ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 9, с. 1581–1590

УДК 517.956.4

УГЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕМОНОТОННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Денисов[1,*], А. И. Денисов[2]

([1] 300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия;

[2] 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, Национальный исследовательский институт “Высшая школа экономики”, Россия)

**e-mail: den_tspu@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.04.2019 г.
Переработанный вариант 02.04.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon)$$

в прямоугольнике рассматривается задача с краевыми условиями I рода. Функция F в угловых точках прямоугольника предполагается квадратичной и немонотонной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Основное внимание уделяется построению главного члена угловой части асимптотики решения при $\epsilon \to 0$. Библ. 5.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.1134/S0044466919090072

ВВЕДЕНИЕ

В работе продолжается исследование нелинейных сингулярно возмущенных задач с угловыми точками границы (см. [1]–[3]). В [1] рассмотрена начально-краевая задача вида

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon),\qquad (x,t)\in\Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,0,\varepsilon)=\phi(x),\qquad 0\le x\le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t,\epsilon)=\psi_1(t),\qquad u(1,t,\epsilon)=\psi_2(t),\qquad 0\le t\le T. \tag{0.3}$$

Через Ω обозначен прямоугольник $\{(x,t)|0<x<1,\ 0<t<T\}$. В предположении, что в угловых точках прямоугольника $(0,0)$ и $(1,0)$ функция F является квадратичной и монотонной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения, построено полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon \to 0$ и обоснована равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

В [2] класс нелинейных функций был существенно расширен. От функции F в угловых точках прямоугольника требовалась только монотонность на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Как и в [1], было построено полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon \to 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

В [3] асимптотическое приближение решения строилось в предположении, что нелинейная задача, определяющая главный член угловой части асимптотики, разрешима. Последующие члены угловой части асимптотики определялись из линейных параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от главного члена угловой части асимптотики. Для этих коэффициентов, в отличие от [1] и [2], приходилось допускать, что они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это приводило к значительным трудностям. Однако область, в которой рассматривались уравнения, удалось разбить на подобласти в соответствии со знаком производной. В каждой из этих подобластей были построены верхние и нижние решения задачи. Затем куски барьерных функций были гладко состыкованы друг с другом при сохранении неравенств, необходимых для верхних и нижних решений. Таким образом, верхние и нижние решения задачи были построены во всей области, что определило полное асимптотическое приближение решения при $\epsilon \to 0$. Была обоснована равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

В данной статье для нелинейного уравнения обсуждается возможность построения главного члена угловой части асимптотики решения задачи (0.1)–(0.3) в случае, когда функция F в угловых точках прямоугольника не является монотонной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Для определенности считается, что в угловых точках прямоугольника функция F является квадратичной. Как и в [3], область, в которой рассматривается уравнение, разбивается на подобласти, но в данной работе разбиение определяется структурой предлагаемых барьерных функций. В каждой из подобластей строятся верхние и нижние решения задачи. Затем эти куски гладко стыкуются друг с другом при сохранении неравенств, необходимых для верхних и нижних решений. Последующие члены угловой части асимптотики определяются методами работы [3]. В результате обосновывается возможность построения полного асимптотического приближения решения задачи при $\epsilon \to 0$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем предполагать, что следующие условия выполнены.

Условие 1. Функции $F(u, x, t, \epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых условий: $\phi(0) = \psi_1(0)$, $\phi(1) = \psi_2(0)$.

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Условие 3. Производная $F_u'(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \qquad \Pi_0(x, 0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x, 0), \tag{1.1}$$

где параметр $x \in [0,1]$, имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$ и удовлетворяет условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$.

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \qquad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \tag{1.2}$$

где $k = 0$ или 1, а t играет роль параметра, прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \to \infty$.

