ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 9, с. 1546–1553

УДК 536.21

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССАХ НА ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ЭКРАНИРОВАННЫМ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛЕНКОЙ

© 2019 г. С. Е. Холодовский

(672039 Чита, ул. Александро-Заводская, 30, Забайкальский государственный университет, Россия)

e-mail: hol47@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.07.2018 г.
Переработанный вариант 16.04.2019 г.
Принята к публикации 15.05.2019 г.

Рассмотрены установившиеся процессы тепломассопереноса на плоскости при наличии кругового включения с границей в виде двухслойной пленки, когда искомые потенциалы внутри и вне круга удовлетворяют уравнению Пуассона и обобщенным условиям сопряжения на пленке. Получены формулы, выражающие потенциалы рассматриваемых процессов через известные потенциалы аналогичных процессов на однородной плоскости, т.е. без включения. Приведены примеры решения задач в конечном виде. Библ. 10.

Ключевые слова: кольцевые двухслойные пленки, круговое включение, метод свертывания разложений Фурье.

DOI: 10.1134/S0044466919090126

ВВЕДЕНИЕ

Многослойные пленки широко применяются для решения задач теплоизоляции различных объектов, задач экранирования загрязненных зон, при исследовании процессов в композитных материалах, в нанотехнологиях и др. [1]–[7]. При этом сильно- и слабопроницаемые пленки моделируют линейные дренажи, трещины, экраны, изоляторы, мембраны, неидеальные контакты разнородных сред и т.д.

В работах [3, с. 291], [4] построены комплексные потенциалы фильтрационных течений несжимаемой жидкости на плоскости с круговым включением при идеальном контакте включения с внешней средой (т.е. без пленки). В работах [5], [6] рассмотрены пленки в виде разрезов с граничными условиями на сторонах разрезов. В работе [7] доказана разрешимость параболических систем уравнений с неоднородными условиями сопряжения на трехслойной пленке. Незамкнутые многослойные пленки на плоскости и в пространстве рассмотрены в статьях [8], [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим на плоскости с полярными координатами (r, α) круг $D_1 = (0 \le r < 1) \times (0 \le \alpha < 2\pi)$, ограниченный многослойной пленкой $r = 1$, состоящей из сильно- и слабопроницаемых прослоек с параметрами соответственно A_i и B_j. Сильно (слабо) проницаемые прослойки моделируем бесконечно тонкими кольцевыми слоями толщины l_i с бесконечно большой (бесконечно малой) проницаемостью k_i, где $A_i = \lim l_i k_i$ при $l_i \to 0$, $k_i \to \infty$ ($B_j = \lim l_j/k_j$ при $l_j \to 0$, $k_j \to 0$) [8]. Пусть пленка $r = 1$ состоит из $2m$ чередующихся сильно- и слабопроницаемых прослоек с параметрами $A_1, B_2, \ldots, A_{2m-1}, B_{2m}$, где A_1 – параметр первой сильнопроницаемой прослойки $r = 1 - 0$, B_{2m} – параметр последней слабопроницаемой прослойки $r = 1 + 0$. Проницаемости включения D_1 и внешней области $D_2 = (1 < r < \infty) \times (0 \le \alpha < 2\pi)$ соответственно равны K_1 и K_2 ($K_i > 0$ – постоянные).

Рассмотрим на плоскости с экранированным круговым включением D_1 установившийся процесс тепломассопереноса (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии, электростатики). Относительно потенциалов $u_i(r,\alpha)$ в D_i рассмотрим задачу для уравнения Пуассона

$$r\partial_r(r\partial_r u_i) + \partial_\alpha^2 u_i = H_i(r,\alpha), \quad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

с условиями сопряжения на пленке вида

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = F_{2m}u_1, \quad K_2\partial_r u_2 - K_1\partial_r u_1 = G_{2m}u_1, \tag{1.2}$$

где $\partial_r^n = \partial^n/\partial r^n$, функции $u_i(r,\alpha)$ суть 2π-периодические по α; операторы F_{2m}, G_{2m} строятся по рекуррентным формулам

$$F_{2j-1}u = F_{2j-2}u, \quad G_{2j-1}u = A_{2j-1}\{\partial_r(r\partial_r u) + F_{2j-2}[r\partial_r(r\partial_r u)]\} + G_{2j-2}u,$$
$$F_{2j}u = B_{2j}(K_1\partial_r u + G_{2j-1}u) + F_{2j-1}u, \quad G_{2j}u = G_{2j-1}u,$$

