

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ ТИПА “СЕДЛО–УЗЕЛ”

© 2019 г. Л. А. Калякин

(450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия)

e-mail: klenru@mail.ru

Поступила в редакцию 25.12.2018 г.
 Переработанный вариант 29.04.2019 г.
 Принята к публикации 15.05.2019 г.

Рассматривается полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка, параметры которого медленно меняются. При замороженных параметрах соответствующее автономное уравнение имеет неподвижные точки: седло и устойчивые узлы. При деформации параметров пара седло–узел сливается. Строится асимптотическое решение вблизи такой динамической бифуркации. Выяснено, что в узком переходном слое главные члены асимптотики описываются уравнениями Риккати и Колмогорова–Петровского–Пискунова. Важным результатом является установление факта затягивания устойчивости: момент срыва значительно сдвигается от момента бифуркации. Точные утверждения проиллюстрированы результатами численных экспериментов. Библ. 30. Фиг. 2.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, асимптотика, равновесие, динамическая бифуркация.

DOI: 10.1134/S0044466919090102

1. ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи. Рассматривается нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = (x^2 + \varepsilon t)(1 - x). \quad (1.1)$$

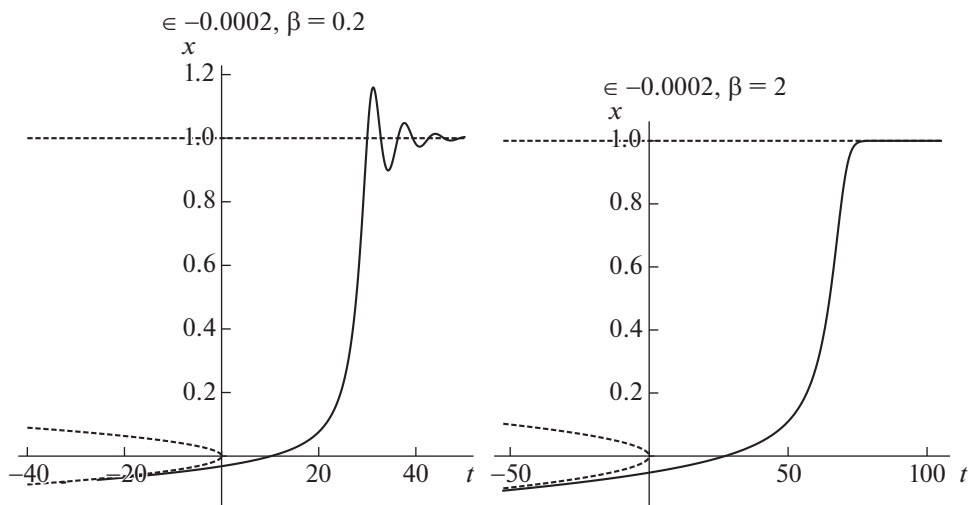
Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр; он характеризует медленную деформацию уравнения. Коэффициент $\beta = \text{const} > 0$ считается положительной константой.

Исследуются решения, которые в главном члене асимптотики по малому параметру совпадают с одним из нулей правой части: $x(t; \varepsilon) = -\sqrt{-\varepsilon t} + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t < 0$. Целью работы является построение асимптотического решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ на большом промежутке времени $t \in (-1/\varepsilon, 1/\varepsilon)$, включающем значение $t = 0$.

Численные эксперименты показывают наличие узкого переходного слоя вблизи момента $t = 0$ (см. фиг. 1). В этом слое решение быстро перестраивается от значения, близкого к нулю $x \approx 0$, к положению равновесия $x \equiv 1$. Описание такой перестройки в асимптотическом приближении при малых ε предъясняется ниже.

Обзор близких задач. На уровне обыкновенных дифференциальных уравнений эффекты быстрой перестройки зачастую объясняются в терминах теории бифуркаций. Перестройки связываются с резкими изменениями структуры фазовых портретов, что случается при переходе параметров через критические значения; например, при слиянии неподвижных точек. Строго говоря, анализ решения на основе исследования деформации фазового портрета имеет смысл для автономных систем и подразумевает выявление зависимости от дополнительного бифуркационного параметра [1].

На практике управление физической системой является динамическим, т.е. параметры меняются со временем. Если эти параметры меняются медленно, то для приближенного анализа математической модели можно использовать автономные уравнения с замороженными параметра-



Фиг. 1. Численные эксперименты с уравнением (1.1) при разных β . Графики решения асимптотически совпадают с параболой $-\sqrt{-\varepsilon t}$ при $t \rightarrow -\infty$.

ми. На этой идее основан ряд асимптотических методов: усреднение, многомасштабные разложения, адиабатические приближения. Получаемые таким способом приближенные решения оказываются асимптотикой точных решений. Однако подход с заморозкой уравнений не пригоден на тех промежутках времени, где параметры проходят бифуркационное значение. Имеется огромное число работ, посвященных исследованию задач с такой динамической бифуркацией; некоторая часть библиографии указана в [2]. К задаче, рассматриваемой нами, наиболее близки результаты о бифуркации седло–центр [3]–[9]. В этих работах, в частности, была выявлена роль уравнений Пенлеве, решения которых использовались для описания переходных слоев [3], [7]. В уравнении (1.1) имеет место динамическая бифуркация седло–узел. Ниже показано, что переходной слой описывается уравнениями Риккати и Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП, [10]). Общее уравнение типа (1.1) анализировалось в [11], где указан переход к КПП. Отметим, что под уравнением КПП обычно понимается уравнение в частных производных, как оно приведено в [10]. Здесь используется его частная версия в форме обыкновенного дифференциального уравнения.

Данное исследование было инициировано работами физиков [12], [13] по изучению процессов магнитодинамики, в которых наблюдаются резкие переходы при медленном изменении параметров системы. В предложенной в этих работах модели важную роль играет эффект затухания. Именно затухание обеспечивает на фазовом портрете наличие двух устойчивых положений равновесия типа узел, отделенных седлом [14]. Деформация параметров приводит к бифуркации седло–узел и к быстрому переходу решения с одного равновесия на другое. Рассматриваемое здесь уравнение (1.1) представляет собой простейшую модель такого типа. Его детальный анализ позволяет вскрыть асимптотическую структуру решения и выявить модельные уравнения, которые возникают здесь и в других, более сложных системах [11], [14].

Результаты. Описание асимптотики в переходном слое дается в терминах решений двух модельных уравнений. Первое – уравнение Риккати

$$\beta \frac{dY_0}{d\theta} = Y_0^2 + \theta. \tag{1.2}$$

Второе – уравнение типа КПП (Колмогоров–Петровский–Пискунов)

$$\frac{d^2 Z_0}{d\eta^2} + \beta \frac{dZ_0}{d\eta} = Z_0^2(1 - Z_0). \tag{1.3}$$

Оба эти уравнения извлекаются из исходного уравнения (1.1) в асимптотическом приближении при подходящем масштабировании переменных. Используются два масштаба медленного вре-

мени $\tau = \varepsilon t$ и $\theta = \varepsilon^{2/3} t$ и масштаб быстрого времени $\eta = t - S(\varepsilon)$. Величина S , называемая сдвигом фазы, имеет асимптотику

$$S(\varepsilon) = a\varepsilon^{-1/3} - \frac{\beta^2 + 2}{3\beta} \ln \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3} \ln^2 \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Здесь $a = a_0 \beta^{2/3}$ – положение полюса используемого решения уравнения Риккати; абсолютная константа $a_0 \approx 2$ соответствует полюсу при $\beta = 1$.

Решения модельных уравнений, подходящие для построения асимптотики, определяются однозначно при дополнительных (граничных) условиях на бесконечности: при $\theta \rightarrow -\infty$ и $\eta \rightarrow -\infty$. Такие условия извлекаются из требования согласования асимптотики на разных масштабах (см. [15]). Формула для сдвига фазы $S(\varepsilon)$ играет решающую роль в согласовании асимптотик. Сдвиг фазы в подобных ситуациях интерпретируется как затягивание потери устойчивости [16], [17]. Этот эффект просматривается на фиг. 1.

