$$\max_{0\le\psi\le1} J_1(\psi,c) = \max_{\overline{\varphi}\le\psi\le1} J_1(\psi,c), \tag{2.15}$$

где

$$\overline{\psi} = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_r}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{c}{\sigma_{r-1}}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases} \quad \overline{\varphi} = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_{r-1}}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{c}{\sigma_{r-2}}, & \text{модель 2.1.2;} \end{cases} \tag{2.16}$$

3) для $\forall c_1, c_2 > 0 : c_1 \le c_2$ выполняется неравенство

$$I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1) \le I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2).$$

Доказательство. Начнем с доказательства п. 1). Обращаясь к определению функций $I_{11}(\psi)$, $I_{12}(\varphi)$, мы можем записать

$$I_{11}(\psi) = \begin{cases} 1/\sqrt{(\sigma_r - \psi c)^2 + (1-\psi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/\sqrt{(\sigma_{r-1} - \psi c)^2 + (1-\psi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.2,} \end{cases}$$

$$I_{12} = \begin{cases} 1/\sqrt{(\sigma_{r-1} - \varphi c)^2 + (1-\varphi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.1,} \\ 1/\sqrt{(\sigma_{r-2} - \varphi c)^2 + (1-\varphi^2)c^2}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

Продифференцировав $I_{11}(\psi,c)(I_{12}(\varphi,c))$, мы обнаружим, что $(I_{11}(\psi,c))' > 0$ $((I_{12}(\varphi),c)' > 0)$ для $\forall\varphi \in [0,1]$ $(\forall\psi \in [0,1])$. Этот факт указывает на то, что функции $I_{11}(\psi)$ и $I_{12}(\varphi)$ монотонно возрастают на отрезке $[0,1]$. Из неравенств $\sigma_r \le \sigma_{r-1} \le \sigma_{r-2}$, следует, что $\forall\varphi = \psi$ выполняется неравенство $I_{12}(\varphi) \le I_{11}(\psi)$. Значения функций $I_{11}(\psi,c)$, $I_{12}(\varphi,c)$ в точках $\psi = 0$, $\psi = 1$ и $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ соответственно устанавливаются непосредственной подстановкой.

Перейдем к п. 2). Пусть $\overline{\varphi}$ такой, что

$$\max_{\varphi} J_2(\varphi,c) = J_2(\overline{\varphi},c). \tag{2.17}$$

Учитывая, что $\overline{\varphi}$ доставляет максимум функции

$$[J_2(\varphi,c)]^2 = \frac{(1-\varphi^2)c^2}{\nu^2},$$

мы можем найти $\overline{\varphi}$, используя ее. Дифференцируя $[J_2(\varphi,c)]^2$ по φ и приравнивая результат дифференцирования нулю, мы приходим к уравнению, упрощая которое получим

$$\varphi\sigma_{r-1} - c = 0 \quad (\varphi\sigma_{r-2} - c = 0).$$

Отсюда следует второе равенство в (2.16):

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma_{r-1}}, & \text{модель 2.1.1,} \\ \dfrac{c}{\sigma_{r-2}}, & \text{модель 2.1.2.} \end{cases}$$

После подстановки $\overline{\varphi}$ в (2.17) получим второе соотношение в (2.14).

Отметим, что из неравенства $\sigma_r - c > 0$ (см. условия леммы 2.1) благодаря неравенствам

$$\sigma_{r-2} \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r \tag{2.18}$$

следует $\overline{\varphi} \in [0,1]$.

Действуя аналогично, можно показать справедливость первых соотношений в (2.16) и (2.14).

Сопоставляя первое и второе соотношения в (2.16), благодаря (2.18) получаем неравенство

$$\overline{\varphi} \leq \overline{\psi}.$$

Из последнего неравенства и доказанного выше неравенства $I_{12}(\psi,c) \leq I_{11}(\psi,c)$ вытекает (2.13). Из него также вытекает (2.15).

Перейдем к доказательству п. 3). Обратимся сначала к модели 2.1.1. Покажем, что разность

$$I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2) - I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1) \geq 0.$$

Очевидно,

$$I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2) - I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1) = \sqrt{1-\psi^2}\left(\frac{c_2}{(\sigma_r^2 - 2\sigma_r\psi c_2 + c_2^2)} - \frac{c_1}{(\sigma_r^2 - 2\sigma_r\psi c_1 + c_1^2)}\right) =$$
$$= \sqrt{1-\psi^2}\left(\frac{(\sigma_r^2 - c_1c_2)(c_2 - c_1)}{(\sigma_r^2 - 2\sigma_r\psi c_2 + c_2^2)(\sigma_r^2 - 2\sigma_r\psi c_1 + c_1^2)}\right) \geq 0.$$

Докажем теперь, что неравенство справедливо и для модели 2.1.2.

