ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1721–1733

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.642

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Н. С. Габбасов

423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 04.04.2020 г.
Переработанный вариант 04.04.2020 г.
Принята к публикации 09.07.2020 г.

Построена полная теория разрешимости линейного интегродифференциального уравнения с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложены и обоснованы специальные обобщенные варианты метода коллокации, основанные на применении стандартных полиномов и кубических сплайнов минимального дефекта. Установлена оптимальность по порядку точности построенных методов. Библ. 16.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466920090094

1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является линейное интегродифференциальное уравнение III рода (ИДУТР)

$$(Ax)(t) \equiv x(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t), \tag{1.1}$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,q}$, K_j, $j = \overline{0,p}$ и y — известные "гладкие" функции, а x — искомая функция. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения теории (в частности, ИДУТР (1.1) является обобщением ряда классов интегральных уравнений Фредгольма), так и приложений. К такого рода уравнениям приводит ряд важных задач теорий упругости, переноса нейтронов, рассеяния частиц (см., например, [1], [2] и библиографию к [1], [3]), уравнений с частными производными смешанного типа [4], а также теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [5]. При этом естественными классами решений ИДУТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций (ПОФ) типа D или V. Под D (соответственно V) понимается ПОФ, построенное на основе функционала "дельта-функция Дирака" (соответственно "конечная часть интеграла по Адамару"). Исследуемые ИДУТР точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в ПОФ с соответствующим теоретическим обоснованием. Первые результаты в этом направлении получены в работах [6]–[8], в которых предложены и обоснованы некоторые полиномиальные и сплайновые (на базе сплайнов 1-го и 2-го порядков) прямые методы решения уравнений вида (1.1) при $q = 1$ в ПОФ типа V и D.

В настоящей работе построена полная теория разрешимости общего ИДУТР (1.1) в пространстве типа D. Именно при определенных условиях "гладкости" на ядра K_j, $j = \overline{0,p}$, установлены фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора A, указан метод отыскания точного решения ИДУТР (1.1) в некотором классе $X \equiv D^{(p)}\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ обобщенных функций. Далее предложены специальные обобщенные варианты метода коллокации, основанные на применении стандартных полиномов и кубических сплайнов минимального дефекта. Проведено их теоретическое обоснование в смысле [9; гл. 1, § 1–5] и установлено, что построенные методы оптимальны по порядку точности (см. [9; гл. 2, § 1–3]) на некотором классе F гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве X.

2. ПРОСТРАНСТВО ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя [10], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m; t_0\} \equiv C_{t_0}^{\{m\}}(I)$, если в точке $t_0 \in (-1, 1)$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(t_0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0; t_0\} \equiv C$).

Далее, пусть $t_1, t_2, \ldots, t_q$ – произвольно фиксированные попарно различные точки интервала $(-1, 1)$. Каждой точке t_j поставим в соответствие некоторое число $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$. Введем векторное пространство

$$C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I) \equiv \bigcap_{j=1}^{q} C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, \ldots, m_q)$ и $\overline{\tau} \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ – конечные наборы соответствующих величин. Снабдим его нормой

$$\|y\|_{\{\overline{m}\}} \equiv \|Ty\|_C + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} \left| y^{\{i\}}(t_j) \right|, \tag{2.1}$$

где $T : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \to C$ – “характеристический” оператор класса $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$:

$$(Ty)(t) \equiv \frac{\left[y(t) - \sum_j \sum_i y^{\{i\}}(t_j) H_{ji}(t) \right]}{u(t)} \equiv H(t) \in C,$$

$$u(t) \equiv \prod_{j=1}^{q} (t - t_j)^{m_j}, \quad H(t_j) \equiv \lim_{t \to t_j} H(t), \quad j = \overline{1, q},$$

H_{ji} – обычные фундаментальные полиномы Эрмита степени $\mu - 1$ по системе узлов $\{t_j\}$, $\mu \equiv \sum_{j=1}^{q} m_j$, причем здесь и в дальнейшем

$$\sum_j \sum_i \gamma_{ji} \equiv \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} \gamma_{ji}.$$

По норме (2.1) пространство $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ полно и вложено в C (см., например, [11]).

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций и наделим его нормой

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} \left| z^{(i)}(-1) \right|, \quad z \in C^{(p)}, \tag{2.2}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2.1 (см. [12]). *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (2.2) полно и вложено в C.*

Замечание 1. Традиционная норма в $C^{(p)}$ и (2.2) эквивалентны, т.е. для $\forall z \in C^{(p)}$ $\exists d \geq 1 : \|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d \|z\|_{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^{p} \left\| z^{(i)} \right\|_C$.