Общий результат о представлении решения в форме асимптотических рядов приведен в конце статьи. Он представляет собой итог последовательных конструкций, выполнение которых выглядит весьма громоздко и требует пояснений. Между тем принципиальная новизна работы содержится в главных членах асимптотики. Они определяются из уравнений (1.2), (1.3), структура которых довольно проста. Поэтому для понимания сути дела и ориентировки в последующем изложении полезно иметь в виду частный результат:

Теорема 1. Для уравнения (1.1) существует асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение, которое в главном члене представляется в форме, различной на разных промежутках времени:

$$x(t; \varepsilon) \approx \begin{cases} -\sqrt{-\tau} & \text{при } 1 > -\tau \gg \varepsilon^{2/3}; \\ \varepsilon^{1/3} Y_0(\theta) & \text{при } -\theta \ll \varepsilon^{-1/3}, \quad (a - \theta)/|\ln(a - \theta)| \gg \varepsilon^{1/3}; \\ Z_0(\eta) & \text{при } |\eta| \ll \varepsilon^{-1/3}; \\ 1 & \text{при } \tau \gg \varepsilon^{2/3}. \end{cases}$$

Разные временные интервалы перекрываются и в областях перекрытия асимптотики согласованы.

Замечание. На начальном этапе переходного слоя рассматриваемая задача близка к задаче о релаксационных колебаниях [18] и работам [19], [20]. Формально близость проявляется в использовании уравнения Риккати. Однако использование уравнения КПП на основном этапе переходного слоя радикально отличает полученные здесь результаты от работ [18]–[20].

2. АСИМПТОТИКА МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Замороженная система

Рассмотрим автономную систему, которая соответствует исходному уравнению (1.1) с “замороженным” параметром $\tau \in (-1, 1)$:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\beta y + (x^2 + \tau)(1 - x).$$

В зависимости от значения τ система имеет от одной до трех неподвижных точек, x -координаты которых определяются корнями алгебраического уравнения $(x^2 + \tau)(1 - x) = 0$. Штриховые линии на фиг. 1 соответствуют графикам корней при $\tau = \varepsilon t$.

Неподвижная точка $x = 1, y = 0$ существует при всех значениях τ . Линеаризованная на этой точке система определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \tau) & -\beta \end{pmatrix},$$

собственные значения которой даются формулой

$$\lambda_{1,2} = -\beta/2 \pm \sqrt{\beta^2/4 - (1 + \tau)}. \quad (2.1)$$

Эта неподвижная точка будет устойчивым узлом при $\beta \geq 2\sqrt{1 + \tau}$, либо устойчивым фокусом при $\beta < 2\sqrt{1 + \tau}$.

При $\tau < 0$ имеется еще пара неподвижных точек $x = \pm\sqrt{-\tau}$, $y = 0$. Матрицы соответствующих линеаризованных систем имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm(1 \mp \sqrt{-\tau})2\sqrt{-\tau} & -\beta \end{pmatrix}$$

с парой собственных значений

$$\lambda_1^\pm = -\beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 \pm 2(1 \mp \sqrt{-\tau})\sqrt{-\tau}},$$

$$\lambda_2^\pm = -\beta/2 - \sqrt{\beta^2/4 \pm 2(1 \mp \sqrt{-\tau})\sqrt{-\tau}}.$$

Неподвижная точка с координатой $x = \sqrt{-\tau}$ будет седлом (всегда неустойчивая). Вторая точка с координатой $x = -\sqrt{-\tau}$ будет либо устойчивым фокусом, либо устойчивым узлом (при малых значениях параметра $-\tau$).

При $\tau = 0$ две неподвижные точки сливаются в одну: $x = 0$, $y = 0$. Система приобретает вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\beta y + x^2. \tag{2.2}$$

Собственные значения линеаризованной матрицы $\lambda_1 = -\beta$, $\lambda_2 = 0$. Точка $(0, 0)$ представляет собой сложное положение равновесия типа седло–узел общего положения (см. [1], с. 88). В окрестности этой точки имеется один устойчивый узловой сектор с входящими траекториями. (Термины “входящий” и “выходящий” соответствуют стремлению траектории к равновесию при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ соответственно.) Этот сектор отделен входящими сепаратрисами от двух седловых секторов, которые разделены выходящей сепаратрисой.

2.2. Медленное движение

Исходное уравнение, записанное в медленном времени $\tau = \epsilon t$ для функции $x = X(\tau; \epsilon)$, содержит малые множители при производных

$$\epsilon^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \epsilon \beta \frac{dX}{d\tau} = (X^2 - \tau)(1 - X).$$

Асимптотическое решение в виде ряда по степеням малого параметра

$$X(\tau; \epsilon) = X_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k X_k(\tau), \quad \tau < 0, \tag{2.3}$$

строится с главным членом, который соответствует устойчивому равновесию замороженной системы $X_0 = -\sqrt{-\tau}$. Все коэффициенты асимптотики находятся однозначно по рекуррентным формулам, которые получаются приравниванием выражений при одинаковых степенях ϵ^k .

Например, первая поправка находится из уравнения $-2\sqrt{-\tau}(1 + \sqrt{-\tau})X_1 = \beta X_0'$, так что $X_1(\tau) = \beta/4\tau(1 + \sqrt{-\tau})$.

Легко видеть, что все коэффициенты имеют особенности при $\tau \rightarrow -0$, порядок которых на каждом шаге увеличивается на $3/2$.

Лемма 2.1. Коэффициенты $X_k(\tau)$ определены при $\tau < 0$ и имеют особенности при $\tau \rightarrow -0$ в виде

$$X_k(\tau) = (-\tau)^{1/2-3k/2} \tilde{X}_k(\tau), \quad \tilde{X}_k(\tau) \in C^\infty[-1, 0], \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4}$$

Ввиду возникающих особенностей ряд (2.3) является асимптотическим при условии $\epsilon(-\tau)^{-3/2} \ll 1$.

Следствие 2.1. Ряд (2.3) представляет асимптотическое решение уравнения (1.1) в области, отделенной от нуля: $-\tau \gg \epsilon^{2/3}$.

3. НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП ПЕРЕСТРОЙКИ. СЛОЙ РИККАТИ

3.1. Формализм асимптотического решения

Малость главного члена и структура особенностей в асимптотическом решении (2.3) указывает подходящие масштабы переменных на следующем этапе. Вводится промежуточная переменная $\theta = \varepsilon^{-2/3}\tau = \varepsilon^{1/3}t$ – быстрая по отношению к τ , но медленная по отношению к исходному времени t . В искомом решении выделяется малый множитель $x(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}Y(\theta; \varepsilon)$, и исходное уравнение (1.1) переписывается для функции Y :

$$\varepsilon^{1/3} \frac{d^2 Y}{d\theta^2} + \beta \frac{dY}{d\theta} = (Y^2 + \theta)(1 - \varepsilon^{1/3}Y). \quad (3.1)$$

Асимптотическое решение строится в виде ряда по дробным степеням

$$Y(\theta; \varepsilon) = Y_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} Y_k(\theta). \quad (3.2)$$

Для главного члена асимптотики получается упомянутое выше уравнение Риккати (1.2). Поправки определяются из линеаризованных уравнений

$$\beta \frac{dY_k}{d\theta} - 2Y_0 Y_k = F_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Правые части выписываются по рекуррентным формулам через предыдущие приближения. Например, $F_1 = -(Y_0^2 + \theta)Y_0 - Y_0''$.