в которых $F_0 u = G_0 u = 0,\ j = 1, \ldots, m$; функции $H_i(r,\alpha)$ характеризуют плотность внешних источников (плотность зарядов), индуцирующих процесс [10, с. 276, 279], при этом полагаем $H_i = 0$ в окрестности пленки $r = 1$. Условия сопряжения на пленке (1.2) выводятся аналогично статьям [8], [9]. При $A_1 = 0$ ($B_{2m} = 0$) первая (последняя) прослойка отсутствует.

Ниже рассматриваются задачи (1.1), (1.2) для двухслойных пленок, когда одна из функций $H_i(r,\alpha)$ равна нулю, при этом решение общей задачи при $H_i \neq 0$ имеет вид суммы решений задач с неоднородным уравнением (1.1) в одной из зон D_i.

2. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ В КРУГЕ D_1

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) для двухслойной пленки типа (AB) при $m = 1,\ H_2 = 0$:

$$r\partial_r(r\partial_r u_1) + \partial_\alpha^2 u_1 = H(r,\alpha), \quad r\partial_r(r\partial_r u_2) + \partial_\alpha^2 u_2 = 0, \tag{2.1}$$

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = BK_2\partial_r u_2, \quad K_2\partial_r u_2 - K_1\partial_r u_1 = A\partial_r(r\partial_r u_1), \tag{2.2}$$

где $H(r,\alpha) = 0$ в окрестности пленки $r = 1, A$ — параметр сильнопроницаемой прослойки $r = 1 - 0$, B — параметр слабопроницаемой прослойки $r = 1 + 0$ (здесь первое условие (2.2) упрощено с учетом второго условия).

Из условий сопряжения (2.2) следует, что в случае $A = 0,\ B > 0$ функции $u_i(r,\alpha)$ на пленке терпят разрыв, т.е. на однослойной слабопроницаемой пленке имеет место определенная разность потенциалов. В случае $A > 0,\ B = 0$ на сильнопроницаемой пленке нормальная скорость терпит разрыв (2.2). Этот результат, например, в теории фильтрации объясняется тем, что частицы жидкости могут протекать в сильнопроницаемой пленке и вытекать из нее в точках, отличных от точек втекания. На двухслойной пленке при $A > 0$ и $B > 0$ потенциал и нормальная скорость в общем случае терпят разрывы.

Пусть известен потенциал $f(r,\alpha)$ рассматриваемого процесса на однородной плоскости (без включения D_1), т.е. функция $f(r,\alpha)$ на всей плоскости удовлетворяет уравнению [10, с. 276]:

$$r\partial_r(r\partial_r f) + \partial_\alpha^2 f = \begin{cases} H(r,\alpha), & 0 \le r < 1, \\ 0, & 1 \le r < \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Методом свертывания разложений Фурье [8], [9] выразим решение задачи (2.1), (2.2) с пленкой через функцию $f(r,\alpha)$ (2.3). В данном случае функция $f(r,\alpha)$ может иметь в бесконечности логарифмическую особую точку, моделирующую источник (сток), мощность которого Q определяется потоком поля скоростей через окружность $r = 1$ из D_1, т.е.

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_r f_{|r=1}\, d\alpha. \tag{2.4}$$

Отсюда функция $f(r,\alpha)$ (2.3) при $1 \le r < \infty$ (где она удовлетворяет уравнению Лапласа) представима в виде

$$f(r,\alpha) = Q\ln r + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} g_n(\alpha), \quad r \ge 1, \tag{2.5}$$

где

$$g_n(\alpha) = f_{1n}\sin n\alpha + f_{2n}\cos n\alpha, \tag{2.6}$$

f_0, f_{in} – коэффициенты Фурье функции $f(1,\alpha)$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(1,\alpha)d\alpha, \quad \begin{pmatrix} f_{1n} \\ f_{2n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(1,\alpha)\begin{pmatrix} \sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{pmatrix} d\alpha$$