Решение задачи (0.1)–(0.3) ищется методом угловых пограничных функций (см. [4]) в виде асимптотического ряда по параметру $\epsilon \to 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \epsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{1.3}$$

Здесь через $\bar{u}$ обозначена функция, называемая *регулярной* частью асимптотики. При построении этой функции не учитываются граничные условия задачи. Функции Π, Q и Q^*, называемые *пограничными*, призваны осуществить гладкий переход от регулярной части к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω: $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Функции P и P^*, называемые *угловыми пограничными*, призваны сгладить невязки, возникающие вблизи вершин прямоугольника Ω: $(0, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно.

В [1] функция $\bar{u}$ построена в виде асимптотического ряда по степеням ϵ:

$$\bar{u}(x,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x,t),$$

где коэффициент $\bar{u}_0(x,t)$ выбирается в соответствии с условиями 2 и 3.

Для построения пограничных функций вводятся растянутые переменные

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}.$$

Погранслойные функции определяются стандартным образом в виде рядов

$$\Pi(x,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k(x,\tau), \quad Q(\xi,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k(\xi,t),$$

$$Q^*(\xi_*,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k^*(\xi_*,t).$$

Функция $\Pi_0 = \Pi_0(x,\tau)$ является решением начальной задачи

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right), \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0).$$

В силу условий 3 и 4 эта задача имеет решение, для которого справедлива экспоненциальная оценка убывания вида

$$\left|\Pi_0(x,\tau)\right| \le C\exp(-\kappa\tau),$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Функции $\Pi_k = \Pi_k(x,\tau)$, $k \ge 1$, определяются из начальных линейных задач

$$-\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = F_u'\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right)\Pi_k + \pi_k, \quad \Pi_k(x,0) = -\bar{u}_k(x,0), \tag{1.4}$$

в которых функции $\pi_k = \pi_k(x,\tau)$ выражаются рекуррентно через функции Π_j, $j < k$, и их производные с коэффициентами, являющимися многочленами от τ. Поэтому выполнение экспоненциальных оценок убывания для функций Π_j, $j < k$, гарантирует справедливость подобных оценок для функций π_k и, следовательно, для решений $\Pi_k(x,\tau)$ задач (1.4).

Функция $Q_0 = Q_0(\xi,t)$ является решением краевой задачи

$$a^2\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = F\left(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0\right),$$

$$Q_0(0,t) = \psi_1(t) - \bar{u}_0(0,t), \quad Q_0(\infty,t) = 0.$$

Эта задача эквивалентна задаче (1.2) при $k = 0$, и по условию 5 ее решение $Q_0(\xi,t)$ удовлетворяет экспоненциальной оценке убывания вида

$$\left|Q_0(\xi,t)\right| \le C\exp(-\kappa\xi),$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Функции $Q_k = Q_k(\xi,t)$, $k \ge 1$, определяются из линейных задач

$$a^2\frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = F_u'(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0)Q_k + q_k, \tag{1.5а}$$

$$Q_k(0,t) = -\bar{u}_k(0,t), \quad Q_k(\infty,t) = 0, \tag{1.5б}$$

в которых функции $q_k = q_k(\xi,t)$ выражаются рекуррентно через функции Q_j, $j < k$, и их производные с коэффициентами, являющимися многочленами от ξ. Если функции Q_j, $j < k$, удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания, то оценки того же вида справедливы для функций q_k и, следовательно, для решений Q_k задач (1.5).

Функции $Q_k^*(\xi_*,t)$ определяются аналогично функциям $Q_k(\xi,t)$, $k \ge 0$.