Дифференциальные уравнения для коэффициентов $Y_k(\theta)$ следует дополнить условиями при $\theta \rightarrow -\infty$ из соображений согласования с построенным решением (2.3). Для главного члена асимптотического решения условия согласования выглядят так:

$$Y_0(\theta) = -\sqrt{-\theta} - \frac{\beta}{4}(-\theta)^{-1} + \mathcal{O}((-\theta)^{-5/2}), \quad \theta \rightarrow -\infty.$$

Правые части в таких формулах получаются обычным для метода согласования способом [15]. В асимптотический ряд (2.3) подставляется разложение коэффициентов $X_k(\tau)$ при $\tau \rightarrow -0$, делается замена переменной $\tau = \varepsilon^{2/3}\theta$ и собираются выражения при одинаковых степенях ε . Эти выражения представляют асимптотику при $\theta \rightarrow -\infty$ для коэффициентов нового решения (3.2). Такие соотношения можно выписывать с разной степенью точности в зависимости от длины вычисленного отрезка ряда (2.3).

В рассматриваемой задаче при согласовании достаточно требования ограниченности степени роста: функции $Y_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots$, могут иметь рост при $\theta \rightarrow -\infty$ не быстрее степенного. При таких условиях коэффициенты $Y_k(\theta)$ определяются однозначно. Все другие решения уравнений (3.3) экспоненциально растут при $\theta \rightarrow -\infty$ и поэтому не могут быть согласованы с (2.3). Единственность обеспечивает автоматическое согласование двух асимптотических решений, как это обычно бывает в методе согласования [15].

При исследовании коэффициентов $Y_k(\theta)$ ключевую роль играют свойства решения уравнения Риккати [21]. В рассматриваемом частном случае эти свойства легко устанавливаются.

3.2. Свойства решения Риккати

Лемма 3.1. Для уравнения Риккати (1.2) с условием $Y_0(\theta) = -\sqrt{-\theta} + \mathcal{O}(1)$, $\theta \rightarrow -\infty$ существует единственное решение. Оно имеет асимптотическое разложение

$$Y_0(\theta) = -\sqrt{-\theta} - \frac{\beta}{4}(-\theta)^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-\theta)^{1/2-3n/2} y_n, \quad \theta \rightarrow -\infty; \quad y_n = \text{const.}$$

Доказательство. Если искать решение в виде $Y_0 = -\sqrt{-\theta} + y(\theta)$, то для остатка $y(\theta)$ получается уравнение

$$\beta \frac{dy}{d\theta} + 2\sqrt{-\theta}y = y^2 - \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \equiv f(y, \theta).$$

Соответствующее линейное однородное уравнение имеет решение

$$Y_0(\theta) = C \exp\left(\frac{4}{3\beta}(-\theta)^{3/2}\right) \quad \forall C = \text{const},$$

которое экспоненциально растет при $\theta \rightarrow -\infty$. Поэтому в классе ограниченных гладких функций дифференциальное уравнение эквивалентно интегральному

$$y(\theta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{4}{3\beta}(-\theta)^{3/2}\right) \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{4}{3\beta}(-\zeta)^{3/2}\right) f(y(\zeta), \zeta) d\zeta.$$

Для интеграла при достаточно больших значениях $-\theta \geq -\Theta > 1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{4}{3\beta}(-\zeta)^{3/2}\right) f(y(\zeta), \zeta) d\zeta \right| &\leq \sup_{\zeta < \theta} |(-\zeta)^{-1/2} f(y(\zeta), \zeta)| \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{4}{3\beta}(-\zeta)^{3/2}\right) (-\zeta)^{1/2} d\zeta \leq \\ &\leq \frac{\beta}{2\sqrt{-\Theta}} \sup_{\zeta < \theta} |f(y(\zeta), \zeta)| \exp\left(-\frac{4}{3\beta}(-\theta)^{3/2}\right). \end{aligned}$$

В таком случае для решения интегрального уравнения получается априорная оценка в норме пространства $C(-\infty, \Theta]$ (с равномерной метрикой)

$$\|y(\theta)\| < \frac{1}{2} \|f(y(\theta), \theta)\| < \frac{1}{2\sqrt{-\Theta}} (\|y(\theta)\|^2 + 1/\sqrt{-\Theta}) < \frac{1}{2} (\|y(\theta)\|^2 + 1).$$

Оценка обеспечивает сжимаемость интегрального оператора в шаре $\|y(\theta)\| < 1$. Следовательно, интегральное уравнение имеет единственное решение при всех достаточно больших значениях $-\theta$.

Коэффициенты асимптотики y_n вычисляются по рекуррентным формулам, которые получаются при подстановке ряда в уравнение и приравнивания выражений при одинаковых степенях переменной $-\theta$. Обоснование асимптотики следует из общих результатов [23], [24]. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Решение уравнения Риккати, выделенное условием согласования, является гладким на некотором интервале: $Y_0(\theta) \in C^\infty(-\infty, a)$, $a = \text{const} > 0$, на границе которого в точке $\theta = a$ имеет полюс первого порядка.*

Доказательство. Первые члены построенной асимптотики имеют вид

$$Y_0(\theta) = -\sqrt{-\theta} - \frac{1}{4\beta}(-\theta)^{-1} + \mathcal{O}((- \theta)^{-5/2}), \quad \theta \rightarrow -\infty. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что в окрестности бесконечности $\theta < \Theta < 0$ при достаточно большом $-\Theta > 1$ график решения находится под параболой: $Y_0(\theta) < -\sqrt{-\theta}$. Из уравнения (1.2) следует, что в этой области производная $Y_0'(\theta)$ положительна. Поэтому при продолжении решения его график монотонно растет. Однако график не может пересечь параболу снизу (с ненулевым углом наклона), поскольку в силу уравнения производная $Y_0'(\theta)$ должна была бы обратиться в нуль на параболе. Следовательно, решение продолжается направо вплоть до точки $\theta = 0$, и $Y_0(0) < 0$. Более того, решение дифференциального уравнения продолжается дальше вправо при $\theta > 0$ на некоторый промежуток. С другой стороны, общее решение уравнения Риккати характеризуется подвижным полюсом первого порядка. Поскольку рассматриваемое решение $Y_0(\theta)$ продолжимо вправо от $\theta = 0$, то его полюс будет на правой полуоси: $a > 0$. Лемма доказана.

Для решения, фиксированного асимптотикой на $-\infty$, положение полюса не вычисляется аналитически. Характер зависимости от β легко устанавливается: $a = a_0\beta^{2/3}$. Здесь a_0 — полюс реше-

ния (с той же асимптотикой на бесконечности) для уравнения Риккати при $\beta = 1$. Такое уравнение возникает после преобразования $Y \Rightarrow \beta^{1/3} Y$, $\theta \Rightarrow \beta^{2/3} \theta$. Из численных экспериментов [22] можно установить приближенное значение $a_0 \approx 2$.