(здесь левая и правая части равенства (2.5) являются решением задачи Дирихле в $D_2(r > 1)$: $\Delta u = 0$, $u|_{r=1} = f(1,\alpha)$, $u(r,\alpha) = Q\ln r + O(1)$ при $r \to \infty$). Из выражения (2.5) при $r < 1$ следует равенство

$$f(1/r,\alpha) = -Q\ln r + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n g_n(\alpha), \quad r < 1. \tag{2.7}$$

Решение задачи (2.1), (2.2) будем искать в виде

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n g_n(\alpha), \quad r < 1, \tag{2.8}$$

$$u_2(r,\alpha) = Q_1\ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{-n} g_n(\alpha), \quad r > 1, \tag{2.9}$$

где a_n, b_n, Q_1 – неизвестные параметры, функция $g_n(\alpha)$ имеет вид (2.6). Отсюда функции $u_i(r,\alpha)$ в D_i удовлетворяют соответствующему уравнению (2.1) (при условии сходимости и дифференцируемости рядов (2.8), (2.9)). Из условий сопряжения (2.2) с учетом равенства (2.5) находим $Q_1 = QK_1/K_2$, $b_0 = f_0 + BK_1Q$,

$$a_n = -1 + \frac{2K_1(1 + BK_2n)}{d(n)}, \quad b_n = \frac{2K_1}{d(n)}, \tag{2.10}$$

где

$$d(n) = ABK_2n^2 + (A + BK_1K_2)n + K_1 + K_2. \tag{2.11}$$

Дискриминант квадратного трехчлена (2.11) имеет вид

$$T = (A + BK_1K_2)^2 - 4ABK_2(K_1 + K_2). \tag{2.12}$$

Отсюда $d(n) = ABK_2(n + p_1)(n + p_2)$ и $d(n) = ABK_2(n + p_3)^2$ соответственно при $T \ne 0$ и $T = 0$, где

$$p_i = \frac{A + BK_1K_2 + (-1)^i\sqrt{T}}{2ABK_2}, \quad i = 1,2; \quad p_3 = \frac{A + BK_1K_2}{2ABK_2} > 0, \tag{2.13}$$

$\mathrm{Re}\,p_i > 0, i = 1, 2$, при этом

$$ABK_2p_i^2 - (A + BK_1K_2)p_i + K_1 + K_2 = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{2.14}$$

Разлагая дроби (2.10) на простейшие дроби, получаем

$$a_n = -1 + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\left(\frac{h_1}{n + p_1} - \frac{h_2}{n + p_2}\right), \quad b_n = \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\left(\frac{1}{n + p_1} - \frac{1}{n + p_2}\right)$$

и

$$a_n = -1 + \frac{2K_1}{ABK_2}\left[\frac{h_3}{(n + p_3)^2} - \frac{BK_2}{n + p_3}\right], \quad b_n = \frac{2K_1}{ABK_2(n + p_3)^2}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где

$$h_i = 1 - p_i BK_2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.15}$$

Отсюда функции (2.8), (2.9) с учетом равенства (2.7) примут вид

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) - Q\ln r + f_0 + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h_1}{n+p_1} - \frac{h_2}{n+p_2}\right)r^n g_n(\alpha), \tag{2.16}$$

$$u_2(r,\alpha) = Q_1\ln r + b_0 + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+p_1} - \frac{1}{n+p_2}\right)r^{-n} g_n(\alpha), \tag{2.17}$$

и

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) - Q\ln r + f_0 + \frac{2K_1}{ABK_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{h_3}{(n+p_3)^2} - \frac{BK_2}{n+p_3}\right]r^n g_n(\alpha), \tag{2.18}$$

$$u_2(r,\alpha) = Q_1\ln r + b_0 + \frac{2K_1}{ABK_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{-n}g_n(\alpha)}{(n+p_3)^2}, \tag{2.19}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$.