Сначала докажем справедливость неравенства

$$\left(I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2)\right)^2 - \left(I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1)\right)^2 \geq 0.$$

Итак,

$$\left(I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2)\right)^2 - \left(I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1)\right)^2 = (1-\psi^2)\left(\frac{c_2^2}{(\sigma_{r-1} - c_2)^2(\sigma_{r-1}^2 - 2\sigma_{r-1}\psi c_2 + c_2^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{c_1^2}{(\sigma_{r-1} - c_1)^2(\sigma_{r-1}^2 - 2\sigma_{r-1}\psi c_1 + c_1^2)}\right).$$

Обращаясь к последнему выражению, рассмотрим разность $\dfrac{c_2}{(\sigma_{r-1} - c_2)^2} - \dfrac{c_1}{(\sigma_{r-1} - c_1)^2}$:

$$\frac{c_2}{(\sigma_{r-1} - c_2)^2} - \frac{c_1}{(\sigma_{r-1} - c_1)^2} = (\sigma_{r-1}^2 - c_1c_2)\frac{c_2 - c_1}{(\sigma_{r-1} - c_2)^2(\sigma_{r-1} - c_1)^2} \geq 0.$$

Итак, показано, что

$$\frac{c_2}{(\sigma_{r-1} - c_2)^2} - \frac{c_1}{(\sigma_{r-1} - c_1)^2} \geq 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{c_2}{(\sigma_{r-1}-c_2)^2} \ge \frac{c_1}{(\sigma_{r-1}-c_1)^2}.$$

Благодаря последнему неравенству мы можем записать

$$\left(I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2)\right)^2 - \left(I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1)\right)^2 \ge (1-\psi^2)\left(\frac{c_1c_2}{(\sigma_{r-1}-c_1)^2(\sigma_{r-1}^2-2\sigma_{r-1}\psi c_2+c_2^2)} -\right.$$

$$\left. - \frac{c_1^2}{(\sigma_{r-1}-c_1)^2(\sigma_{r-1}^2-2\sigma_{r-1}\psi c_1+c_1^2)}\right) = \frac{(1-\psi^2)c_1}{(\sigma_{r-1}-c_1)^2}\left(\frac{c_2}{\sigma_{r-1}^2-2\sigma_{r-1}\psi c_2+c_2^2} - \frac{c_1}{\sigma_{r-1}^2-2\sigma_{r-1}\psi c_1+c_1^2}\right).$$

Сопоставляя последнее выражение в скобах с доказанным выше неравенством

$$\frac{c_2}{(\sigma_r^2-2\sigma_r\psi c_2+c_2^2)} - \frac{c_1}{(\sigma_r^2-2\sigma_r\psi c_1+c_1^2)} \ge 0,$$

приходим к выводу: неравенство

$$\left(I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2)\right)^2 - \left(I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1)\right)^2 \ge 0$$

справедливо для модели 2.1.2.

Неравенство $\left(I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2)\right)^2 - \left(I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1)\right)^2 \ge 0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$I_1(\psi,c_2)J_2(\psi,c_2) - I_1(\psi,c_1)J_2(\psi,c_1) \ge 0.$$

Следствие доказано.

Дополнительно из леммы 2.1 вытекают два очевидных следствия.

Вариант 2. В качестве матриц простейшей структуры и их возмущений мы будем рассматривать матрицы вида

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Следствие 2.2. Пусть матрицы Σ_3 и C_3 определены соотношениями (2.19). Если $c > 0$, $\sigma_r - c > 0$, то

$$(\Sigma_3 + C_3)^+ = \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{r-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} \end{bmatrix}, \quad I_1 = (\sigma_r - c)^{-1}.$$

Вариант 3. В качестве матриц простейшей структуры и их возмущений мы примем матрицы вида

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi c \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2}c \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.1,} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.2.} \end{cases} \tag{2.20}$$

Обращаясь к сингулярному разложению матрицы

$$\Sigma_3 + C_3 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - \psi c \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2}c \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.1}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} - \psi c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - c \\ 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.2}, \end{cases}$$

нетрудно показать, что

$$\Sigma_3 + C_3 = \begin{cases} S\begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.1}, \\ S\begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.2}, \end{cases}$$

где матрица S определена соотношениями (2.3).

Следствие 2.3. Пусть матрицы Σ_3 и C_3, определены соотношениями (2.20). Если $c > 0$, $0 \le \psi \le 1$, $\sigma_r - c > 0$, то

а) $$(\Sigma_3 + C_3)^+ = \begin{cases} \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{r-1})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tilde{c}}{\eta} & \dfrac{\tilde{s}}{\eta} \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.1}, \\ \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\tilde{c}}{\eta} & 0 & \dfrac{\tilde{s}}{\eta} \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} & 0 \end{bmatrix}, & \text{модель 2.3.2}, \end{cases} \qquad I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta}, & \text{модель 2.3.1}, \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \text{модель 2.3.2}, \end{cases}$$

б) $$J_1 = \tilde{s},$$

в) $$I_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta}, & \text{модель 2.3.1}, \\ (\sigma_r - c)^{-1}, & \text{модель 2.3.2}. \end{cases}$$

Замечание 2.1. Доказательство следствия 2.2 мы не привели вследствие его очевидности. Доказательство следствия 2.3 с небольшими изменениями повторяет доказательство леммы 2.1.