3.3. Свойства поправок

Поправки в асимптотическом решении (3.2) определяются из линейных уравнений (3.3) и выписываются в явном виде через интегралы

$$Y_k(\theta) = \frac{1}{\beta} \mathcal{Y}(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} \frac{F_k(\zeta)}{\mathcal{Y}(\zeta)} d\zeta. \quad (3.5)$$

Здесь используется решение соответствующего однородного уравнения в форме

$$\mathcal{Y}(\theta) = \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_0^{\theta} Y_0(\zeta) d\zeta\right).$$

Имея в виду асимптотику (3.4), можно заключить, что эта функция растет экспоненциально на бесконечности

$$\mathcal{Y}(\theta) = \exp\left(\frac{4}{3\beta} (-\theta)^{3/2}\right) [(-\theta)^{1/2\beta^2} + \mathcal{O}(1)], \quad \theta \rightarrow -\infty.$$

Поэтому решение неоднородного уравнения определяется однозначно в классе функций с ростом медленнее экспоненциального. Нетрудно видеть, что в выражении (3.5) экспоненциального роста нет и асимптотика легко вычисляется

Лемма 3.3. *Решения линеаризованных уравнений, представленные в (3.5), имеют асимптотику со степенным ростом на бесконечности*

$$Y_k(\theta) = (-\theta)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-\theta)^{-3n/2} y_{k,n}, \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_{k,n} = \text{const.}$$

Доказательство. Решение (3.5) представляется в форме

$$Y_k(\theta) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_{\zeta}^{\theta} Y_0(\xi) d\xi\right) F_k(\zeta) d\zeta.$$

Интеграл берется по частям несколько раз:

$$\begin{aligned} Y_k(\theta) &= \frac{1}{2} \frac{F_k(\theta)}{Y_0(\theta)} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_{\zeta}^{\theta} Y_0(\xi) d\xi\right) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{F_k(\zeta)}{Y_0(\zeta)}\right) d\zeta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\beta}{2} \frac{1}{Y_0(\theta)} \frac{d}{d\zeta} + 1 \right] \frac{F_k(\theta)}{Y_0(\theta)} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_{\zeta}^{\theta} Y_0(\xi) d\xi\right) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\beta}{2} \frac{1}{Y_0(\theta)} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{F_k(\zeta)}{Y_0(\zeta)}\right)\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Операцию взятия интеграла по частям можно повторять многократно. При этом оставшийся интеграл в асимптотике на бесконечности может быть сделан меньше любой степени $(-\theta)^{-N}$, поскольку экспонента под интегралом оценивается единицей. В итоге приходим к асимптотическому ряду в форме

$$Y_k(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{2} \frac{1}{Y_0(\theta)} \frac{d}{d\zeta}\right)^n \frac{F_k(\theta)}{Y_0(\theta)}, \quad \theta \rightarrow -\infty.$$

Асимптотика в форме степенного ряда получается с учетом структуры функций $F_k(\theta)$. Для первой поправки с $F_1 = -Y_0(Y_0^2 + \theta) - Y_0''$ получаем

$$F_1(\theta) = (-\theta)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\theta)^{-3n/2} f_{1,n}, \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad f_{1,n} = \text{const.}$$

Структура асимптотики Y_k фактически определяется главным членом отношения F_k/Y_0 , в данном случае $F_1(\zeta)/Y_0(\zeta) = \mathcal{O}(-\theta)$. В общем случае для $Y_k(\theta)$, $k > 1$, доказательство по индукции. Лемма доказана.

Рост коэффициентов $Y_k(\theta)$ накладывает ограничения на область пригодности решения в форме (3.2).

Следствие 3.1. В области $\theta \leq 0$ ряд (3.2) представляет асимптотическое решение уравнения (3.1) при $\varepsilon^{1/3}(-\theta) \ll 1$.

В области $\theta > 0$ ограничения возникают из-за наличия полюса.

3.4. Асимптотика вблизи полюса

Для решения Риккати асимптотика вблизи полюса легко строится в виде

$$Y_0(\theta) = \beta(a - \theta)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(a - \theta)^n, \quad \theta \rightarrow a - 0.$$

Коэффициенты a_n , $n = 1, 2, \dots$, вычисляются по рекуррентным формулам; в частности, $a_1 = -a/(3\beta)$, $a_2 = 1/(4\beta)$. Можно выписать представление с выделением особенности в виде $Y_0(\theta) = \beta(a - \theta)^{-1}[1 + \tilde{Y}_0(\theta)]$ с гладкой функцией $\tilde{Y}_0(\theta) = \mathcal{O}((a - \theta)^2)$, $\theta \rightarrow a - 0$.

Для линеаризованного однородного уравнения общее решение содержит постоянный множитель

$$\mathcal{Y}(\theta) = C \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_0^\theta Y_0(\zeta) d\zeta\right), \quad C = \text{const.}$$

При подходящем выборе множителя

$$C = a^2 \exp\left(\frac{2}{\beta} \int_0^a [Y_0(\zeta) - \beta(a - \theta)^{-1}] d\zeta\right)^{-1}$$

асимптотика вблизи полюса выписывается в наиболее простой форме: $Y(\theta) = (a - \theta)^{-2}[1 + \tilde{\mathcal{Y}}(\theta)]$ с гладкой функцией $\tilde{\mathcal{Y}}(\theta) = \mathcal{O}((a - \theta)^2)$, $\theta \rightarrow a - 0$.

Поправки $Y_k(\theta)$ в асимптотическом решении определяются из линеаризованных уравнений (3.3). Эти функции при $\theta \rightarrow a - 0$ имеют степенные и логарифмические особенности, порядок которых растет с ростом номера k . Логарифм неизбежно возникает в первой поправке:

Лемма 3.4. Вблизи полюса первая поправка имеет асимптотику, которая описывается соотношением

$$Y_1(\theta) = (a - \theta)^{-2} \ln(a - \theta)[(\beta^2 + 2) + \tilde{Y}_{1,1}(\theta)] + (a - \theta)^{-2} \tilde{Y}_{1,0}(\theta)$$

с гладкими функциями $\tilde{Y}_{1,1}(\theta) = \mathcal{O}((a - \theta)^2)$, $\tilde{Y}_{1,0}(\theta) = \mathcal{O}(1)$, $\theta \rightarrow a - 0$.

Доказательство. Структуру асимптотики вблизи полюса можно извлечь из интегрального представления.

$$Y_k(\theta) = \frac{1}{\beta} \mathcal{Y}(\theta) \int_{-\infty}^\theta (Y(\zeta))^{-1} F_k(\zeta) d\zeta.$$

На первом шаге $k = 1$ правая часть $F_1 = -Y_0(Y_0^2 + \theta) - Y_0''$ приводится к виду $F_1 = -\beta Y_0 Y_0' - Y_0''$. Эта функция имеет полюс третьего порядка

$$F_1(\theta) = (a - \theta)^{-3} [f_1 + \tilde{F}_1(\theta)], \quad \tilde{F}_1(\theta) \in C^\infty(-\infty, a]$$

с коэффициентом $f_1 = -(\beta^2 + 2)\beta \neq 0$ и с гладкой функцией $\tilde{F}_1(\theta) = \mathcal{O}(a - \theta)$. Наличие в асимптотике слагаемого с $(a - \theta)^{-3}$ приводит к появлению логарифма в первой поправке.

Выражение для первой поправки можно представить в виде

$$Y_1(\theta) = \frac{1}{\beta} \mathcal{Y}(\theta) \left(\int_{-\infty}^0 (\mathcal{Y}(\zeta))^{-1} F_1(\zeta) d\zeta + \int_0^{\theta} (a - \zeta)^{-1} [1 + \tilde{\mathcal{Y}}(\zeta)]^{-1} [f_1 + \tilde{F}_1(\zeta)] d\zeta \right) = \\ = \frac{1}{\beta} \mathcal{Y}(\theta) \left(\text{const} + \int_0^{\theta} (a - \zeta)^{-1} [f_1 + \mathcal{O}(a - \zeta)] d\zeta \right) = \mathcal{Y}(\theta) [(\beta^2 + 2) \ln(a - \theta) + \mathcal{O}(1)].$$

Лемма доказана.

Особенности нарастают с ростом номера k .

Лемма 3.5. Решения линеаризованных уравнений (3.3) представляются в форме

$$Y_k(\theta) = (a - \theta)^{-k-1} P_k(\ln(a - \theta); \theta),$$

где P_k – полиномы от логарифмов степени k , с коэффициентами, гладкими по θ .

Доказательство по индукции.

Из-за роста порядка особенностей вблизи полюса возникают ограничения на область пригодности решения в форме ряда (3.2).

Следствие 3.2. В области $\theta \geq 0$ ряд (3.2) представляет асимптотическое решение уравнения (3.1) при условии $\varepsilon^{1/3} (a - \theta)^{-1} |\ln(a - \theta)| \ll 1$.