Введем теперь основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C^{(p)}\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\},(p)}(I) \equiv \{ y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \mid Ty \in C^{(p)} \}.$$

В качестве нормы в нем выберем величину

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{(p)} + \sum_j \sum_i \left| y^{\{i\}}(t_j) \right|. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. 1) *относительно структуры основных функций справедливо соотношение*

$$\varphi \in Y \Leftrightarrow \varphi(t) = (UJ\Phi)(t) + u(t)\sum_{k=0}^{p-1} a_k (t+1)^k + \sum_j \sum_i \alpha_{ji} H_{ji}(t), \tag{2.4}$$

где $\Phi \in C$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, p-1}$, $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, q}$, *причем* $DT\varphi = \Phi$, $(T\varphi)^{(k)}(-1) = a_k k! (\forall k)$, $\varphi^{\{i\}}(t_j) = \alpha_{ji} (\forall j, i)$; $Uf \equiv (uf)(t)$, $Jf \equiv (J_{p-1}f)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} f(s)ds$, *при этом* $J : C \to C^{(p)}$, $(Jf)^{(k)} = J_{p-k-1} f$, $k = \overline{0, p-1}$, $DJf = f$;

2) *по норме* (2.3) *пространство* Y *полно и вложено в* $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Данная лемма доказывается аналогично лемме 2 в [6]. При этом роль пространства $C\{m; 0\}$ и его “характеристического” оператора играют соответственно $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и оператор T.

Критерий компактности множеств в пространстве Y устанавливает

Лемма 2.3. *Множество* $M \subset Y$ *относительно компактно в* Y *тогда и только тогда, когда*: i) M *ограничено*; ii) *семейство* $DT(M)$ *непрерывных на* I *функций равностепенно непрерывно*.

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.2.2 (см. [3; гл. 1, § 2]). Отличие заключается в том, что роль пространства $C\{m; 0\}$ и оператора T, фигурирующих в теореме 1.2.2, играют Y и DT соответственно.

3. О ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

На основном пространстве Y образуем семейство $X \equiv D^{(p)}\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_j \sum_i \gamma_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j), \tag{3.1}$$

где $t \in I$, $z \in C^{(p)}$, $\gamma_{ji} \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, определенные на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t - t_j) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(t_j), \quad \in Y, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q}. \tag{3.2}$$

Ясно, что векторное пространство X относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_j \sum_i |\gamma_{ji}| \tag{3.3}$$

является банаховым.

Лемма 3.1. *Для любых* $x \in X$ *и* $y \in Y$ *имеет место неравенство* $|(x, y)| \le d_1 \|x\|_X \|y\|_Y$ (*здесь и далее* d_i, $i = \overline{1, 10}$ – *определенные константы, не зависящие от натурального параметра* n).

Утверждение леммы 3.1 легко следует из выкладки на основе последовательного использования (3.1), (2.1), лемм 2.1 и 2.2 и (3.3).

Замечание 2. Элементы $x(t)$ пространства X являются линейными непрерывными функционалами (т.е. обобщенными функциями), заданными на пространстве Y основных функций.

Замечание 3. Пространства X и Y взаимно союзны.

Пусть $\Pi_l \equiv \mathrm{span}\{t^i\}_0^l$ – класс всех алгебраических полиномов степени не выше l. Пусть

$$X_n \equiv \Pi^{\delta}_{n+\mu+p-1} \equiv \Pi_{n+p-1} \oplus \mathrm{span}\{\delta^{\{i\}}(t - t_j)\}_{i=0; j=1}^{m_j - 1; q}$$

есть $(n + \mu + p)$ – мерное подпространство пространства X. Согласно формуле (3.3), введем величину

$$E^{\delta}_{n+\mu+p-1}(x) \equiv \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|_X, \quad (x \in X). \tag{3.4}$$

Наилучшее приближение (3.4) в метрике пространства X просто выражается через наилучшее равномерное приближение, а именно верна следующая

Лемма 3.2. *Для любого элемента $x \in X$ справедливо равенство*

$$E^{\delta}_{n+\mu+p-1}(x) = E_{n-1}(DTUx),$$

где $E_l(g)$ — наилучшее равномерное приближение функции $g \in C$ полиномами из Π_l $\quad (l \geq 0)$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1.5.14 (см. [3; гл. 1, § 5]).