Вблизи угловых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi,\tau,\varepsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)$. Эти функции строятся в виде асимптотических рядов

$$P(\xi,\tau,\epsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k(\xi,\tau),\qquad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Главный член угловой части асимптотики $P_0=P_0(\xi,\tau)$ определяется из задачи

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}F(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0,0,0,0)-$$
$$-F(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau),0,0,0)-F(\bar{u}_0(0,0)+Q_0(\xi,0),0,0,0),\quad (\xi,\tau)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{1.6}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0), \tag{1.7}$$

$$P_0(\xi,\tau)\to 0\quad\text{при}\quad \xi+\tau\to\infty. \tag{1.8}$$

Здесь через $\mathbb{R}_+^2$ обозначена первая четверть плоскости растянутых переменных (ξ,τ). Функции $P_k=P_k(\xi,\tau)$, $k\ge 1$, определяются из линейных задач

$$a^2\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}F_u'(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0,0,0,0)P_k+h_k,\quad (\xi,\tau)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{1.9}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0), \tag{1.10}$$

$$P_k(\xi,\tau)\to 0\quad\text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{1.11}$$

где неоднородности $h_k=h_k(\xi,\tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\le C\exp(-\kappa(\xi+\tau)), \tag{1.12}$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0,\ldots,P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых пограничных функций $P_k^*(\xi_*,\tau)$, $k\ge 0$, ставятся аналогично.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА УГЛОВОЙ ЧАСТИ АСИМПТОТИКИ

Будем предполагать, что в угловой точке $(0,0)$ прямоугольника Ω функция F удовлетворяет следующему условию.

Условие (A). Функция $F(u)=F(u,0,0,0)$ имеет вид

$$F(u)=-A(u-\bar{u}_0)(u-\beta),\quad \bar{u}_0=\bar{u}_0(0,0),$$

где A – положительное число, а граничное значение $\phi(0)$ и число β удовлетворяют неравенствам

$$\bar{u}_0<\frac{\bar{u}_0+\beta}{2}<\phi(0)<\beta.$$

Для краткости примем следующие обозначения:

$$(u)=(u,0,0,0),\quad \bar{u}_k=\bar{u}_k(0,0),\quad \Pi_k=\Pi_k(0,\tau),\quad Q_k=Q_k(\xi,0),$$

$$P_k=P_k(\xi,\tau),\quad F=F_u'.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1–5 *и* (A), *то задача* (1.6)–(1.8) *имеет решение* $P_0(\xi,\tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (1.12).

Доказательство. Определим оператор L:

$$L(P):=a^2\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P}{\partial\tau}-F(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+P)+F(\bar{u}_0+\Pi_0)+F(\bar{u}_0+Q_0).$$

В силу условия (А) имеем

$$L(P) = a^2\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} - \frac{\partial P}{\partial\tau} + AP^2 - A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)P + 2A\Pi_0 Q_0.$$

Задачу (1.6)–(1.8) можно переписать в операторной форме:

$$L(P_0) = 0, \tag{2.1}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \tag{2.2}$$

$$P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{2.3}$$

Функция $\Pi_0 = \Pi_0(0,\tau)$ является решением задачи

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = A\Pi_0(\bar{u}_0 + \Pi_0 - \beta), \quad \Pi_0(0,0) = \phi - \bar{u}_0,$$

и может быть представлена в явной форме:

$$\Pi_0(0,\tau) = \frac{(\beta - \bar{u}_0)(\phi - \bar{u}_0)}{\phi - \bar{u}_0 + (\beta - \phi)\exp(m^2\tau)}, \tag{2.4}$$

где число

$$m = \sqrt{A(\beta - \bar{u}_0)} = \sqrt{F'(\bar{u}_0)}. \tag{2.5}$$

В качестве функции $Q_0 = Q_0(\xi,0)$ берем монотонное решение задачи

$$a^2\frac{d^2Q_0}{d\xi^2} = -AQ_0(\bar{u}_0 + Q_0 - \beta), \quad Q_0(0,0) = \phi - \bar{u}_0, \quad Q_0(\infty,0) = 0.$$

Это решение можно представить в виде

$$Q_0(\xi,0) = \frac{6\theta(\beta - \bar{u}_0)\exp(-m\xi/a)}{(1 + \theta\exp(-m\xi/a))^2}, \tag{2.6}$$