4. ЭТАП БЫСТРОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ. СЛОЙ КПП

4.1. Формализм

Структура особенностей построенного асимптотического решения вблизи полюса указывает масштабы, которые оказываются подходящими для построения асимптотического решения на следующем этапе. Быстрая переменная вводится как растяжение в окрестности полюса по формуле $\eta = (\theta - a)\varepsilon^{-1/3} + s(\varepsilon)$. Она соответствует исходному масштабу t со сдвигом по времени $\eta = t - a\varepsilon^{-1/3} + s(\varepsilon)$. Дополнительный сдвиг $s(\varepsilon)$ подлежит определению в ходе асимптотических конструкций. В наивном подходе его следовало бы взять равным нулю. Однако при построении асимптотики выясняется, что сдвиг существенно зависит от малого параметра $s(\varepsilon) \approx \ln \varepsilon$, и в более простой форме асимптотического решения не существует.

Для решения берется представление $x(t; \varepsilon) = Z(\eta; \varepsilon)$. Исходное уравнение (1.1) переписывается для новой искомой функции

$$\frac{d^2 Z}{d\eta^2} + \beta \frac{dZ}{d\eta} = [Z^2 + \varepsilon^{2/3} a + \varepsilon(\eta - s(\varepsilon))](1 - Z). \quad (4.1)$$

Асимптотическое решение строится в виде ряда по дробным степеням:

$$Z(\eta; \varepsilon) = Z_0(\eta) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k/3} Z_k(\eta). \quad (4.2)$$

Главный член асимптотики определяется из нелинейного уравнения КПП (1.3). Для последующих поправок получаются линеаризованные уравнения

$$\frac{d^2 Z_k}{d\eta^2} + \beta \frac{dZ_k}{d\eta} + (3Z_0^2 - 2Z_0)Z_k = G_k(\eta). \quad (4.3)$$

Уравнения получаются обычным способом путем приравнивания выражений при одинаковых степенях $\varepsilon^{k/3}$. Правые части линеаризованных уравнений выписываются через предыдущие приближения, например,

$$G_2 = a(1 - Z_0), \quad G_3 = (\eta - s)(1 - Z_0). \quad (4.4)$$

Уравнения рассматриваются на всей оси $-\infty < \eta < \infty$.

При переходе к рекуррентной системе (4.3) игнорируется зависимость от ε в сдвиге s , который явно присутствует в исходном уравнении (4.1). Поэтому правые части G_k и получаемые при-

ближения в старших поправках $Z_k(\eta; s)$, $k \geq 3$, будут иметь дополнительную зависимость от ϵ посредством $s = s(\epsilon)$. Похожая идея используется в методе усреднения, когда асимптотики выпиваются в переменных амплитуда–угол [25]. Такой подход позволяет избежать излишней громоздкости в конструкции асимптотического решения. После нахождения (см. ниже) асимптотики для $s(\epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$, ее можно использовать в анзатце (4.2). Это приводит к большей детализации асимптотики, в частности, к появлению степеней логарифмов наряду с дробными степенями параметра ϵ .

4.2. Условия согласования

Дополнительные условия на искомые функции $Z_k(\eta)$ ставятся в асимптотике на $-\infty$ из соображения согласования с решением (3.2) на подходе к полюсу. С этой целью в ряде (3.2) коэффициенты $Y_k(\theta)$ заменяются асимптотикой при $\theta \rightarrow a - 0$ и делается замена переменной $(\theta - a) = \epsilon^{1/3}(\eta - s)$. Затем собираются выражения при одинаковых степенях параметра ϵ . При каждой степени получаются отрезки рядов, асимптотических $\eta \rightarrow -\infty$, длина которых зависит от длины использованного отрезка ряда (3.2). Полученные выражения берутся в качестве асимптотических условий для $Z_k(\eta)$, [15]. Если при таком переписывании использовать только главный член $Y_0(\theta)$, то получается условие $Z_0(\eta) = -\beta(\eta - s)^{-1} + \mathcal{O}((\eta - s)^{-2} \ln(s - \eta))$. Если использовать первые два члена асимптотического решения (3.2), то условие согласования уточняется

$$Z_0(\eta) = -\frac{\beta}{(\eta - s)} + \frac{\beta^2 + 2}{(\eta - s)^2} [\ln \epsilon^{1/3} + \ln(s - \eta)] + \mathcal{O}((\eta - s)^{-3} \ln(s - \eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty. \tag{4.5}$$

На этом этапе обнаруживается слагаемое с логарифмом, и создается впечатление, что $\ln \epsilon$ определяет порядок главного члена асимптотического решения $Z(\eta; \epsilon)$. Более того, если использовать первые три члена асимптотического решения (3.2), то появляется $\ln^2 \epsilon / (\eta - s)^3$. На этом пути обнаруживаются все старшие степени логарифмов. Наличие логарифмов в главном члене асимптотики указывает на невозможность согласования построенного ранее решения с анзатцем (4.2) в наивном подходе с нулевым сдвигом фазы $s = 0$. Подобная ситуация возникала ранее в разных задачах с малым параметром, и подходы к разрешению этой проблемы известны (см. [11], [15], [26]–[28]). Зависимость от логарифма $\ln \epsilon$ должна быть включена в главный член асимптотики таким образом, чтобы обеспечить условие согласования. В рассматриваемой задаче проблема логарифмов решается сдвигом фазы. Подходящий выбор функции $s(\epsilon)$ обеспечивает выполнение условий согласования как для главного члена, так и для поправок.

Правая часть в соотношении (4.5) представляет собой выражение, асимптотическое при $|\eta + s| \rightarrow \infty$. Его можно переразложить, используя для каждого слагаемого тейлоровские разложения при $s/|\eta| \rightarrow 0$. Например,

$$\frac{1}{\eta - s} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{1 - s/\eta} = \frac{1}{\eta} + \frac{s}{\eta^2} + \dots$$

$$\ln(-\eta + s) = \ln(-\eta) + \ln(1 - s/\eta) = \ln(-\eta) - \frac{s}{\eta} + \dots$$

В результате условие согласования приобретает форму:

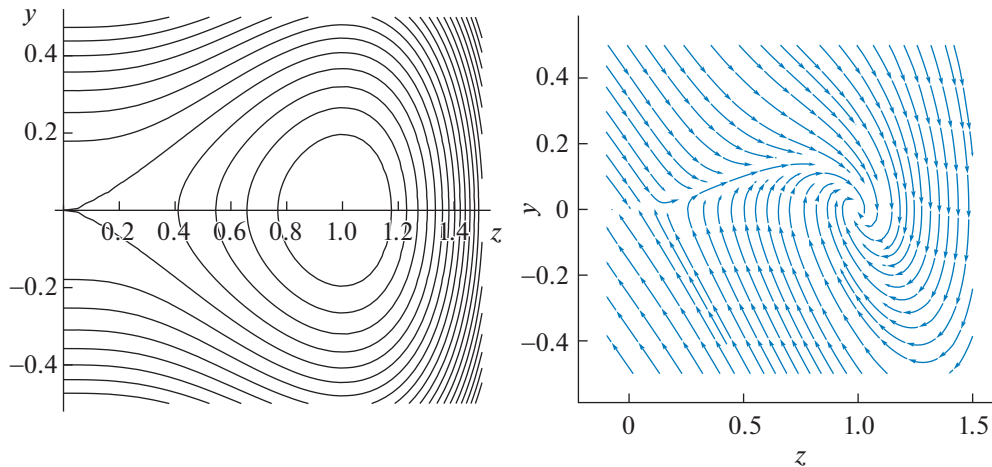
$$Z_0(\eta) = -\frac{\beta}{\eta} - \frac{\beta s}{\eta^2} + \frac{\beta^2 + 2}{\eta^2} [\ln \epsilon^{1/3} + \ln(-\eta)] + \mathcal{O}(\eta^{-3} \ln(-\eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Из этого соотношения видно, что при выборе сдвига

$$s(\epsilon) = \frac{\beta^2 + 2}{3\beta} \ln \epsilon + o(1), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

условие согласования не содержит $\ln \epsilon$:

$$Z_0(\eta) = -\frac{\beta}{\eta} + \frac{\beta^2 + 2}{\eta^2} \ln(-\eta) + \mathcal{O}(\eta^{-3} \ln(-\eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty. \tag{4.6}$$



Фиг. 2. Линии уровня функции Ляпунова $V(z, y)$. Векторное поле системы КПП при $\beta = 1$.