Вариант 4. В качестве матриц простейшей структуры и их возмущений мы будем рассматривать матрицы вида

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi c & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Обратимся к сингулярному разложению матрицы $\Sigma_3 + C_3$. Нетрудно показать, что

$$\Sigma_3 + C_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{bmatrix} T^{\mathrm{T}},$$

где T определена соотношениями (2.4) (модель 2.1.1).

Следствие 2.4. Пусть матрицы Σ_3 и C_3 определены соотношениями (2.21). Если величины c, φ удовлетворяют неравенствам: $c > 0$, $0 \le \varphi \le 1$, $\sigma_r - c > 0$, то

$$\text{а)}\quad (\Sigma_3 + C_3)^+ = \begin{bmatrix} (\sigma_{r-2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\overline{c}}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_r - c)^{-1} \\ 0 & \dfrac{\overline{s}}{\nu} & 0 \end{bmatrix}, \quad I_1 = (\sigma_r - c)^{-1}, \tag{2.22}$$

$$\text{б)}\quad I_2 = (\sigma_r - c)^{-1}, \qquad \max_{z \in R(\Sigma_3^{\mathrm{T}}), \|z\|=1} \|C_3 z\| = c, \tag{2.23}$$

$$\text{в)}\quad J_2 = \overline{s}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Следуя доказательству соотношения (2.5) леммы 2.1, легко проверить справедливость первого и второго равенств в (2.22).

Перейдем к доказательству п. б). Обращаясь к виду матрицы C_3 (см. (2.21)), получаем, что

$$R(C_3) = R(e_3, e_4),$$

поэтому из соотношения $R((\Sigma_3 + C_3)^{\mathrm{T}}) \subseteq R(C_3)$ заключаем

$$I_2 = \max_{w \in R(C_3), \|w\|=1} \left\|(\Sigma_3 + C_3)^+ w\right\| = \left\|(\Sigma_3 + C_3)^+\right\| = I_1.$$

Обращаясь к определению матрицы C_3, мы видим, что

$$\max_{z \in R(\Sigma_3^{\mathrm{T}}), \|z\|=1} \|C_3 z\| = \|C_3 e_3\|.$$

Отсюда следует (2.23).

Приступим к доказательству п. в). Следуя лемме 1.1, мы можем записать

$$J_2 = \left\|(\Sigma_3 + C_3)^+(\Sigma_3 + C_3) - \Sigma_3^+\Sigma_3\right\| = \max_{x \in R((\Sigma_3 + C_3)^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_3^+\Sigma_3)x\right\|.$$

Анализируя структуру матриц $\Sigma_3 + C_3$ и $(\Sigma_3 + C_3)^+$, мы видим, что

$$\max_{x \in R((\Sigma_3 + C_3)^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_{22}^+\Sigma_{22})x\right\| = \left\|(I - \Sigma_3^+\Sigma_3)\begin{bmatrix} 0 \\ \overline{c} \\ 0 \\ \overline{s} \end{bmatrix}\right\|.$$

Проведя непосредственные вычисления в последнем выражении, получим

$$\max_{x \in R((\Sigma_{22} + C_{22})^{\mathrm{T}}), \|x\|=1} \left\|(I - \Sigma_3^+\Sigma_3)x\right\| = \overline{s}.$$

Сопоставляя (2.10), (2.11) с последним равенством, мы приходим к соотношению в (2.24).

Следствие доказано.

Замечание 2.2. Очевидно, для рассматриваемого варианта матрицы Σ_3 и ее возмущения C_3 функции $I_1 = \dfrac{1}{\nu}$, $J_2 = \overline{s}$ обладают свойствами, установленными в следствии 2.1, причем

$$\max_{0\le\varphi\le1} J_2(\varphi, c) = J_2(\overline{\varphi}, c) = \frac{c}{\sigma_{r-1}}, \tag{2.25}$$

где

$$\overline{\varphi} = \frac{c}{\sigma_{r-1}}. \tag{2.26}$$

Замечание 2.3. Очевидно, модели матриц C_3 выбраны так, чтобы обеспечить наибольшую чувствительность величин I_1, I_2, J_1, J_2 к возмущениям матриц Σ_3.

В заключение раздела мы должны сказать следующее. Определение значений элементов матрицы B и компонент вектора v является практически неразрешимой задачей. Но с помощью обратного метода анализа накопления погрешностей возможно установить оценку $\|B\| \le \alpha\|A\|$. Поэтому вместо параметра $c = \|B\|$ в дальнейшем мы будем вынуждены пользоваться его оценкой: $c \le \alpha\|A\|$, где α – некоторое положительное число.

3. ПСЕВДОРЕШЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

В разд. 1 мы коснулись вопроса о влиянии возмущений, вносимых в матрицу и правую часть исходной системы уравнений, на точность вычисленного псевдорешения (см. лемму 1.2). Представленные в лемме 1.2 оценки справедливы для любых возмущений B и v. Однако практическую значимость имеют псевдорешения, непрерывно зависящие от возмущений матрицы исходной системы и ее правой части.

Займемся детальным исследованием обозначенной проблемы. Итак, пусть задана система уравнений

$$Ax \cong y, \tag{3.1}$$

псевдорешение $\overline{x}$ которой определяется формулой

$$\overline{x} = A^+ y. \tag{3.2}$$

Пусть в матрицу A и в правую часть y внесены возмущения B и v соответственно. В результате мы получим новую систему уравнений

$$(A + B)u \cong y + v, \tag{3.3}$$

псевдорешение $\overline{u}$ которой определяется формулой

$$\overline{u} = (A + B)^+ (y + v). \tag{3.4}$$

Близость псевдорешений $\overline{u}$ и $\overline{x}$ устанавливает

Теорема 3.1. *Пусть для систем уравнений* (3.1) *и* (3.3) *выполнены соотношения*

$$\|B\| = c \le \alpha\|A\|, \tag{3.5}$$

$$\|v\| \le \beta\|y\|, \tag{3.6}$$

$$1 - c_r\alpha > 0. \tag{3.7}$$

1. *Если*

$$r < \min\{m, n\}, \quad rk(A + B) = r, \quad \|\tilde{y}\| \le \gamma\|\overline{y}\|, \tag{3.8}$$

то справедлива оценка

$$\frac{\|\overline{u} - \overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} \le \max\{M_1, M_2\}, \tag{3.9}$$

где

$$M_1 = \left(\left(\max_{0\le\xi\le 1-c_r\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-c_r^2\alpha^2-2c_r\alpha\xi}}\left(\frac{c_r^2\alpha\gamma\sqrt{1-(c_r\alpha+\xi)^2}}{\sqrt{1-c_r^2\alpha^2-2c_r\alpha\xi}} + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})\right)\right)^2 + (c_{r-1}\alpha)^2\right)^{1/2},$$
(*модель* 2.1.1),

$$M_2 = \left(\left(\frac{c_r c_{r-1}\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{1-c_r\alpha}\right)^2 + (c_{r-2}\alpha)^2\right)^{1/2} \quad (\textit{модель } 2.1.2).$$

2. *Если* $r = m = n$, *то*

$$\frac{\|\bar{u}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le \frac{c_r(\alpha+\beta)}{1-c_r\alpha}.$$

3. *Если выполнены неравенства* (3.8) *и* $m > n = r$, *то*

$$\frac{\|\bar{u}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le \max\{M_1, M_2\},$$

где

$$M_1 = \frac{c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{\sqrt{1-(c_r\alpha)^2}} \quad (\textit{модель } 2.3.1),$$

$$M_2 = \frac{c_r c_{r-1}\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{1-c_r\alpha} \quad (\textit{модель } 2.3.2).$$

4. *Если* $rk(A+B) = r = m < n$, *то*

$$\frac{\|\bar{u}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le \left(\left(\frac{c_r(\alpha+\beta)}{1-c_r\alpha}\right)^2 + (c_{r-1}\alpha)^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Обращаясь к п. 1 леммы 1.2 (см. (1.5)), мы можем записать

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\|(A+B)^+\|\|(A+B)(A+B)^+ - AA^+\|\|\tilde{y}\| + \max_{w\in R(B),\|w\|=1}\|(A+B)^+w\|\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \max_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Bz\|\|\bar{x}\| + \|(A+B)^+\|\|v\|\right)^2 + \|(A+B)^+(A+B) - A^+A\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

Используя сингулярное разложение матрицы A, последнее неравенство перепишем в виде

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\|(\Sigma+C)^+\|\|((\Sigma+C)(\Sigma+C)^+ - \Sigma\Sigma^+\|\|\tilde{y}\| + \max_{w\in R(C),\|w\|=1}\|(\Sigma+C)^+w\|^2\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \max_{z\in R(\Sigma^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Cz\|\|\bar{x}\| + \|(\Sigma+C)^+\|\|v\|\right)^2 + \|(\Sigma+C)^+(\Sigma+C) - \Sigma^+\Sigma)\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2},$$

где $C = P^{\mathrm{T}}BQ$.