Заменяя в выражении (2.5) переменную r на re^t, умножая полученное равенство на $e^{-pt}t^m$, где $\operatorname{Re} p > 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $r > 1$, и интегрируя по $t \in (0, \infty)$, с учетом равенства

$$\frac{1}{m!}\int_0^{\infty} e^{-pt}t^m dt = \frac{1}{p^{m+1}} \tag{2.20}$$

получаем формулу

$$\frac{1}{m!}\int_0^{\infty} e^{-pt}t^m f(re^t,\alpha)dt = \frac{Q\ln r + f_0}{p^{m+1}} + \frac{Q(m+1)}{p^{m+2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{-n}g_n(\alpha)}{(n+p)^{m+1}}, \quad r > 1,$$

и аналогичную формулу при замене r на $1/r$ для $r < 1$:

$$\frac{1}{m!}\int_0^{\infty} e^{-pt}t^m f(e^t/r,\alpha)dt = \frac{f_0 - Q\ln r}{p^{m+1}} + \frac{Q(m+1)}{p^{m+2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n}g_n(\alpha)}{(n+p)^{m+1}}, \quad r < 1.$$

Выражая из последних формул ряды, решение (2.16)–(2.19) исходной задачи (2.1), (2.2) приведем к виду без разложений Фурье:

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) + q\ln r + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(e^t/r,\alpha)(h_1e^{-p_1t} - h_2e^{-p_2t})dt, \tag{2.21}$$

$$u_2(r,\alpha) = \frac{qK_1}{K_2}\ln r + qBK_1 + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(re^t,\alpha)(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt \tag{2.22}$$

и

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) + q\ln r + \frac{2K_1}{ABK_2}\int_0^{\infty} f(e^t/r,\alpha)e^{-p_3t}(h_3t + BK_2)dt, \tag{2.23}$$

$$u_2(r,\alpha) = \frac{qK_1}{K_2}\ln r + qBK_1 + \frac{2K_1}{ABK_2}\int_0^{\infty} f(re^t,\alpha)e^{-p_3t}t\,dt \tag{2.24}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где

$$q = \frac{Q(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2}, \tag{2.25}$$

постоянные T, p_i, h_i определены в (2.12), (2.13), (2.15), $f(r,\alpha)$ – заданная функция (потенциал рассматриваемого процесса без включения D_1). При этом функции (2.21), (2.22) действительны при $T < 0$.

Из равенства (2.7) следуют асимптотики при $r \to 0$:

$$f(1/r,\alpha) = -Q\ln r + O(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty f(e^t/r,\alpha)(h_1e^{-p_1t} - h_2e^{-p_2t})dt = -\frac{Q\ln r}{K_1 + K_2} + O(1),$$

$$\frac{1}{ABK_2}\int_0^\infty f(e^t/r,\alpha)e^{-p_3t}(h_3t + BK_2)dt = -\frac{Q\ln r}{K_1 + K_2} + O(1),$$

при этом учитываются равенства

$$h_1p_1^{-1} - h_2p_2^{-1} = \sqrt{T}(K_1 + K_2)^{-1}, \quad h_3p_3^{-2} + BK_2p_3^{-1} = ABK_2(K_1 + K_2)^{-1},$$

а также (2.20).

Аналогично при $r \to \infty$ получаем асимптотики

$$f(r,\alpha) = Q\ln r + O(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty f(re^t,\alpha)(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt = \frac{Q\ln r}{K_1 + K_2} + O(1),$$

$$\frac{1}{ABK_2}\int_0^\infty f(re^t,\alpha)e^{-p_3t}tdt = \frac{Q\ln r}{K_1 + K_2} + O(1).$$

Отсюда в выражениях (2.21)–(2.24)

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) + O(1) \quad \text{при} \quad r \to 0 \quad \text{и} \quad u_2(r,\alpha) = K_1K_2^{-1}Q\ln r + O(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

т.е. в формулах (2.21)–(2.24) для функции $u_1(r,\alpha)$ логарифмическая особая точка $r = 0$, соответствующая слагаемым с множителем $Q\ln r$, отсутствует (слагаемые с множителем $Q\ln r$ взаимно уничтожаются), а функция $u_2(r,\alpha)$ при $Q \neq 0$ (2.4) имеет в бесконечности логарифмическую особую точку.