4. О “СПЛАЙНОВОМ” ПРИБЛИЖЕНИИ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос о приближении элементов основного пространства $Y \equiv C^{(p)}\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ с использованием кубических сплайнов.

Зададим на I равномерную сетку

$$\Delta_n : -1 \equiv s_0 < s_1 < \ldots < s_n \equiv 1, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{4.1}$$

где $s_k \equiv -1 + 2k/n$, $k = \overline{0, n}$, и на ней рассмотрим кубический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий краевым условиям

$$z_n^{(3)}(s_j - 0) = z_n^{(3)}(s_j + 0), \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{4.2}$$

Здесь базисные функции $B_i(t)$ суть B-сплайны с носителем (s_{i-2}, s_{i+2}) (см., например, [13; гл. 3, § 8]). Для определения всех функций $B_i(t)$ сетку (4.1) дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-3} < s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1$, $1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2} < s_{n+3}$. Обозначим через S_n^3 пространство всех кубических сплайнов $z_n(t)$ на сетке Δ_n, обладающих свойством (4.2), с нормой $\|z_n\|_C$. Далее, пусть $P_n : C \to S_n^3$ означает оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие ее интерполяционный кубический сплайн $P_n f \in S_n^3$ с условием (4.2) такой, что $(P_n f)(s_i) = f(s_i), i = \overline{0, n}$. В книге [13; гл. 3, § 1, теорема 3.1] доказаны существование и единственность интерполяционного кубического сплайна при различных краевых условиях и указан алгоритм построения таких сплайнов. Там же (см. гл. 3, § 5) особо отмечается, что при приближении кубическими сплайнами выбор краевых условий (4.2) является наиболее удачным.

Из теорем 9, 10 и 13 в [14; гл. 2, § 4] как следствие вытекает

Лемма 4.1. *Пусть $r = \overline{1, 3}$ и $f \in C^{(r)} \equiv C^{(r)}(I)$. Тогда*

$$\|f - P_n f\|_C = O(n^{-r}), \quad n \to \infty. \tag{4.3}$$

Обозначим через $Y_n \equiv \operatorname{span}\{UJB_i\}_{-1}^{n+1} \oplus \Pi_{\mu+p-1}$ $(n + \mu + p + 3)$ — мерное подпространство пространства Y и введем в рассмотрение следующий оператор: $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+\mu+p+3} : Y \to Y_n$, относящий к любой функции $y \in Y$ “обобщенный сплайн” $\Gamma_n y \in Y_n$, определяемый условиями

$$(DT\Gamma_n y)(s_i) = (DTy)(s_i), \quad i = \overline{0, n},$$

$$(T\Gamma_n y)^{(k)}(-1) = (Ty)^{(k)}(-1), \quad k = \overline{0, p-1},$$

$$(\Gamma_n y)^{\{i\}}(t_j) = y^{\{i\}}(t_j), \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q},$$

$$(DT\Gamma_n y)^{(3)}(s_j - 0) = (DT\Gamma_n y)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Рассуждая так же, как и в [3; гл. 1, § 5, п. 5.3], несложно получить представление

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+\mu+p+3}(y; t) = (UJP_n DTy)(t) + u(t)\sum_{k=0}^{p-1} (Ty)^{(k)}(-1)(t+1)^k/k! + \sum_j \sum_i y^{\{i\}}(t_j) H_{ji}(t). \tag{4.4}$$

Лемма 4.2. Γ_n – *проектор в пространстве* Y.

Данное свойство сразу следует из (4.4), $P_n^2 = P_n$ и леммы 1.5.1 (см. [3; гл. 1, § 5]).

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$YC^{(r)} \equiv C_{\bar{\tau}}^{\{\bar{m}\};(p+r)} \equiv \{y \in Y \mid DTy \in C^{(r)}\},$$

где $r = 0, 1, 2, \ldots$; причем $YC^{(0)} \equiv Y$.

Следующее утверждение характеризует скорость сходимости "обобщенных" интерполяционных сплайнов к интерполируемой функции.

Лемма 4.3. *Если* $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1,3}$, *то*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y = O(n^{-r}), \quad n \to \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. В силу (2.4), (4.4), (2.3), (2.2) и леммы 4.1 последовательно находим

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y = \|UJ(DTy - P_n DTy)\|_Y \equiv \|J(DTy - P_n DTy)\|_{(p)} \equiv \|DTy - P_n DTy\|_C = O(n^{-r}).$$

Замечание 4. Очевидно, что из оценки (4.5) и хорошо известной теоремы Банаха–Штейнгауза следует равномерная ограниченность норм операторов Γ_n: $\|\Gamma_n\| = O(1)$, $n \to \infty$.

5. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ИДУТР

Пусть задано исследуемое ИДУТР

$$\begin{gathered}(Ax)(t) \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I,\\ Ux \equiv (u \cdot x)(t), \quad Kx \equiv \sum_{l=0}^{p} \int_{-1}^{1} K_l(t,s) x^{(l)}(s)ds,\end{gathered} \tag{5.1}$$

в котором $y \in Y$, K_l, $l = \overline{0,p}$ – известные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered}K_l(t,\cdot) \in Y, \quad \varphi_{lji}(s) \equiv (K_l)_t^{\{i\}}(t_j, s) \in C,\\ \theta_{lji}(t) \equiv (\rho_l)_s^{\{i\}}(t, t_j) \in Y, \quad \rho_l(t,s) \equiv \frac{\partial^l K_l}{\partial s^l}(t,s), \quad l = \overline{0,p}, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q};\end{gathered} \tag{5.2}$$

а $x \in X$ – искомая обобщенная функция.

Теорема 1. *В условиях* (5.2) *оператор* $A : X \to Y$ *фредгольмов*.

Доказательство. Предварительно исследуем уравнение $Ux = y$. Обобщая соответствующие рассуждения работы [3; гл. 2, § 2] получаем, что оператор $U : X \to Y$ нетеров с нулевым индексом: $\operatorname{ind} U = 0$.

Покажем теперь полную непрерывность оператора K из X в Y.

Прежде заметим, что согласно определению производной обобщенной функции и (3.2) имеет место правило

$$\begin{gathered}((\delta^{\{i\}})^{(l)}, \varphi) \equiv (-1)^l (\delta^{\{i\}}, \varphi^{(l)}) \equiv (-1)^{l+i} (\varphi^{(l)})^{\{i\}}(t_j),\\ l = \overline{0,p}, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

В силу (5.1), (3.1) и (5.3) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{l=0}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j - 1} (-1)^{i+l} \gamma_{ji} \theta_{lji}(t). \tag{5.4}$$

Теперь с учетом (5.4) и (5.2) видно, что $Kx \in Y (x \in X)$ и $\|Kx\|_Y \le d_2 \|x\|_X$, т.е. K действует из X в Y ограниченно.

Пусть $L \equiv \{x\} \subset X$ – произвольное ограниченное множество: $\|x\| \le r \ \ \forall x \in L$. Тогда очевидно, что множество $M \equiv K(L) \subset Y$ также ограничено.

Покажем, что для M выполняется и условие ii) леммы 2.3. Предварительно заметим следующее. Так как функции $h_l \equiv D_t T_t K_l$ и $g_{lji} \equiv DT\theta_{lji}$, $l = \overline{0,p}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1,q}$, равномерно непрерывны на компактах I^2 и I соответственно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что одновременно выполняются соотношения

$$|h_l(\tau_1, s_1) - h_l(\tau_2, s_2)| < \frac{\varepsilon}{\eta r}, \quad |g_{lji}(\tau_1) - g_{lji}(\tau_2)| < \frac{\varepsilon}{\eta r} \quad \forall l, j, i, \tag{5.5}$$

как только $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, $\tau_i, s_i \in I$, $i = \overline{1,2}$. Здесь $\eta \equiv \max\{2d, p+1\}$.

Пусть теперь $y \in M$ — произвольный элемент, т.е. $y = Kx$, $x \in L$. С учетом (5.4), (5.5), замечания 1 и (3.3) последовательно находим, что

$$|(DTy)(\tau_1) - (DTy)(\tau_2)| = \left|\sum_l \int_{-1}^{1} [h_l(\tau_1, s) - h_l(\tau_2, s)] z^{(l)}(s) ds + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} \gamma_{ji} [g_{lji}(\tau_1) - g_{lji}(\tau_2)]\right| \le$$

$$\le \left[2d\|z\|_{(p)} + (p+1)\sum_{j,i}|\gamma_{ji}|\right] \varepsilon(\eta r)^{-1} \le \eta\varepsilon(\eta r)^{-1}\|x\|_X \le \varepsilon,$$

коль скоро $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, $\tau_1, \tau_2 \in I$. Следовательно, оператор $K \in L(X, Y)$, переводящий произвольное ограниченное множество $L \subset X$ в относительно компактное в Y множество $M \equiv K(L)$, вполне непрерывен. А тогда утверждение доказываемой теоремы непосредственно следует из того, что возмущение нетерова оператора вполне непрерывным сохраняет нетеровость и не меняет его индекса.

6. НЕПРЕРЫВНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА III РОДА

Рассмотрим ИДУТР (5.1), в котором ядра K_l, $l = \overline{0,p}$, подчинены условиям (5.2), $y \in Y$, а $x \in X$ — искомая обобщенная функция вида (3.1). С учетом (3.1) и (5.4) преобразуем уравнение (5.1) к виду

$$\begin{gathered}(Az)(t) = y(t) - \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=0}^{m_j-1} \beta_{ji} f_{ji}(t), \\ f_{ji}(t) \equiv \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \theta_{lji}(t), \quad \beta_{ji} \equiv (-1)^i \gamma_{ji}, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Наша задача заключается в нахождении функции $z \in C^{(p)}$ и произвольных постоянных β_{ji}.

Лемма 6.1. *Если K_l (по t) и $y \in Y$, $\varphi_{lji} \in C(\forall l, i, j)$, то ИДУТР (5.1) ($A: C^{(p)} \to Y$) эквивалентно уравнению Фредгольма* II *рода в $C^{(p)}$*

$$Bx \equiv x(t) + \sum_{l=0}^{p} \int_{-1}^{1} (T_t K_l)(t, s) x^{(l)}(s) ds = (Ty)(t)$$

и соотношениям

$$\sum_{l=0}^{p} \int_{-1}^{1} \varphi_{lji}(s) x^{(l)}(s) ds = y^{\{i\}}(t_j), \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}.$$

Доказательство. В силу (2.4) очевидно, что для любой функции $g \in Y$ имеет место правило

$$g = 0 \Leftrightarrow Tg = 0, \quad g^{\{i\}}(t_j) = 0, \quad i = \overline{o, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}. \tag{6.2}$$

Теперь, взяв в (6.2) в качестве $g \in Y$ функцию $g \equiv Ax - y \in Y$, $x \in C^{(p)}$, $y \in Y$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Из этой леммы следует, что уравнение (6.1) равносильно уравнению II рода

$$(Bz)(t) = (Ty)(t) - \sum_{j,i} \beta_{ji} (Tf_{ji})(t) \tag{6.3}$$

в пространстве $C^{(p)}$ и соотношениям

$$y^{\{n\}}(t_k) - \sum_l \int_{-1}^{1} \varphi_{lkn}(s) z^{(l)}(s)ds - \sum_{j,i} \beta_{ji} f_{ji}^{\{n\}}(t_k) = 0, \quad n = \overline{0, m_k - 1}, \quad k = \overline{1, q}. \tag{6.4}$$

Пусть $\lambda = -1$ не является собственным значением уравнения (6.3) и R — его разрешающий оператор. Тогда

$$z^*(t) = (RTy)(t) - \sum_{j,i} \beta_{ji}(RTf_{ji})(t)$$

есть единственное гладкое решение уравнения (6.3), которое будет решением исходного уравнения (6.1), если в силу (6.4) постоянные β_{ji} удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} \beta_{ji}(Qf_{ji})^{\{n\}}(t_k) = (Qy)^{\{n\}}(t_k), \quad n = \overline{0, m_k - 1}, \quad k = \overline{1, q}, \tag{6.5}$$

где $Q \equiv E - KRT$ отображает Y в Y, E — единичный оператор в Y.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

а) *ядра* K_l, $l = \overline{0, p}$, *удовлетворяет требованиям* (5.2)*, а* $y \in Y$;

б) *однородное уравнение* II *рода, соответствующее уравнению* (6.3)*, имеет в* $C^{(p)}$ *лишь нулевое решение*;

в) *определитель СЛАУ* (6.5) *отличен от нуля.*

Тогда для любой правой части $y \in Y$ *ИДУТР* (5.1) *допускает единственное обобщенное решение* $x^* \in X$, *которое представляется формулой*

$$x^*(t) = (RTy)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} \beta_{ji}^*(RTf_{ji})(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} (-1)^i \beta_{ji}^* \delta^{\{i\}}(t - t_j),$$

где $\{\beta_{ji}^*\}$ — *единственное решение СЛАУ* (6.5).

Замечание 5. В условиях теоремы 2 интегродифференциальный оператор $A : X \to Y$, определенный равенством (5.1), непрерывно обратим.

7. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ СО СТАНДАРТНЫМИ ПОЛИНОМАМИ (ОМКСП)

Пусть задано ИДУТР (5.1), в котором ядра K_l, $l = \overline{0, p}$, обладают свойствами (5.2), $y \in Y$, а $x \in X$ — искомая обобщенная функция. Его приближенное решение образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_k\}) \equiv z_n(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+p+M(j-1)} \delta^{\{i\}}(t - t_j), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{n+p-1} c_i t^i, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{7.1}$$

где $M(l) \equiv \sum_{i=1}^{l} m_i$, $l = 0, 1, \ldots, q$, $M(0) \equiv 0$, $M(q) = \mu$. Набор $\{c_k\}_0^{n+\mu+p-1}$ неизвестных параметров найдем, согласно ОМКСП, из СЛАУ

$$(DT\eta_n)(\nu_l) = 0, \quad l = \overline{1, n}, \quad (T\eta_n)^{(k)}(-1) = 0, \quad \eta_n^{\{i\}}(t_j) = 0, \quad k = \overline{0, p-1}, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q}, \tag{7.2}$$

где $\eta_n(t) \equiv \eta_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, а $\{\nu_l\}_1^n \subset I$ — система узлов Чебышёва I (или II) рода.

Прежде чем перейти к теоретическому обоснованию предложенного метода (7.1), (7.2), примем следующие полезные при оформлении результатов соглашения. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ СЛАУ (7.2) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_k^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (5.1) по норме пространства X” заменим простой фразой “метод (7.1), (7.2) обоснованно применим к уравнению (5.1)”. Во-вторых, для погрешности приближенного решения введем специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \left\|x_n^* - x^*\right\|_X$; оценка такой величины определяет скорость сходимости приближенных решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (5.1).

Для вычислительного алгоритма (5.1), (7.1), (7.2) справедлива

Теорема 3. *Если однородное ИДУТР $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2), а функции $h_l \equiv D_t T_t K_l$ (по t), $g_{lji} \equiv DT\theta_{lji}$, $l = \overline{0,p}$, $i = \overline{0,m_j - 1}$, $j = \overline{1,q}$, и DTy принадлежат классу Дини–Липшица, то метод (7.1), (7.2) обоснованно применим к уравнению (5.1) и при этом*

$$\Delta x_n^* = O\left\{\left[\sum_{l=0}^{p}\left(E_{n-1}^t(h_l) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(g_{lji})\right) + E_{n-1}(DTy)\right]\ln n\right\}, \tag{7.3}$$

где $E_k^t(\cdot)$ означает функционал $E_k(\cdot)$, примененный по t.

Доказательство. ИДУТР (5.1) равносильно линейному операторному уравнению вида

$$Ax \equiv Ux + Kx = y, \quad x \in X \equiv D^{(p)}\{\overline{m}, \overline{\tau}\}, \quad y \in Y \equiv C^{(p)}\{\overline{m}, \overline{\tau}\}, \tag{7.4}$$

где оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Соответствующие конечномерные подпространства выберем следующим образом:

$$X \supset X_n = \Pi^{\delta}_{n+\mu+p-1}, \quad Y \supset Y_n = \Pi_{n+\mu+p-1}.$$

Далее введем линейный оператор $L_n \equiv L_{n+\mu+p} : Y \to Y_n$ по правилу

$$L_n y \equiv L_{n+\mu+p}(y;t) \equiv (UJQ_nDTy)(t) + u(t)\sum_{k=0}^{p-1}(Ty)^{(k)}(-1)\frac{(t+1)^k}{k!} + \sum_j\sum_i y^{\{i\}}(t_j)H_{ji}(t), \tag{7.5}$$

где $Q_n : C \to \Pi_{n-1}$ – обычный оператор Лагранжа по системе узлов $\{\nu_l\}_1^n$. Тогда система (7.1), (7.2) эквивалентна следующему линейному уравнению:

$$A_n x_n \equiv L_n A x_n = y_n, \quad x_n \in X_n, \quad y_n \equiv L_n y \in Y_n. \tag{7.6}$$

В этом нетрудно убедиться, проведя соответствующие рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 4 (см. [15]).

Таким образом, для получения утверждений теоремы 3 достаточно доказать существование, единственность и сходимость решений уравнений (7.6).