С учетом сделанных ранее обозначений, последнее неравенство перепишем в виде

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(I_1(\Sigma,C)J_1(\Sigma,C)\|\tilde{y}\| + I_2(\Sigma,C)\max_{z\in R(\Sigma^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Cz\|\|\bar{x}\| + I_1(\Sigma,C)\|v\|\right)^2 + J_2(\Sigma,C)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда согласно замечанию 2.3, равенству (3.5) и второму соотношению в (2.7) следует

$$
\begin{gathered}
\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \max_{0\le\varphi,\psi\le 1}\left(\left(I_1(\Sigma_3,C_3)J_1(\Sigma_3,C_3)\|\tilde{y}\| + I_2(\Sigma_3,C_3)\max_{z\in R\left(\Sigma_3^\tau\right),\|z\|=1}\|C_3z\|\|\bar{x}\| + I_1(\Sigma_3,C_3)\|v\|\right)^2 + \right. \\
\left. + J_2(\Sigma_3,C_3)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2} = \left(\max_{0\le\psi\le 1}\left(I_1(\psi,c)J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + I_2(\psi,c)\,c\,\|\bar{x}\| + I_1(\psi,c)\|v\|\right)^2 + \max_{0\le\varphi\le 1}J_2(\varphi,c)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

При выполнении доказательства п. в) леммы мы установили, что $I_2 = I_1$, поэтому из (3.10) следует

$$
\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\max_{0\le\psi\le 1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + c\|\bar{x}\| + \|v\|\right)\right)^2 + \max_{0\le\varphi\le 1}J_2(\varphi,c)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2} = \max\{N_1,N_2\}. \tag{3.11}
$$

Здесь N_1 и N_2 описываются выражением, стоящим слева от последнего знака равенства. В этом выражении в первом случае функции I_1, J_1, J_2 определены моделью 1.1, во втором – моделью 1.2.

Предположим, что $N_1 = \max\{N_1,N_2\}$. Приступим к оцениванию величины N_1. Обращаясь к свойствам функций I_1, J_1, J_2 (см. следствие 2.1), мы можем записать цепочку равенств

$$
\begin{gathered}
\max_{0\le\psi\le 1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + c\|\bar{x}\| + \|v\|\right) = \max_{\bar{\varphi}\le\psi\le 1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + c\|\bar{x}\| + \|v\|\right) = \\
= \max_{\bar{\psi}\le\psi\le 1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + c\|\bar{x}\| + \|v\|\right),
\end{gathered}
$$

где $\bar{\varphi},\bar{\psi}$ определенны в (2.16). Поэтому обращаясь к (3.11), запишем

$$
N_1 = \left(\left(\max_{\bar{\psi}\le\psi\le 1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\| + c\|\bar{x}\| + \|v\|\right)\right)^2 + \max_{0\le\varphi\le 1}J_2(\varphi,c)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.
$$

Из последнего неравенства, благодаря (3.5), (2.16) и утверждению п. 3 следствия 2.1, следует

$$
N_1 \le \left(\left(\max_{c_r\alpha\le\psi\le 1}I_1(\psi,\alpha\|A\|)\left(J_1(\psi,\alpha\|A\|)\|\tilde{y}\| + \alpha\|A\|\|\bar{x}\| + \|v\|\right)\right)^2 + \max_{0\le\varphi\le 1}J_2(\varphi,\alpha\|A\|)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.
$$

Последнее с учетом (2.13), (2.6), (2.8), (2.14) (второе равенство) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
N_1 \le \left(\left(\left(\max_{c_r\alpha\le\psi\le 1}\frac{1}{\sqrt{(\sigma_r-\psi\alpha\|A\|)^2 + (1-\psi^2)\alpha^2\|A\|^2}}\times\right.\right.\right. \\
\left.\left.\left.\times\left(\frac{\sqrt{1-\psi^2}\alpha\|A\|}{\sqrt{(\sigma_r-\psi\alpha\|A\|)^2 + (1-\psi^2)\alpha^2\|A\|^2}}\|\tilde{y}\| + \alpha\|A\|\|\bar{x}\| + \|v\|\right)\right)\right)^2 + \left(\frac{\alpha\|A\|}{\sigma_{r-1}}\right)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.
\end{gathered}
$$

Произведем преобразование выражений, входящих в последнюю формулу:

1)

$$
\sqrt{(\sigma_r-\psi\alpha\|A\|)^2 + (1-\psi^2)\alpha^2\|A\|^2} = \sqrt{\sigma_r^{\,2} - 2\sigma_r\psi\alpha\|A\| + \alpha^2\|A\|^2} = \sigma_r\sqrt{1-2c_r\alpha\psi + c_r^2\alpha^2},
$$

2) согласно (3.8)

$$
\|\tilde{y}\| \le \gamma\|\bar{y}\| = \gamma\|A\bar{x}\| \le \gamma\|A\|\|\bar{x}\|,
$$

3) согласно (3.6) и (3.8) и последней цепочке неравенств находим

$$
\|v\| \le \beta\|y\| = \beta\|\bar{y}+\tilde{y}\| = \beta\sqrt{\|\bar{y}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2} \le \beta\sqrt{1+\gamma^2}\|\bar{y}\| \le \beta\sqrt{1+\gamma^2}\|A\|\|\bar{x}\|.
$$