При таком выборе автоматически исключаются старшие степени логарифмов в условиях на $Z_0(\eta)$, которые появляются при учете старших поправок Y_k .

Подобный анализ условий согласования для старших поправок Z_k приводит к уточнению сдвига s в виде отрезка асимптотического ряда

$$s(\epsilon) = \frac{\beta^2 + 2}{\beta} \ln \epsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{n/3} p_n(\ln \epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Отсюда, в частности, вытекает формула (1.4). Коэффициенты $p_k(\ln \epsilon)$ выбираются из требования отсутствия слагаемого с η^{-2} в правых частях условий согласования для Z_k . Эти коэффициенты представляют собой полиномы от логарифма и вычисляются через коэффициенты асимптотики функций $Y_n(\theta)$, $n \leq k$ вблизи полюса. Мы не останавливаемся здесь на деталях вычислений, которые довольно громоздки и обычно выполняются с составлением таблиц [15].

4.3. Уравнение КПП

4.3.1. Сепаратрисная траектория. Для уравнений типа КПП (1.3) обычно рассматриваются задачи, похожие на краевые, с заданием условий на двух бесконечностях при $\eta \rightarrow \mp\infty$. При этом основной целью является поиск констант β , при которых такая задача разрешима [10], [29], [30]. Здесь константа β задана, и ставятся граничные условия, больше похожие на задачу Коши. Требуется найти решение, которое при $\eta \rightarrow -\infty$ удовлетворяет условию согласования (4.6); его поведение при $\eta \rightarrow +\infty$ предстоит выяснить.

Уравнение (1.3) можно переписать в виде системы (2.2) уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{d\eta} = y, \quad \frac{dy}{d\eta} = -\beta y + z^2(1 - z). \quad (4.8)$$

Система имеет две неподвижные точки (равновесия). Точка $z = 0, y = 0$ типа узел-седло имеет одну выходящую траекторию [1, с. 88]. Точка $z = 1, y = 0$ — устойчивый узел, либо фокус, фиг. 2. Можно ожидать, что траектория, выходящая из $(0, 0)$ входит в $(1, 0)$. Это свойство доказывает

Лемма 4.1. *Существует единственная траектория, выходящая из точки равновесия $(0, 0)$; она входит в точку равновесия $(1, 0)$ при $\eta \rightarrow \infty$.*

Доказательство основано на анализе фазового портрета системы (4.8). Нас интересует асимптотика фазовой траектории, которая выходит из точки $(0, 0)$. Дифференциальное уравнение для фазовых кривых в декартовых координатах (z, y) получается из (4.8):

$$\frac{dy}{dz} = -\beta + \frac{z^2(1-z)}{y}.$$

Для этого уравнения точка $(0, 0)$ является особой. Для интересующей нас траектории асимптотика вблизи этой точки строится в виде степенного ряда и в главных членах имеет вид

$$y = \frac{1}{\beta} z^2 - \frac{\beta+2}{\beta^3} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \quad z \rightarrow 0. \tag{4.9}$$

Обоснование такой асимптотики следует из результатов [23], [24]. При $z > 0$ эта кривая соответствует выходящий сепаратрисе в седловом секторе. (Следуя [1], можно выписать асимптотику входящих сепаратрис $y = -\beta z + \mathcal{O}(z^2)$, которые ограничивают седловой сектор.) Покажем, что соответствующая траектория входит в особую точку $(1, 0)$.

Введем функцию двух переменных

$$V(z, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{12}.$$

В полуплоскости $z > 0$ эта функция имеет единственный экстремум – минимум в точке $(1, 0)$, равный нулю. Ее производная в силу системы не положительна. (Таким образом, $V(z, y)$ будет функцией Ляпунова в окрестности точки $(1, 0)$.)

$$\frac{dV}{d\eta} = -\beta y^2 \leq 0 \quad \forall y. \tag{4.10}$$

Поскольку эта производная отрицательна в каждой из полуплоскостей $\{y > 0\}$ и $\{y < 0\}$, то траектории системы пересекают линии уровня $V(z, y) = C = \text{const}$ и входят “внутрь” области $V(z, y) < C$, см. фиг. 2. Линия уровня $V(z, y) = 1/12$, проходящая через точку $(0, 0)$, описывается уравнением

$$y^2 - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^4 = 0. \tag{4.11}$$

Эта кривая при $z \geq 0$ представляет собой замкнутую петлю с острым “клювом” в точке $(0, 0)$. Она пересекает ось z еще в одной точке $z = 4/3$ и поэтому охватывает особую точку $(1, 0)$. Асимптотика такой петли вблизи особой точки $(0, 0)$ имеет вид

$$\hat{y}(z) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} z^{3/2} [1 + \mathcal{O}(z)], \quad z \rightarrow 0.$$

Сравнение этой асимптотики с асимптотикой выходящей сепаратрисы (4.9) показывает, что вблизи особой точки $(0, 0)$ сепаратриса содержится внутри петли (4.11).

Из уравнений (4.8) видно, что любая траектория системы может пересекать ось $y = 0$, но никогда не совпадает ни с каким ее отрезком. Тогда из (4.10) следует, что производная $dV/d\eta$ отрицательна на траектории за исключением отдельных моментов. Поэтому функция $V(z, y)$, взятая вдоль траектории, убывает. В таком случае рассматриваемая сепаратрисная траектория при $\eta \rightarrow \infty$ пересекает линии уровня $V(z, y) = \text{const} < 1/12$ с заходом “внутрь”. Отсюда, в частности, вытекает, что замкнутых траекторий (предельных циклов) внутри петли (4.11) быть не может. Следовательно, траектория стремится к неподвижной точке $(1, 0)$. Из анализа векторного поля легко усмотреть, что траектория стремится к $(1, 0)$ либо без пересечения оси z (в случае узла), либо пересекая ось бесконечное число раз (в случае фокуса), см. фиг. 2, справа. Лемма доказана.

4.3.2. Асимптотика решения уравнения КПП. Для автономной системы фазовая траектория определяет решение с точностью до произвольной константы сдвига по независимой переменной η . Этот сдвиг находится из краевого условия на $-\infty$. Возможность удовлетворения такому условию появляется после выявления структуры асимптотики общего решения, которое соответствует сепаратрисной траектории. Ниже приводится точное утверждение на этот счет.

Лемма 4.2. Для уравнения КПП (1.3) существует единственное решение, которое удовлетворяет условию согласования. Оно имеет асимптотическое разложение

$$Z_0(\eta) = -\beta \frac{1}{\eta} - \frac{\beta^2 + 2}{\eta^2} \ln(-\eta) + \sum_{n=3}^{\infty} \eta^{-n} P_{n-1}(\ln(-\eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (4.12)$$

Коэффициенты ряда $P_{n-1}(\xi)$ представляют собой полиномы степени не выше $n - 1$.