Остальные условия задачи (2.1), (2.2) для функций (2.21)–(2.24) с учетом (2.14) проверяются непосредственно. При этом для того, чтобы условия сопряжения (2.2) содержали одинаковые интегралы, нужно в правых частях этих условий выполнить интегрирование по частям. Так, в случае $T \neq 0$ получаем

$$\partial_r u_2{}_{|r=1} = \frac{K_1q}{K_2} + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty \partial_\xi f(\xi,\alpha)\xi(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt = \frac{K_1q}{K_2} + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty f(\xi,\alpha)(p_1e^{-p_1t} - p_2e^{-p_2t})dt,$$

$$r\partial_r u_1 = r\partial_r[f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha)] + q - \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty z\partial_z f(z,\alpha)(h_1e^{-p_1t} - h_2e^{-p_2t})dt =$$

$$= r\partial_r[f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha)] + q + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\left[\frac{f(1/r,\alpha)\sqrt{T}}{A} - \int_0^\infty f(z,\alpha)(h_1p_1e^{-p_1t} - h_2p_2e^{-p_2t})dt\right],$$

где $\xi = e^t, z = e^t/r$ и при интегрировании по частям в первом интеграле полагаем

$$u(t) = e^{-p_1t} - e^{-p_2t}, \quad dv(t) = \xi\partial_\xi f(\xi,\alpha)dt \Rightarrow v(t) = f(\xi,\alpha),$$

во втором интеграле

$$u(t) = h_1e^{-p_1t} - h_2e^{-p_2t}, \quad dv(t) = z\partial_z f(z,\alpha)dt \Rightarrow v(t) = f(z,\alpha).$$

Если в рассмотренной двухслойной пленке сильно- и слабопроницаемые прослойки поменять местами, то получим задачу (2.1) для пленки типа (BA) с условиями сопряжения

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = BK_1\partial_r u_1, \quad K_2\partial_r u_2 - K_1\partial_r u_1 = A\partial_r(r\partial_r u_2), \tag{2.26}$$

где B – параметр слабопроницаемой прослойки $r = 1 - 0$, A – параметр сильнопроницаемой прослойки $r = 1 + 0$. Рассуждая аналогично, решение задачи (2.1), (2.26) выразим через функцию $f(r,\alpha)$ (2.3) в виде

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) + f(1/r,\alpha) + q\ln r - \frac{2}{\sqrt{T}}\int_0^\infty f(e^t/r,\alpha)(c_1e^{-p_1t} - c_2e^{-p_2t})dt, \tag{2.27}$$

$$u_2(r,\alpha) = \frac{qK_1}{K_2}\ln r + qBK_1 + \frac{2K_1}{\sqrt{T}}\int_0^\infty f(re^t,\alpha)(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt \tag{2.28}$$

и

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) + f(1/r,\alpha) + q\ln r - \frac{2}{ABK_1}\int_0^\infty f(e^t/r,\alpha)e^{-p_3t}(c_3t + A)dt, \tag{2.29}$$

$$u_2(r,\alpha) = \frac{qK_1}{K_2}\ln r + qBK_1 + \frac{2}{AB}\int_0^\infty f(re^t,\alpha)e^{-p_3t}t\,dt \tag{2.30}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $c_i = K_2 - Ap_i$,

$$p_i = \frac{A + BK_1K_2 + (-1)^i\sqrt{T}}{2ABK_1}, \quad i = 1,2; \quad p_3 = \frac{A + BK_1K_2}{2ABK_1}, \tag{2.31}$$

$T = (A - BK_1K_2)^2 - 4ABK_1^2$, q имеет вид (2.25).

Из полученных решений (2.21)–(2.24), (2.27)–(2.30) следует, что сильно- и слабопроницаемые прослойки в пленке не коммутируют, т.е. процесс зависит от порядка расположения прослоек в пленке.

При отсутствии пленки ($A = B = 0$) решение задачи (2.1), (2.2) имеет конечный вид:

$$u_1(r,\alpha) = f(r,\alpha) + \mu[f(1/r,\alpha) + Q\ln r],$$
$$u_2(r,\alpha) = (1+\mu)f(r,\alpha) + \mu K_1K_2^{-1}Q\ln r,$$

где $\mu = (K_1 - K_2)/(K_1 + K_2)$.

Отсюда в частном случае $Q = 0$ (2.4) следуют формулы, полученные методом отражения особых точек [3, с. 291].

3. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ВНЕ КРУГА D_1

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) для двухслойной пленки типа (AB) при $H_1 = 0$. Тогда для потенциалов u_i в зонах D_i получим уравнения

$$r\partial_r(r\partial_ru_1) + \partial_\alpha^2u_1 = 0, \quad r\partial_r(r\partial_ru_2) + \partial_\alpha^2u_2 = H(r,\alpha) \tag{3.1}$$

с условиями сопряжения (2.2), где $H(r,\alpha) = 0$ в окрестности пленки $r = 1$.