Благодаря последним соотношениям получим

$$
N_1 \le \left(\left(\max_{c_r\alpha\le\psi\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-2c_r\alpha\psi + c_r^2\alpha^2}}\left(\frac{\sqrt{1-\psi^2}\alpha\|A\|}{\sigma_r^{\,2}\sqrt{1-2c_r\alpha\psi + c_r^2\alpha^2}}\gamma\|A\|\|\bar{x}\| + \right.\right.\right.
$$

$$+\frac{\alpha\|A\|}{\sigma_r}\|\bar{x}\|+\beta\sqrt{1+\gamma^2}\,\|A\|\|\bar{x}\|\Bigg)\Bigg)^2+(c_{r-1}\alpha)^2\,\|\bar{x}\|^2\Bigg)^{1/2}=$$

$$=\left(\left(\max_{c_r\alpha\le\psi\le1}\frac{1}{\sqrt{1-2c_r\alpha\psi+c_r^2\alpha^2}}\left(\frac{c_r^2\alpha\gamma\sqrt{1-\psi^2}}{\sqrt{1-2c_r\alpha\psi+c_r^2\alpha^2}}+c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})\right)\right)^2+(c_{r-1}\alpha)^2\right)^{1/2}\|\bar{x}\|.$$

Введя новую переменную

$$\xi=\psi-c_r\alpha,$$

преобразуем выражения, входящие в последнюю формулу:

$\psi=c_r\alpha+\xi$, поэтому верно

1) $1-2c_r\alpha\psi+c_r^2\alpha^2=1-2c_r\alpha(c_r\alpha+\xi)+c_r^2\alpha^2=1-c_r^2\alpha^2-2c_r\alpha\xi$,

2) $1-\psi^2=1-(c_r\alpha+\xi)^2$

и

$$N_1\le\left(\left(\max_{0\le\xi\le1-c_r\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-c_r^2\alpha^2-2c_r\alpha\xi}}\left(\frac{c_r^2\alpha\gamma\sqrt{1-(c_r\alpha+\xi)^2}}{\sqrt{1-c_r^2\alpha^2-2c_r\alpha\xi}}+c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})\right)\right)^2+(c_{r-1}\alpha)^2\right)^{1/2}\|\bar{x}\|. \quad (3.12)$$

Предположим противное: $N_2=\max\{N_1,N_2\}$. Действуя аналогично, мы придем к оценке

$$N_2\le\left(\left(\frac{c_rc_{r-1}\alpha\gamma+c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{1-c_r\alpha}\right)^2+(c_{r-2}\alpha)^2\right)^{1/2}\|\bar{x}\|. \quad (3.13)$$

Действительно, обращаясь к свойствам функций I_1, J_1, J_2 (см. следствие 2.1), мы можем записать

$$\max_{0\le\psi\le1}I_1(\psi,c)\left(J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\|+c\|\bar{x}\|+\|v\|\right)=\frac{1}{\sigma_r-c}\left(\max_{0\le\psi\le1}J_1(\psi,c)\|\tilde{y}\|+c\|\bar{x}\|+\|v\|\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_r-c}\left(J_1(\bar{\psi},c)\|\tilde{y}\|+c\|\bar{x}\|+\|v\|\right)=\frac{1}{\sigma_r-c}\left(\frac{c}{\sigma_{r-1}}\|\tilde{y}\|+c\|\bar{x}\|+\|v\|\right)\quad (\text{см. } (2.13), (2.16), (2.14)),$$

$$\max_{0\le\varphi\le1}J_2(\varphi,c)=J_2(\bar{\varphi},c)=\frac{c}{\sigma_{r-2}}\quad (\text{см. } (2.16), (2.14)).$$

Используя последние соотношения в (3.11), получаем (3.13).

Разделив $\|\bar{u}-\bar{x}\|$ и обе части неравенств (3.12) и (3.13) на $\|\bar{x}\|$, мы приходим к завершению доказательства п. 1.

Доказательство утверждения п. 2 мы опускаем ввиду его очевидности. Доказательство утверждения п. 3 мы опускаем по той причине, что оно во многом повторяет доказательство п. 1. Поэтому сразу перейдем к доказательству п. 4.

Обращаясь к п. 4 леммы 1.2 (см. 2.8), мы можем записать

$$\|\bar{u}-\bar{x}\|\le\left(\left(\left\|(A+B)^+\right\|\max_{z\in R(A^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Bz\|\|\bar{x}\|+\left\|(A+B)^+\right\|\|v\|\right)^2+\left\|(A+B)^+(A+B)-A^+\right\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

Используя сингулярное разложение матрицы A, последнее неравенство перепишем в виде

$$\|\bar{u}-\bar{x}\|\le\left(\left(\left\|(\Sigma+C)^+\right\|\max_{z\in R(\Sigma^{\mathrm{T}}),\|z\|=1}\|Cz\|\|\bar{x}\|+\left\|(\Sigma+C)^+\right\|\|v\|\right)^2+\left\|(\Sigma+C)^+(\Sigma+C)-\Sigma^+\Sigma\right\|^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2},$$

где $C=P^{\mathrm{T}}BQ$.