где

$$\theta = \frac{m-l}{m+l}, \quad l = \sqrt{A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}(\phi - \bar{u}_0)\right)} = \sqrt{F'\left(\bar{u}_0 + \frac{\phi - \bar{u}_0}{3}\right)}. \tag{2.7}$$

Для доказательства теоремы используется метод верхних и нижних решений (см. [5]), который заключается в том, что краевая задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad D, \quad Z = \zeta \quad \text{на границе области}, \tag{2.8}$$

имеет решение Z в промежутке $Z_- \le Z \le Z_+$, если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+, \tag{2.9}$$

а на границе области D выполняются неравенства

$$Z_- \le \zeta \le Z_+. \tag{2.10}$$

Сначала будем строить верхнее решение задачи (2.1)–(2.3), т.е. функцию $P_+(\xi,\tau)$, удовлетворяющую условиям

$$L(P_+) \le 0, \tag{2.11}$$

$$P_+(0,\tau) \ge -\Pi_0(0,\tau), \quad P_+(\xi,0) \ge -Q_0(\xi,0), \tag{2.12}$$

$$P_+(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{2.13}$$

Функцию $P_+(\xi,\tau)$ будем собирать из трех гладких кусков. С этой целью область $\mathbb{R}_+^2$ разобьем на подобласти

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau)|\xi > \rho_0, \quad \tau > \rho_0\},$$
$$\Omega_1 = \{(\xi,\tau)|\xi > \tau, \quad 0 < \tau < \rho_0\},$$
$$\Omega_2 = \{(\xi,\tau)|0 < \xi < \rho_0, \quad \tau > \xi\},$$

где ρ_0 — некоторое положительное число, определяемое ниже.

Лемма 1. *Если выполняются условия* 1–5 *и* (A), *то задача* (2.11)–(2.13) *в области* Ω_0 *имеет решение вида*

$$P_+(\xi,\tau) = r\exp(-\kappa(\xi+\tau)), \tag{2.14}$$

где r *и* κ — *некоторые положительные числа*.

Доказательство. Для функции $P_+ = P_+(\xi,\tau)$ условие (2.13) выполняется, а условие (2.12) не имеет значения в силу отграниченности области Ω_0 от координатных осей. Поэтому остается удовлетворить только одному условию (2.11).

Имеем

$$L(P_+) = a^2\frac{\partial^2 P_+}{\partial\xi^2} - \frac{\partial P_+}{\partial\tau} + AP_+^2 - A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)P_+ + 2A\Pi_0 Q_0 =$$
$$= \left(Ar^2\exp(-\kappa(\xi+\tau)) - Br + 2A\Pi_0 Q_0\exp(\kappa(\xi+\tau))\right)\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

где

$$B = A(\beta - \bar{u}_0) - a^2\kappa^2 - \kappa - 2A(\Pi_0 + Q_0), \quad \Pi_0 = \Pi_0(0,\tau), \quad Q_0 = Q_0(\xi,0). \tag{2.15}$$

Обозначим через $\Psi(\xi,\tau)$ выражение, стоящее в “больших” скобках:

$$\Psi(\xi,\tau) = Ar^2\exp(-\kappa(\xi+\tau)) - Br + 2A\Pi_0 Q_0\exp(\kappa(\xi+\tau)),$$

и покажем, что можно добиться выполнения неравенства

$$\Psi(\xi,\tau) \le 0 \quad \text{в области} \quad \Omega_0. \tag{2.16}$$

Сначала исследуем зависимость величины $\Psi(\xi,\tau)$ от переменной $\xi \in [\rho_0,\infty)$. Производная

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = -\kappa Ar^2\exp\left(-\kappa(\xi+\tau)\right) + 2AQ_0'r + 2A\Pi_0\exp(\kappa(\xi+\tau))(Q_0' + \kappa Q_0).$$