Доказательство состоит в вычислении коэффициентов из соотношений, которые получаются при подстановке ряда в уравнение, и приравнивании выражений при одинаковых степенях переменной η и логарифмов $\ln(-\eta)$. На первом шаге для полинома $P_1 = b_{1,0} + b_{1,1} \ln(-\eta)$ получается $b_{1,1} = -(\beta^2 + 2)$; коэффициент $b_{1,0}$ (при степени η^{-2} без логарифма) остается произвольным; он соответствует произволу в сдвиге переменной η и здесь полагается равным нулю. Это требование $b_{1,0} = 0$ фиксирует единственное решение. На следующем шаге в полиноме

$$P_2(\ln(-\eta)) = b_{2,0} + b_{2,1} \ln(-\eta) + b_{2,2} \ln^2(-\eta)$$

коэффициенты вычисляются через предыдущие

$$b_{2,2} = -b_{1,1}^2 / (3\beta), \quad b_{2,1} = (\beta + 2/\beta)b_{1,1} - 2b_{2,2}/3, \quad b_{2,0} = 5b_{1,1}/\beta - b_{2,1}.$$

На общем шаге доказательство по индукции.

Обоснование асимптотики (с доказательством существования точного решения) следует из общих результатов [23], [24]. Лемма доказана.

4.4. Асимптотика поправок

Для описания свойств поправок, которые определяются из системы задач (4.3), удобно использовать классы гладких функций \mathcal{M}_k , $k \in \mathbb{Z}$. Такие функции определены на всей оси $\eta \in \mathbb{R}$ и при $\eta \rightarrow -\infty$ разлагаются в асимптотические ряды

$$z(\eta) = \sum_{n=-k}^{\infty} \eta^{-n} q_n(\ln(-\eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (4.13)$$

Здесь $q_n(\ln(-\eta))$ – полиномы от логарифмов. В каждом из этих классов имеется подкласс функций $z(\eta) \in \mathcal{M}_k^0$ со специфической асимптотикой, которая не содержит слагаемых вида: $\text{const} \cdot \eta^{-2}$, т.е. функции со свойством $q_2(0) = 0$.

Исследованное выше однопараметрическое семейство решений $Z_0(\eta + \zeta) \forall \zeta = \text{const}$ принадлежит классу \mathcal{M}_{-1} . Среди них лишь одно решение удовлетворяет условию согласования; оно характеризуется принадлежностью более узкому классу $Z_0(\eta) \in \mathcal{M}_{-1}^0$. Аналогично обстоит дело с поправками $Z_k(\eta)$ с той разницей, что в асимптотике появляются растущие слагаемые. Это отражается в использовании классов $\in \mathcal{M}_k$ с неотрицательным индексом $k \geq 0$.

Поправки определяются из линеаризованного уравнения с соответствующими правыми частями. Рассмотрим стандартное уравнение такого вида:

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \beta \frac{dz}{d\eta} + (3Z_0^2 - 2Z_0)z = g(\eta). \quad (4.14)$$

Для однородного уравнения нетрудно выписать фундаментальную систему двух решений. Одно из них можно взять в виде производной решения нелинейного уравнения, $\mathcal{X}_1(\eta) = Z_0'(\eta)$. Его асимптотика получается дифференцированием исходного соотношения (4.12):

$$\mathcal{X}_1(\eta) = \frac{\beta}{\eta^2} + \frac{2(\beta^2 + 2)}{\eta^3} \ln(-\eta) + \sum_{n=4}^{\infty} \eta^{-n} Q_{n-2}(\ln(-\eta)), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Здесь $Q_{n-2}(\ln(-\eta))$ – полиномы от логарифмов степени $(n - 2)$. Как видим, эта функция стремится к нулю при $\eta \rightarrow -\infty$, так что $\mathcal{L}_1(\eta) \in \mathcal{M}_{-2}$. Из асимптотики ясно, что в окрестности $-\infty$ эта функция не имеет нулей. Обратная величина $1/\mathcal{L}_1(\eta) \in \mathcal{M}_2$ будет умеренно растущей

$$\mathcal{L}_1^{-1}(\eta) = \frac{\eta^2}{\beta} [1 + \mathcal{O}(\eta^{-1})], \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Второе решение выписывается через интеграл

$$\mathcal{L}_2(\eta) = \mathcal{L}_1(\eta) \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-\beta\zeta) \mathcal{L}_1^{-2}(\zeta) d\zeta.$$

В таком представлении нижний предел интеграла $\eta_0 = \text{const} > -\infty$ следует выбирать меньше первого нуля функции $\mathcal{L}_1(\eta)$. Легко понять, что функция $\mathcal{L}_2(\eta)$ экспоненциально растет при $\eta \rightarrow -\infty$:

Лемма 4.3. *Имеет место асимптотика*

$$\mathcal{L}_2(\eta) = -\frac{\eta^2}{\beta} \exp(-\beta\eta) [1 + \mathcal{O}(\eta^{-1})], \quad \eta \rightarrow -\infty,$$

так что $\exp(\beta\eta)\mathcal{L}_2(\eta) \in \mathcal{M}_2$.

Доказательство путем двукратного интегрирования по частям и подстановки дифференцируемой асимптотики для $\mathcal{L}_1(\eta)$:

$$\mathcal{L}_2(\eta) = -\frac{1}{\beta} \mathcal{L}_1(\eta) \left[\exp(-\beta\zeta) (\mathcal{L}_1^{-2}(\zeta) + \frac{1}{\beta} (\mathcal{L}_1^{-2}(\zeta))') \right]_{\zeta=\eta_0}^{\zeta=\eta} + \mathcal{L}_1(\eta) \frac{1}{\beta^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \exp(-\beta\zeta) (\mathcal{L}_1^{-2}(\zeta))'' d\zeta.$$

Из первого слагаемого в верхнем пределе выделяется главный член асимптотики. Слагаемые в нижнем пределе дают константы и в экспоненциальной асимптотике не учитываются. Интеграл оценивается через $\exp(-\beta\eta)\mathcal{O}(\eta^2)$. С учетом множителя $\mathcal{L}_1(\eta)$ это слагаемое имеет порядок остаточного члена. Такой же порядок имеют все внеинтегральные слагаемые. Лемма доказана.

Решение неоднородного уравнения также выписывается через интегралы. Оно определяется с точностью до решений однородного уравнения и может быть представлено в разной форме. Чтобы избежать экспоненциального роста, решение следует представить в виде

$$z(\eta) = \mathcal{L}_2(\eta) \int_{-\infty}^{\eta} \exp(\beta\zeta) \mathcal{L}_1(\zeta) g(\zeta) d\zeta - \mathcal{L}_1(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} \exp(\beta\zeta) \mathcal{L}_2(\zeta) g(\zeta) d\zeta + C \cdot \mathcal{L}_1(\eta) \quad \forall C = \text{const}. \quad (4.15)$$

Лемма 4.4. *Если правая часть $g(\eta) \in \mathcal{M}_{k-1}$, то существует единственное решение линеаризованного уравнения (4.14) $z(\eta) \in \mathcal{M}_k^0$.*

Доказательство. Асимптотика первого интеграла в (4.15) получается интегрированием по частям аналогично лемме 4.3. Для второго интеграла в (4.15) асимптотику можно получить почленным интегрированием ряда для функции $\exp(\beta\zeta)\mathcal{L}_2(\zeta)g(\zeta) \in \mathcal{M}_{k+1}$. При этом в каждом слагаемом степень η повышается на единицу. В нижнем пределе интегрирования получаются константы. После интегрирования достаточно большого числа членов ряда можно оценить интеграл от остатка. Он дает в асимптотике $\text{const} + \mathcal{O}(\eta^{-N})$. Учет перед интегралом множителя $\mathcal{L}_1(\eta)$ обеспечивает $z(\eta) \in \mathcal{M}_k$. В асимптотике этой функции можно занулить коэффициент при η^{-2} выбором константы C . Такая константа единственна. Тем самым получается единственное решение из класса \mathcal{M}_k^0 . Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Рекуррентная система уравнений (4.3) разрешима однозначно в классе функций $Z_k(\eta) \in \mathcal{M}_{k-1}^0$, $k = 2, 3, \dots$.*

Доказательство. На первом шаге $k = 2$ главный член асимптотики правой части (4.4) определяется константой a , так что $G_2(\eta) \in \mathcal{M}_0$. Поэтому решение $Z_2(\eta) \in \mathcal{M}_1^0$. На следующем шаге, как видно из (4.4), $G_3(\eta) \in \mathcal{M}_1$. Поэтому $Z_3(\eta) \in \mathcal{M}_2^0$. В общем случае доказательство строится по индукции.