Пусть известен потенциал $f(r,\alpha)$ рассматриваемого процесса на однородной плоскости, т.е. функция $f(r,\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$r\partial_r(r\partial_rf) + \partial_\alpha^2f = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ H(r,\alpha), & 1 \le r < \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

В данном случае функция $f(r,\alpha)$ в круге D_1 (где она удовлетворяет уравнению Лапласа) представима в виде

$$f(r,\alpha) = f_0 + \sum_{n=1}^\infty r^ng_n(\alpha), \quad r \le 1, \tag{3.3}$$

где f_0 и $g_n(\alpha)$ определены в (2.6). Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-pt}t^mf(re^{-t},\alpha)dt = \frac{f_0}{p^{m+1}} + \sum_{n=1}^\infty \frac{r^ng_n(\alpha)}{(n+p)^{m+1}}, \quad r < 1, \tag{3.4}$$

где $\operatorname{Re} p > 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Решение задачи (3.1), (2.2) будем искать в виде

$$u_1(r,\alpha) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n g_n(\alpha), \quad r < 1, \tag{3.5}$$

$$u_2(r,\alpha) = f(r,\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{-n} g_n(\alpha), \quad r > 1. \tag{3.6}$$

Тогда из условий сопряжения (2.2) с учетом (3.3) находим

$$a_n = \frac{2K_2}{\sqrt{T}}\left(\frac{1}{n+p_1} - \frac{1}{n+p_2}\right), \quad b_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{T}}\left(\frac{c_1}{n+p_1} - \frac{c_2}{n+p_2}\right)$$

и

$$a_n = \frac{2}{AB(n+p_3)^2}, \quad b_n = 1 - \frac{2}{ABK_2}\left[\frac{c_3}{(n+p_3)^2} + \frac{A}{n+p_3}\right]$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где постоянные T, p_i имеют вид (2.12), (2.13), $c_i = K_1 - Ap_i$. Отсюда с учетом равенств (3.3), (3.4) решение (3.5), (3.6) задачи (3.1), (2.2) приводится к виду

$$u_1(r,\alpha) = \frac{2K_2}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(re^{-t},\alpha)(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt, \tag{3.7}$$

$$u_2(r,\alpha) = f(r,\alpha) + f(1/r,\alpha) - \frac{2}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(r^{-1}e^{-t},\alpha)(c_1e^{-p_1t} - c_2e^{-p_2t})dt \tag{3.8}$$

и

$$u_1(r,\alpha) = \frac{2}{AB}\int_0^{\infty} f(re^{-t},\alpha)e^{-p_3t}tdt, \tag{3.9}$$

$$u_2(r,\alpha) = f(r,\alpha) + f(1/r,\alpha) - \frac{2}{ABK_2}\int_0^{\infty} f(r^{-1}e^{-t},\alpha)e^{-p_3t}(c_3t + A)dt \tag{3.10}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $f(r,\alpha)$ – решение задачи (3.2).

Рассуждая аналогично, решение задачи (3.1), (2.26) для пленки типа (BA) получаем в виде

$$u_1(r,\alpha) = \frac{2K_2}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(re^{-t},\alpha)(e^{-p_1t} - e^{-p_2t})dt, \tag{3.11}$$

$$u_2(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) + \frac{2K_2}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty} f(r^{-1}e^{-t},\alpha)(h_1e^{-p_1t} - h_2e^{-p_2t})dt \tag{3.12}$$

и

$$u_1(r,\alpha) = \frac{2K_2}{ABK_1}\int_0^{\infty} f(re^{-t},\alpha)e^{-p_3t}tdt, \tag{3.13}$$

$$u_2(r,\alpha) = f(r,\alpha) - f(1/r,\alpha) + \frac{2K_2}{ABK_1}\int_0^{\infty} f(r^{-1}e^{-t},\alpha)e^{-p_3t}(h_3t + BK_1)dt \tag{3.14}$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $h_i = 1 - p_iBK_1$, постоянные p_i, T определены в (2.31), $f(r,\alpha)$ – решение задачи (3.2).

Таким образом, формулы (2.21)–(2.24), (2.27)–(2.30), (3.7)–(3.14) позволяют по известным потенциалам установившихся процессов тепломассопереноса на однородной плоскости строить потенциалы аналогичных процессов на плоскости с круговым включением, экранированным различными двухслойными пленками.