Здесь первые два слагаемые отрицательны, а знак последнего слагаемого совпадает со знаком выражения $Q_0' + \kappa Q_0$. Имеем

$$Q_0' + \kappa Q_0 = -\frac{1}{a}Q_0\sqrt{A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}Q_0\right)} + \kappa Q_0.$$

Эта величина отрицательна при условии

$$\kappa < \frac{1}{a}\sqrt{A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}Q_0\right)}.$$

Так как $Q_0 \le \phi - \bar{u}_0$, то имеем

$$0 < A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}(\phi - \bar{u}_0)\right) \le A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}Q_0\right).$$

Поэтому κ можно выбрать из условия

$$0 < \kappa < \frac{1}{a}\sqrt{A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}(\phi - \bar{u}_0)\right)}. \tag{2.17}$$

При этом условии $Q_0' + \kappa Q_0 < 0$ и производная $\partial\Psi/\partial\xi < 0$. Значения Ψ убывают с ростом переменной ξ.

Аналогично исследуем зависимость величины Ψ от переменной τ на промежутке $[\rho_0, \infty)$. Производная

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\kappa A r^2 \exp\left(-\kappa(\xi+\tau)\right) + 2A\Pi_0' r + 2AQ_0 \exp(\kappa(\xi_1+\tau))(\Pi_0' + \kappa\Pi_0).$$

Здесь первые два слагаемых отрицательны, а знак последнего слагаемого совпадает со знаком выражения

$$\Pi_0' + \kappa\Pi_0 = A\Pi_0(\bar{u}_0 + \Pi_0 - \beta) + \kappa\Pi_0 = \left(A(\Pi_0 + \bar{u}_0 - \beta) + \kappa\right)\Pi_0.$$

Величина $\Pi_0' + \kappa\Pi_0 < 0$, если

$$A(\Pi_0 + \bar{u}_0 - \beta) + \kappa < 0. \tag{2.18}$$

Так как $\Pi_0 \le \varphi - \bar{u}_0$, то (2.18) выполняется, если

$$A(\phi - \bar{u}_0 + \bar{u}_0 - \beta) + \kappa = A(\phi - \beta) + \kappa < 0.$$

Здесь $\phi - \beta < 0$ по условию (A). Считаем, что

$$0 < \kappa < A(\beta - \phi). \tag{2.19}$$

При этом условии $\Pi_0' + \kappa\Pi_0 < 0$ и производная $\partial\Psi/\partial\tau < 0$. Значения Ψ убывают с ростом переменной τ. Собираем (2.17) и (2.19) вместе, получаем условие

$$0 < \kappa < \min\left(\frac{1}{a}\sqrt{A\left(\beta - \bar{u}_0 - \frac{2}{3}(\phi - \bar{u}_0)\right)}, A(\beta - \phi)\right), \tag{2.20}$$

при котором значения $\Psi(\xi,\tau) \le \Psi(\rho_0,\rho_0)$. Причем число $\Psi(\rho_0,\rho_0)$ является верхней точной гранью множества значений $\Psi(\xi,\tau)$ в области Ω_0. Это число равно

$$\Psi_0 := \Psi(\rho_0,\rho_0) = Ar^2\exp(-2\kappa\rho_0) - B_0(\kappa)r + 2A\Pi_0 Q_0 \exp(2\kappa\rho_0),$$

где

$$B_0(\kappa) = A(\beta - \bar{u}_0) - a^2\kappa^2 - \kappa - 2A(\Pi_0 + Q_0), \quad \Pi_0 = \Pi_0(0,\rho_0), \quad Q_0 = Q_0(\rho_0, 0). \tag{2.21}$$

Величина $\Psi_0 = \Psi_0(\kappa, r)$ непрерывно зависит от параметра κ. Поэтому, чтобы удовлетворить неравенству (2.16) на промежутке $\kappa \in (0, \kappa_0)$, где κ_0 — некоторое положительное число, достаточно доказать, что при $\kappa = 0$ величина $\Psi_0(0,r) < 0$. Имеем

$$\Psi_0(0,r) = Ar^2 - B_0(0)r + 2A\Pi_0 Q_0 < 0,$$

если выполняются условия:

1) коэффициент $B_0(0) = A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0) > 0$;

2) дискриминант $D = B_0^2(0) - 8A^2\Pi_0 Q_0 > 0$;

3) величина $r > 0$ находится между корнями r_1 и r_2 уравнения $\Psi_0(0,r) = 0$.