Как видим, с каждым шагом коэффициенты ряда (4.2) при $\eta \rightarrow -\infty$ увеличивают степень роста на единицу. Это накладывает ограничение на область пригодности решения.

Следствие 4.1. В области $\eta \leq 0$ ряд (4.2) является асимптотическим решением уравнения (1.1) при $\varepsilon^{1/3}(-\eta) \ll 1$.

4.5. Асимптотика на выходе из переходного слоя

Решение уравнения КПП, фиксированное асимптотикой при $\eta \rightarrow -\infty$, продолжается на всю ось. Вопрос об асимптотике такого решения при $\eta \rightarrow +\infty$ решается довольно просто. Здесь надо учесть, что фазовая траектория, соответствующая этому решению, входит в неподвижную точку $(1, 0)$ типа узел, либо фокус. Матрица линеаризованной в этой точке системы имеет собственные значения (2.1). Максимальное значение реальной части этих чисел $\mu = \operatorname{Re}(-\beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 - 1}) < 0$. Эта величина характеризует скорость подхода траектории к равновесию:

$$Z_0(\eta) = 1 + \mathcal{O}(\exp(\mu\eta)), \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Такого типа асимптотики известны [30]. Их можно извлечь методом последовательных приближений для интегрального уравнения, которое получается после обращения линейной части системы.

Подобные экспоненциальные оценки имеют место для неоднородных линеаризованных на Z_0 уравнений. В этих оценках возможно появление множителей со степенным ростом, в частности, из-за неавтономного возмущения. Экспоненциальные оценки обеспечивают для ряда (4.2) асимптотическое совпадение с единицей при достаточно больших η .

Следствие 4.2. В области $\eta \geq 0$ ряд (4.2) является асимптотическим решением уравнения (1.1) всюду. При $\eta \geq \varepsilon^{-\delta} \forall \delta > 0$ этот ряд асимптотически совпадает с единицей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Объединяя полученные результаты, сформулированные в виде следствий в предыдущих разделах, получаем окончательное утверждение.

Теорема 2. Ряды (2.3), (3.2), (4.2), (4.7) с определенными выше коэффициентами представляют асимптотическое решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ для уравнения (1.1) в соответствующих областях:

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= X(\tau; \varepsilon) \quad \text{при} \quad 1 > -\tau \gg \varepsilon^{2/3}; \\ x(t; \varepsilon) &= \varepsilon^{1/3} Y(\theta; \varepsilon) \quad \text{при} \quad -\theta \ll \varepsilon^{-1/3}, \quad (a - \theta) / \ln(a - \theta) \gg \varepsilon^{1/3}; \\ x(t; \varepsilon) &= Z(\eta; \varepsilon) \quad \text{при} \quad -\eta \ll \varepsilon^{-1/3}. \end{aligned}$$

Практическое значение для приложений имеет описание главного члена асимптотики, приведенное в теореме 1.

Обоснование асимптотики можно выполнить способом, указанным в [18]; его детальное изложение выходит за рамки этой статьи.

Важным результатом данной работы является формула (1.4) для сдвига фазы S . Она указывает на затягивание потери устойчивости решения при бифуркации типа седло–узел. Момент срыва из равновесия $(0, 0)$ сдвигается от момента бифуркации $t = 0$ на величину S , которая зависит от коэффициента затухания β и скорости деформации параметров системы ε . Это свойство наглядно просматривается в результатах численных экспериментов, приведенных на фиг. 1. Похожие эффекты с задержкой срыва устойчивости известны в других системах с динамической бифуркацией [2], [16], [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
2. *Berglund N.* Dynamic bifurcations: hysteresis, scaling laws and feedback control // arXiv:chao-dyn/9912008v1 6 Dec 1999.
3. *Haberman R.* Nonlinear transition layers – the second Painleve transcendent // *Studies in Appl. Math.* 1977. V. 57. № 3. P. 247–270.
4. *Haberman R.* Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems // *SIAM J. Appl. Math.* V. 37. 1. P. 69–106.
5. *Maree G.J.M.* Slow periodic crossing of a Pitchfork bifurcation in an oscillating system // *Nonlinear Dynamics.* 1997. V. 12. P. 1–37.
6. *Diminnie D.C., Haberman R.* Slow passage through a Saddle-Center bifurcation // *J. Nonlinear Sci.* 2000. V. 10. P. 197–221.
7. *Kiselev O.M.* Hard loss of stability in Painleve-2 equation // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* 2001. V. 8. № 1. P. 1–31.
8. *Diminnie D.C., Haberman R.* Slow passage through the nonhyperbolic homoclinic orbit of the Saddle-Center Hamiltonian bifurcation // *Studies Appl. Math.* 2002. V. 108. P. 65–75.
9. *Diminnie D.C., Haberman R.* Slow passage through homoclinic orbits for the unfolding of a Saddle-Center bifurcation and the change in the adiabatic invariant // *Physica D.* 2002. V. 162. P. 34–52.
10. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме, Бюллетень МГУ. Матем., мех. 1937. Т. 1:6. С. 1–26.
11. *Сулейманов Б.И.* Некоторые типичные особенности движения с торможением в случае плавной неоднородности // *Докл. РАН.* 2006. Т. 407. № 4. С. 460–462.
12. *Борич М.А., Буньков Ю.М., Куркин М.И., Танкеев А.П.* Ядерная магнитная релаксация, наведенная релаксацией электронных спинов // *Письма в ЖЭТФ.* 2017. Т. 105. Вып. 1. С. 23–27.
13. *Abdurakhimov L.V., Borich M.A., Bunkov Yu.M., Gazizulin R.R., Konstantinov D., Kurkin M.I., Tankeyev A.P.* Nonlinear NMR and magnon BEC in antiferromagnetic materials with coupled electron and nuclear spin precession // *Physical Review B.* 2018. V. 97. 024425.
14. *Kalyakin L.A.* Analysis of a mathematical model for nuclear spins in an antiferromagnet // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2018. V. 14. № 2. P. 217–234.
15. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
16. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // *Дифференциальные уравнения*, 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
17. *Baer S.M., Erneux T., Rinzel J.* The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance // *SIAM J. Appl. Math.* 1989. V. 49. № 1. P. 55–71.
18. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
19. *Lebovitz N.R., Schaar R.J.* Exchange of stabilities in autonomous systems // *Stud. Appl. Math.* 1975. V. 54 (3). P. 229–260.
20. *Lebovitz N.R., Schaar R.J.* Exchange of Stabilities in Autonomous Systems-II. Vertical Bifurcation *Stud. Appl. Math.* 1977. V. 56. P. 1–50.
21. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
22. *Орлов В.Н.* Критерий существования подвижных особых точек решений дифференциального уравнения Риккати // *Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия.* 2006. 6/1(46). С. 64–69.
23. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // *Функц. анализ и его прилож.* 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63–74.
24. *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1996.
25. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
26. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // *Изв. РАН. Сер. тех. кибернетика.* 1994. № 3. С. 96–103.
27. *Гарифуллин Р.Н.* Построение асимптотических решений в задаче об авторезонансе // *Докл. АН.* 2004. Т. 398:3. С. 306–309.
28. *Ильин А.М., Сулейманов Б.И.* Асимптотика специального решения уравнения Абея, связанного с особенностью сборки. II. Большие значения параметра t // *Матем. сборник.* 2007. Т. 198. № 9. С. 81–106.
29. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
30. *Сулейманов Б.И.* О решениях краевых задач типа Колмогорова–Петровского–Пискунова // *Матем. заметки.* 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 618–628.