Прибегнув к более компактным обозначениям (см. следствие 2.4), последнее неравенство перепишем в виде

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(I_1(\Sigma,C)\left(\max_{z\in R(\Sigma^{\text{т}}),\|z\|=1}\|Cz\|\|\bar{x}\|+\|v\|\right)\right)^2 + J_2(\Sigma,C)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда согласно замечанию 2.3, равенству (3.5) и неравенству (3.6) следует

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \max_{0\le\varphi\le 1}\left(\left(I_1(\Sigma_3,C_3)\left(\max_{z\in R(\Sigma^{\text{т}}),\|z\|=1}\|C_3z\|\|\bar{x}\|+\|v\|\right)\right)^2 + J_2(\Sigma_3,C_3)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\left(I_1(\Sigma_3,C_3)(c\|\bar{x}\|+\beta\|y\|)\right)^2 + \max_{0\le\varphi\le 1} J_2(\varphi,c)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

Следуя определениям величин $I_1(\Sigma_3,C_3)$, $J_2(\varphi,c)$ (см. соотношения (2.22), (2.24)), с учетом (2.14) (первое равенство) и неравенства $\|y\|\le\|A\|\|\bar{x}\|$ преобразуем последнее выражение

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\frac{1}{\sigma_r-c}(c\|\bar{x}\|+\beta\|A\|\|\bar{x}\|)\right)^2 + \left(\frac{c}{\sigma_{r-1}}\right)^2\|\bar{x}\|^2\right)^{1/2}.$$

После применения неравенства (3.5), будем иметь

$$\|\bar{u}-\bar{x}\| \le \left(\left(\frac{1}{\sigma_r-\alpha\|A\|}(\alpha\|A\|+\|A\|\beta)\right)^2 + \left(\frac{\alpha\|A\|}{\sigma_{r-1}}\right)^2\right)^{1/2}\|\bar{x}\| =$$

$$= \left(\left(\frac{\|A\|}{\sigma_r(1-\alpha\|A\|/\sigma_r)}(\alpha+\beta)\right)^2 + \left(\frac{\alpha\|A\|}{\sigma_{r-1}}\right)^2\right)^{1/2}\|\bar{x}\|.$$

Отсюда уже следует утверждаемое неравенство.

Доказательство п. 4, а с ним и доказательство теоремы завершены.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Представленные в этой работе оценки являются новыми. Они имеют значительные структурные отличия от оценок, имеющихся в [6], [7]. Анализ структуры правых частей полученных неравенств показывает, что влияния отклонений подпространств $R(A+B)$ от $R(A)$ и соответственно $R\left((A+B)^{\text{т}}\right)$ от $R(A^{\text{т}})$ на значение правой части неравенства различны.

Покажем, что полученные оценки не хуже оценок, представленных в [7]. Пусть M – оценки относительной точности возмущенной системы уравнений, полученные в нашей работе. Рассматривая оценки пп. 1–4 теоремы 3.1, мы видим, что при стремлении σ_{r-2} и σ_{r-1} к σ_r они возрастают (кроме оценки из п. 2) и при выполнении равенств $\sigma_{r-2}=\sigma_{r-1}=\sigma_r$ принимают наибольшие значения:

1) при $r<\min\{m,n\}$

$$M = \left(\left(\frac{c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{1-c_r\alpha}\right) + (c_r\alpha)^2\right)^{1/2}, \tag{4.1}$$

2) при $r=m=n$

$$M = \frac{c_r(\alpha+\beta)}{1-c_r\alpha}, \tag{4.2}$$

3) при $m>n=r$

$$M = \frac{c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2})}{1-c_r\alpha}, \tag{4.3}$$

4) при $r=m<n$

$$M = \left(\left(\frac{c_r(\alpha+\beta)}{1-c_r\alpha}\right) + (c_r\alpha)^2\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

В [7] рассматриваются исходная система уравнений

$$Ax \cong b$$

и возмущенная система

$$(A + E)(x + dx) \cong (b + db).$$

После введения обозначений

$$\alpha = \frac{\|E\|}{\|A\|}, \quad \beta = \frac{\|db\|}{\|b\|}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} \le \frac{\|b\|}{\|Ax\|}, \quad \rho = \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \le \frac{\|b\|}{\|Ax\|}, \quad (r = b = Ax),$$

$$k = \|A\|\|A^+\|, \quad \bar{k} = \frac{k}{1 - k\alpha}$$

для различных отношений между $rk(A)$, m и n даются оценки сверху, величины $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$ (обозначим их через N):