Дискриминант D можно представить в виде

$$D = (B_0(0) - 2A\sqrt{2\Pi_0 Q_0})(B_0(0) + 2A\sqrt{2\Pi_0 Q_0}).$$

Поэтому условия $B_0(0) > 0$ и $D > 0$ эквивалентны неравенству

$$B_0(0) - 2A\sqrt{2\Pi_0 Q_0} > 0.$$

Имеем

$$B_0(0) - 2A\sqrt{2\Pi_0 Q_0} = A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0 - 2\sqrt{2\Pi_0 Q_0}) > 0,$$

если

$$\Pi_0 + Q_0 + \sqrt{2\Pi_0 Q_0} - \frac{\beta - \bar{u}_0}{2} < 0. \tag{2.22}$$

Функция

$$W(\rho) = \Pi_0(0,\rho) + Q_0(\rho,0) + \sqrt{2\Pi_0(0,\rho)Q_0(\rho,0)} - \frac{\beta - \bar{u}_0}{2}$$

на промежутке $[0,\infty)$ монотонно убывает от значения $W(0) > 0$ до значения $W(\infty) < 0$ и потому обратима. Условие (2.22) будет выполнено, если взять

$$\rho_0 > W^{-1}(0). \tag{2.23}$$

При выполнении этого условия корни уравнения $\Psi_0(0,r) = 0$ будут положительными. В качестве параметра r можно взять любое число из промежутка между этими корнями:

$$\frac{B_0(0) - \sqrt{D}}{2A} < r < \frac{B_0(0) + \sqrt{D}}{2A},$$

или, с учетом обозначений,

$$\begin{gathered}\frac{(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)^2 - \sqrt{(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)^2 - 8\Pi_0 Q_0}}{2} < r < \\ < \frac{(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)^2 + \sqrt{(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)^2 - 8\Pi_0 Q_0}}{2},\end{gathered} \tag{2.24}$$

где $\Pi_0 = \Pi_0(0,\rho_0)$, $Q_0 = Q_0(\rho_0,0)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если выполнены условия* 1–5 *и* (A), *то задача* (2.11)–(2.13) *в области* Ω_1 *имеет решение вида*

$$P_+(\xi,\tau) = h(\tau)\exp(-\kappa\xi), \tag{2.25}$$

где κ *– достаточно малое положительное число, а функция* $h(\tau)$ *на промежутке* $\tau \in [0,\rho_0]$ *обладает свойствами*

$$h(\tau) \ge 0, \quad h(\rho_0) = r\exp(-\kappa\rho_0), \quad h'(\tau) > 0, \quad h''(\tau) < 0. \tag{2.26}$$

Доказательство. Для функции $P_+ = P_+(\xi,\tau)$ условия (2.12) и (2.13) выполняются. Поэтому остается удовлетворить условию (2.11), левая часть которого имеет вид

$$\begin{gathered}L(P_+) = a^2\frac{\partial^2 P_+}{\partial\xi^2} - \frac{\partial P_+}{\partial\tau} + AP_+^2 - A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)P_+ + 2A\Pi_0Q_0 = a^2\kappa^2 h(\tau)\exp(-\kappa\xi) - \\ - h'(\tau)\exp(-\kappa\xi) + Ah^2(\tau)\exp(-2\kappa\xi) - A(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0)h(\tau)\exp(-\kappa\xi) + 2A\Pi_0Q_0 = \\ = (Ah^2(\tau)\exp(-\kappa\xi) - h'(\tau) + a^2\kappa^2 h(\tau) + A(2\Pi_0 + 2Q_0 + \bar{u}_0 - \beta)h(\tau) + 2A\Pi_0Q_0\exp(\kappa\xi))\exp(-\kappa\xi).\end{gathered}$$