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим задачу обтекания поступательным потоком круга $D_1(r<1)$, экранированного двухслойной пленкой. В данном случае потенциал потока на однородной плоскости имеет вид $f(r,\alpha)=x=r\cos\alpha$. Отсюда решения задач (3.1), (2.2) и (3.1), (2.26) найдем соответственно в виде

$$u_1(r,\alpha)=\frac{2K_2r\cos\alpha}{ABK_2+BK_1K_2+A+K_1+K_2},\quad r<1, \tag{4.1}$$

$$u_2(r,\alpha)=\left[r+\frac{ABK_2+BK_1K_2+K_2-A-K_1}{(ABK_2+BK_1K_2+A+K_1+K_2)r}\right]\cos\alpha,\quad r>1, \tag{4.2}$$

и

$$u_1(r,\alpha)=\frac{2K_2r\cos\alpha}{ABK_1+BK_1K_2+A+K_1+K_2},\quad r<1, \tag{4.3}$$

$$u_2(r,\alpha)=\left[r-\frac{ABK_1+A+K_1-BK_1K_2-K_2}{(ABK_1+BK_1K_2+A+K_1+K_2)r}\right]\cos\alpha,\quad r>1. \tag{4.4}$$

Отсюда для рассмотренных пленок типа (AB) и (BA) в круге $D_1(r<1)$ имеет место поступательный поток (4.1), (4.3).

При $K_1=K_2$ в случаях $B=0$ $(A>0)$ и $A=0$ $(B>0)$ соответственно получим $|v_2|>|v_0|$ и $|v_2|<|v_0|$ (4.2), где $v_0=K_2\partial_rf(r,\alpha)$ и $v_2=K_2\partial_ru_2(r,\alpha)$ – радиальные составляющие скорости невозмущенного и возмущенного пленкой потоков во внешней зоне $D_2(r>1)$. Отсюда сильно (слабо) проницаемая кольцевая пленка $r=1$ "притягивает" ("отталкивает") поступательный поток. Аналогично при отсутствии пленки $(A=B=0)$ более проницаемое включение $D_1(r<1)$ при $K_1>K_2$ "притягивает", а менее проницаемое включение D_1 при $K_1<K_2$ "отталкивает" поток.

Для рассмотренных двухслойных пленок указанные эффекты могут компенсировать друг друга. Если в выражениях (4.2) и (4.4) соответственно $ABK_2+BK_1K_2+K_2=A+K_1$ и $ABK_1+A+K_1=BK_1K_2+K_2$, то $u_2(r,\alpha)=f(r,\alpha)=r\cos\alpha$, при этом включение $D_1(r<1)$, экранированное двухслойными пленками типа (AB) и (BA), не искажает поступательный поток во внешней зоне $D_2(r>1)$. В частности, при $K_1=K_2=1$ двухслойные кольцевые пленки типа (AB) и (BA) не искажают поток в зоне D_2 соответственно в случаях $B=A/(A+1)$ и $A=B/(B+1)$.

В случае $K_1=0$, $K_2=1$ непроницаемое включение $D_1(r<1)$, экранированное пленкой типа (AB), не искажает поток в D_2 при условии $A=AB+1$. В случае $K_1\to\infty$, $K_2=1$ абсолютно проницаемое включение D_1, экранированное пленкой типа (BA), не искажает поток в D_2 при условии $B=AB+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симоненко И.Б.* Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной // Дифференц. ур-ния. 1974. Т. 10. № 2. С. 301–309.
2. *Бочевер Ф.М., Лапшин И.Н., Орадовская А.Е.* Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979. 254 с.
3. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 364 с.
4. *Баламирзоев А.Г., Зербалиев А.М., Селимханов Д.Н.* О решениях некоторых задач теории фильтрации // Вестн. Дагестанского гос. технического университета. Технические науки. № 4 (35). 2014. С. 27–36.
5. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Обобщение задачи Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 9. С. 1155–1165.
6. *Крутицкий П.А., Прозоров К.В.* К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268–1283.
7. *Номировский Д.А.* Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399.
8. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
9. *Холодовский С.Е.* О многослойных пленках на границе полупространства // Матем. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 3. С. 421–427.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.