1) при $r < \min\{m, n\}$ (теорема 9.7)

$$N = \bar{k}(2 + k\rho)\alpha + \gamma\beta, \tag{4.5}$$

2) при $r = m = n$ (теорема 9.15)

$$N = \bar{k}(\alpha + \beta), \tag{4.6}$$

3) при $m > n = r$ (теорема 9.12)

$$N = \bar{k}(1 + k\rho)\alpha + \gamma\beta, \tag{4.7}$$

4) при $r = m < n$ (теорема 9.18)

$$N = \bar{k}(2\alpha + \beta). \tag{4.8}$$

При сопоставлении обозначений, применяемых в [7] и в нашей работе, между ними были установлены следующие соответствия:

$$A = A, \quad x = \bar{x}, \quad b = y, \quad r = \tilde{y}, \quad E = B, \quad dx = \bar{u} - \bar{x}, \quad db = v, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta,$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad \rho = \gamma, \quad k = c_r, \quad \bar{k} = \frac{c_r}{1 - c_r\alpha}.$$

Используя приведенный список соответствий, осуществим требующиеся подстановки в соотношения (4.5)–(4.8). После преобразования полученных выражений будем иметь:

1) при $r < \min\{m, n\}$

$$N = \frac{1}{1 - c_r\alpha}\left(\left(c_r^2\alpha\gamma + c_r\left(\alpha + \beta\sqrt{1 + \gamma^2}\right)\right) + c_r\alpha\right), \tag{4.9}$$

2) при $r = m = n$

$$N = \frac{c_r(\alpha + \beta)}{1 - c_r\alpha}, \tag{4.10}$$

3) при $m > n = r$

$$N = \frac{1}{1 - c_r\alpha}\left(c_r^2\alpha\gamma + c_r\left(\alpha + \beta\sqrt{1 + \gamma^2}\right)\right), \tag{4.11}$$

4) при $r = m < n$

$$N = \frac{c_r(\alpha + \beta)}{1 - c_r\alpha} + \frac{c_r\alpha}{1 - c_r\alpha}. \tag{4.12}$$

Наконец, приступим к выявлению отношений между оценками (4.1) и (4.5), (4.2) и (4.6), (4.3) и (4.7), (4.4) и (4.8).

Применяя (4.1) и (4.9), получаем

$$M = \left(\left(\frac{c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha + \beta\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - c_r\alpha}\right)^2 + (c_r\alpha)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{1 - c_r\alpha}\left(\left(c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha + \beta\sqrt{1 + \gamma^2})\right)^2 + \left((1 - c_r\alpha)(c_r\alpha)\right)^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - c_r\alpha}\left(\left(c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha + \beta\sqrt{1 + \gamma^2})\right) + (c_r\alpha)\right) = N.$$

Сопоставляя (4.2) и (4.10), а также (4.3) и (4.11), мы видим, что $M = N$.

Наконец, используя (4.4) и (4.12), будем иметь

$$M = \left(\left(\frac{c_r(\alpha+\beta)}{1-c_r\alpha}\right)^2 + (c_r\alpha)^2\right)^{1/2} = \frac{1}{1-c_r\alpha}\left(\left(c_r\left(\alpha+\beta\sqrt{1+\gamma^2}\right)\right)^2 + ((1-c_r\alpha)(c_r\alpha))^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{1-c_r\alpha}\left(\left(c_r^2\alpha\gamma + c_r(\alpha+\beta)\right) + (c_r\alpha)\right) = N.$$

Таким образом, показано, что полученные нами оценки во всех четырех случаях не хуже представленных в [7].

Дополнительно проиллюстрируем полученные результаты двумя характерными примерами. Обозначим через ε реальную относительную погрешность вычисленного псевдорешения $\left(\varepsilon = \dfrac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}\right)$ и перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. Пусть $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 2\times 10^{-5}$, $y_5 = 10^{-4}$, $c = 10^{-5}$, $\psi = \dfrac{c}{\sigma_3}$, $\varphi = \dfrac{c}{\sigma_2}$,

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ y_5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi c & 0 & 0 & \sqrt{1-\varphi^2}c \\ 0 & 0 & -\psi c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\psi^2}c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(модель 2.1.2)}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, псевдорешение $\bar{x}$ системы $Ax \cong y$ равно $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. В результате непосредственных вычислений было установлено, что псевдорешение $\bar{u}$ возмущенной системы $(A+B)u \cong y + v$, определенное формулой $\bar{u} = (A+B)^{+}(y+v)$, равно $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2.887 & 3 & 0.577 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. При этом оказалось, что $\varepsilon = 2.517$, $M = 5.855$, $N = 8$, где M определялась по соотношениям п. 1 теоремы 3.1 соответственно N – по формуле (4.5).

Пример 2. В этом примере в отличие от первого $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$. При этом оказалось $\varepsilon = 1.414$, $M = 2$, $N = 8$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
2. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Мир, 1977. 234 с.
3. *Ахиезер И.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
4. *Годунов С.К.* Решение систем линейных уравнений. М.: Наука, 1980. 177 с.
5. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991. 240 с.
6. *Годунов С.К.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. М.: Наука, 456 с.
7. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 231 с.