Обозначим через $\Psi = \Psi(\xi,\tau)$ выражение, стоящее в "больших" скобках:

$$\Psi(\xi,\tau) := -h'(\tau) + a^2\kappa^2 h(\tau) + Ah^2(\tau)\exp(-\kappa\xi) + A(2\Pi_0 + 2Q_0 + \bar{u}_0 - \beta)h(\tau) + 2A\Pi_0Q_0\exp(\kappa\xi),$$

и покажем, что можно добиться выполнения неравенства

$$\Psi(\xi,\tau) \le 0 \quad \text{в области} \quad \Omega_1. \tag{2.27}$$

Сначала исследуем зависимость величины Ψ от переменной $\xi \in [0,\infty)$. Производная

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = -\kappa Ah^2(\tau)\exp(-\kappa\xi) + 2Ah(\tau)Q_0' + 2A\Pi_0\exp(\kappa\xi)(Q_0' + \kappa Q_0).$$

Здесь первые два слагаемых всегда отрицательны, а третье – отрицательно при условии (2.20). Поэтому значения Ψ убывают с ростом переменной ξ так, что

$$\Psi(\xi,\tau) \le \Psi(0,\tau) = -h'(\tau) + a^2\kappa^2 h(\tau) + Ah^2(\tau) + A(2\Pi_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0) + \bar{u}_0 - \beta)h(\tau) + 2A(\varphi - \bar{u}_0)\Pi_0.$$

Если $\kappa \le \kappa_0$, $A \le A_0$, где κ_0 и A_0 – достаточно малые положительные числа, то знак последнего выражения совпадет со знаком величины $-h'(\tau)$, которая отрицательна.

Если $A > A_0$, то в исходной задаче (0.1)–(0.3) можно сделать замену вида $t = \mu t_1$, где положительное число $\mu < A_0/A$. Тогда вместо (0.1) получится уравнение

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = F(u, x, \mu t_1, \epsilon),$$

или

$$\epsilon^2\left(\mu a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = \mu F(u, x, \mu t_1, \epsilon).$$

В результате такого преобразования коэффициент A заменится на $A_1 = \mu A < A_0$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если выполнены условия* 1–5 *и* (A), *то задача* (2.11)–(2.13) *в области* Ω_2 *имеет решение вида*

$$P_+(\xi, \tau) = h(\xi)\exp(-\kappa\tau), \tag{2.28}$$

где κ *— достаточно малое положительное число, а* $h(\xi)$ *— функция, удовлетворяющая на промежутке* $\xi \in [0, \rho_0]$ *условиям* (2.26).

Доказательство. Для функции $P_+ = P_+(\xi, \tau)$ условия (2.12), (2.13) в области Ω_2 выполняются. Поэтому остается удовлетворить условию (2.11), левая часть которого имеет вид

$$L(P_+) = a^2\frac{\partial^2 P_+}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_+}{\partial \tau} + AP_+^2 - A\left(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0\right)P_+ + 2A\Pi_0 Q_0 = a^2 h''(\xi)\exp(-\kappa\tau) +$$

$$+\ \kappa h(\xi)\exp(-\kappa\tau) + Ah^2(\xi)\exp(-2\kappa\tau) - A\left(\beta - \bar{u}_0 - 2\Pi_0 - 2Q_0\right)h(\xi)\exp(-\kappa\tau) + 2A\Pi_0 Q_0 =$$

$$= (a^2 h''(\xi) + \kappa h(\xi) + Ah^2(\xi)\exp(-\kappa\tau) + A\left(2\Pi_0 + 2Q_0 + \bar{u}_0 - \beta\right)h(\xi) + 2A\Pi_0 Q_0\exp(\kappa\tau))\exp(-\kappa\tau).$$

Обозначим через $\Psi = \Psi(\xi, \tau)$ выражение, стоящее в “больших” скобках:

$$\Psi = a^2 h''(\xi) + \kappa h(\xi) + Ah^2(\xi)\exp(-\kappa\tau) + A\left(2\Pi_0 + 2Q_0 + \bar{u}_0 - \beta\right)h(\xi) + 2A\Pi_0 Q_0\exp(\kappa\tau),$$

и покажем, что можно добиться выполнения неравенства

$$\Psi(\xi, \tau) \le 0 \quad \text{в области} \quad \Omega_2. \tag{2.29}$$

Сначала исследуем зависимость величины Ψ от переменной $\tau \in [0, \infty)$. Производная

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\kappa Ah^2(\xi)\exp(-\kappa\tau) + 2A\Pi_0' h(\tau) + 2AQ_0(\Pi_0' + \kappa\Pi_0)\exp(\kappa\tau).$$

Здесь первые два слагаемых всегда отрицательны, а знак третьего слагаемого совпадает со знаком выражения $\Pi_0' + \kappa\Pi_0$, которое отрицательно при условии (2.20). Поэтому производная $\partial\Psi/\partial\tau < 0$ и величина Ψ убывает с ростом переменной τ. Значения

$$\Psi(\xi, \tau) \le \Psi(\xi, 0) = a^2 h''(\xi) + \kappa h(\xi) + Ah^2(\xi) + A(2(\phi - \bar{u}_0) + 2Q_0 + \bar{u}_0 - \beta)h(\xi) + 2A(\phi - \bar{u}_0)Q_0. \tag{2.30}$$

Если $\kappa \le \kappa_0$, $A \le A_0$, где κ_0 и A_0 – достаточно малые положительные числа, то знак последнего выражения совпадает со знаком величины $h''(\xi)$, которая отрицательна. Лемма 3 доказана.

Итак, в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2 построены гладкие куски верхнего решения $P_+(\xi, \tau)$ задачи (2.11)–(2.13). С учетом условий (2.26) эти куски непрерывно стыкуются между собой на общих частях границ областей. Методами работы [3] по непрерывному кусочногладкому барьеру можно построить гладкий верхний барьер. Нижний барьер строится симметрично верхнему. Теорема 1 доказана.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДУЮЩИХ ЧЛЕНОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1–5 *и* (A), *то задачи* (1.9)–(1.11) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (1.12).

Доказательство этой теоремы рассмотрено в работе [3].

Будем считать, что в угловой точке $(1,0)$ прямоугольника Ω функция F удовлетворяет условию, аналогичному (A).

Условие (B). Функция $F(u) = F(u,1,0,0)$ имеет вид

$$F(u) = -B(u - \bar{u}_0)(u - \gamma), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(1,0),$$

где B — положительное число, а граничное значение $\phi(1)$ и число γ удовлетворяют неравенствам

$$\bar{u}_0 < \frac{\bar{u}_0 + \gamma}{2} < \phi(1) < \gamma.$$

Если выполнены условия 1—5, (A) и (B), то формальное асимптотическое разложение решения задачи (0.1)—(0.3) определяется полностью.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1—5, (A) *и* (B), *то для достаточно малых* ε *задача* (0.1)—(0.3) *имеет решение* $u(x,t,\epsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\bar{u}_k(x,t) + \Pi_k(x,\tau) + Q_k(\xi,t) + Q_k^*(\xi_*,t) + P_k(\xi,\tau) + P_k^*(\xi_*,\tau))$$

является асимптотическим представлением при $\epsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач, определяющих пограничные функции Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k \geq 1$, и полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 255—274.
2. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1—11.
3. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 102—117.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
5. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear Analysis: Collections of Papers in Honor of Erich Rothe. N.Y.: Acad. Press, 1978. P. 1—29.