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 7.1. *Оператор L_n обладает следующими свойствами*: а) $L_n^2 = L_n$; б) $\left\|y - L_n y\right\|_Y \leq$ $\leq d_3 E_{n-1}(DTy)\ln n$, $y \in Y$; в) $\left\|L_n\right\| \equiv \left\|L_n\right\|_{Y\to Y} \asymp \ln n$, $n = 2, 3, \ldots$, *где символ $\asymp$ означает, как обычно, слабую эквивалентность.*

Данная лемма является естественным обобщением теоремы 4 [6] и ее доказательство проводится по схеме обоснования упомянутой теоремы. При этом роль пространства $C\{m;0\}$, полиномиальных операторов P_n^0 и Γ_n^0, участвующих в теореме 4, играют пространство $C\{\overline{m};\overline{\tau}\}$, операторы Q_n и L_n соответственно.

Обсудим теперь вопрос близости операторов A и A_n на подпространстве X_n. В силу (7.4), (7.6) и леммы 7.1 для любого $x_n \in X_n$ последовательно находим, что

$$\left\|Ax_n - A_n x_n\right\|_Y = \left\|Kx_n - L_n K x_n\right\|_Y \leq d_3 E_{n-1}(DTKx_n)\ln n. \tag{7.7}$$

На основании (5.4), (5.2) и (7.1) имеем

$$(Kx_n)(t) = (Kz_n)(t) + \sum_l\sum_j\sum_i(-1)^{i+l}c_{i+n+p+M(j-1)}\theta_{lji}(t).$$

Следовательно,

$$DTKx_n = \sum_l \int_{-1}^{1} h_l(t,s) z_n^{(l)}(s) ds + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} c_{i+n+p+M(j-1)} g_{lji}(t). \tag{7.8}$$

Теперь с целью приближения функции $DTKx_n \in C$ посредством полиномов построим следующий агрегат:

$$(B_{n-1}x_n)(t) \equiv \sum_l \int_{-1}^{1} h_{n-1}^l(t,s) z_n^{(l)}(s) ds + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} c_{i+n+p+M(j-1)} g_{n-1}^{lji}(t), \tag{7.9}$$

где h_{n-1}^l и g_{n-1}^{lji} – полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для h_l (по t) и g_{lji} соответственно. По виду (7.9) ясно, что $B_{n-1}x_n \in \Pi_{n-1}$.

В силу (7.8), (7.9), замечания 1 и (3.3) последовательно имеем

$$E_{n-1}(DTKx_n) \le \|DTKx_n - B_{n-1}x_n\|_C \equiv \max_{t\in I} \left| \sum_l \int_{-1}^{1} \left(h_l - h_{n-1}^l\right)(t,s) z_n^{(l)}(s) ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} c_{i+n+p+M(j-1)} (g_{lji} - g_{n-1}^{lji})(t) \right| \le 2\left(\sum_l E_{n-1}^t(h_l)\right) \|z_n\|_{C^{(p)}} + \sum_{l,j,i} |c_{i+n+p+M(j-1)}| E_{n-1}(g_{lji}) \le \tag{7.10}$$

$$\le d_4 \left\{ \sum_l \left[E_{n-1}^t(h_l) + \sum_{j,i} E_{n-1}(g_{lji}) \right] \right\} \|x_n\|,$$

где $d_4 \equiv 2d$, $d \ge 1$. Из (7.7) и (7.10) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le d_5 \left\{ \sum_l \left[E_{n-1}^t(h_l) + \sum_{j,i} E_{n-1}(g_{lji}) \right] \right\} \ln n. \tag{7.11}$$

Тогда на основании (7.11) и леммы 7.1 (см. п. b)) из теоремы 7 (см. [9; гл. 1, § 4]) получаем утверждение теоремы 3 с оценкой (7.3).

Замечание 6. Если h_l (по t), $g_{lji}, DTy \in H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 3 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r+1 \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in (0,1],$$

где $H_\alpha^r(S) \equiv \{f \in C^{(r)}(I) \,|\, \omega(f^{(r)};\Delta) \le S\Delta^\alpha, S = \text{const} > 0\}$, а $\omega(f;\Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ, $0 < \Delta \le 2$.

Для приложений может оказаться полезной

Теорема 4. *Пусть ИДУТР* (5.1) *имеет решение* x^* *вида* (3.1) *при данной правой части* $y \in Y$ *и аппроксимирующий оператор* $A_n \equiv L_n A$ *непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения* $x_n^* = A_n^{-1} L_n y$ *представляется в виде* $\Delta x_n^* = O\{E_{n-1}(DTUx^*) \ln n\}$.

Доказательство легко следует из теоремы 6 (см. [9; гл. 1, § 3]) с учетом лемм 7.1 и 3.2.

8. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ С КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ (ОМККС)

Приближенное решение задачи (5.1), (5.2) построим в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n\left(t;\{c_k\}\right) \equiv f_n(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+p+2+M(j-1)} \delta^{\{i\}}(t - t_j), \tag{8.1}$$

где

$$f_n(t) \equiv (Jz_n)(t) + \sum_{k=0}^{p-1} c_{k+n+2}(t+1)^k, \tag{8.2}$$

а $z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t)$ – кубический сплайн, рассмотренный выше в разд. 4. Неизвестные коэффициенты $c_k = c_k^{(n)}$, $k = \overline{-1, n+\mu+p+1}$, найдем, согласно нашему методу, из СЛАУ $(n+\mu+p+3)$-го порядка

$$\begin{gathered}(DT\eta_n)(s_l) = 0, \quad l = \overline{0,n}, \quad (T\eta_n)^{(k)}(-1) = 0, \quad k = \overline{0, p-1},\\ \eta_n^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}, \\ (DTUx_n)^{(3)}(s_j - 0) = (DTUx_n)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1,\end{gathered} \tag{8.3}$$

где, как и выше, $\eta_n \equiv Ax_n - y$ – невязка приближенного решения, а $\{s_l\}_0^n$ – использованная ранее система узлов коллокации, порождающая сетку (4.1).

Обоснование вычислительного алгоритма (5.1), (5.2), (8.1)–(8.3) дается в следующем утверждении.

Теорема 5. *Пусть ИДУТР* $Ax = 0$ *имеет в* X *лишь нулевое решение и функции* K_l *(по* t*),* θ_{lji}, $l = \overline{0,p}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1,q}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1,3}$. *Тогда метод* (8.1)–(8.3) *обоснованно применим к уравнению* (5.1)*, причем*

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1,3}. \tag{8.4}$$

Доказательство. Конечномерные подпространства основных пространств построим следующим образом:

$$X \supset X_n \equiv J(S_n^3) \oplus \operatorname{span}\{(t+1)^k\}_0^{p-1} \oplus \operatorname{span}\{\delta^{\{i\}}(t - t_j)\}_{i=0;\, j=1}^{m_j-1;\, q},$$

$$Y \supset Y_n \equiv UJ(S_n^3) \oplus \Pi_{\mu+p-1}.$$

Тогда, следуя рассуждениям при доказательстве теоремы 4.3.1 (см. [3; гл. 4, § 3]), несложно показать, что вычислительная схема (8.1), (8.3) ОМККС равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n), \tag{8.5}$$

где $\Gamma_n : Y \to Y_n$ – "сплайновый" оператор, подробно изученный в разд. 4.

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (8.5). Поскольку в силу леммы 4.2 $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n U x_n = U x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$. Следовательно, система (8.1), (8.3) эквивалентна уравнению вида

$$A_n x_n \equiv U x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \tag{8.6}$$

Далее покажем близость операторов A и A_n на X_n. Используя уравнения (7.4) и (8.6), представления (2.4) и (4.4), а также нормы (2.3) и (2.2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|DTKx_n - P_n DTKx_n\|_C. \tag{8.7}$$

На основании (7.8) и (8.1) имеем

$$DTKx_n = \sum_l \int_{-1}^{1} h_l(t,s) f_n^{(l)}(s)ds + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} c_{i+n+p+2+M(j-1)} g_{lji}(t). \tag{8.8}$$

В силу (8.8), (4.3), замечания 1 и определения (3.3) последовательно выводим следующую аппроксимативную оценку:

$$\|DTKx_n - P_n DTKx_n\|_C \equiv \max_{t \in I} \left| \sum_l \int_{-1}^{1} (h_l - P_n^t h_l)(t,s) f_n^{(l)}(s)ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{l,j,i} (-1)^{i+l} c_{i+n+p+2+M(j-1)} (g_{lji} - P_n g_{lji})(t) \right| \le \tag{8.9}$$

$$\leq d_6 n^{-r}\left[2d\left\|f_n\right\|_{(p)} + (p+1)\sum_{j,i}\left|c_{i+n+p+2+M(j-1)}\right|\right] \leq d_8 n^{-r}\left\|x_n\right\|_X,$$

где $d_8 \equiv d_6 d_7$, а $d_7 \equiv \max\{2d, p+1\}$.

Из равенства (8.7) и оценки (8.9) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \left\|A - A_n\right\|_{X_n \to Y} \leq d_8 n^{-r}, \quad r = \overline{1, 3}. \tag{8.10}$$

Тогда, благодаря неравенствам (8.10) и (4.5), из теоремы 7 (см. [9; гл. 1, § 4]) следует утверждение теоремы 5 с оценкой (8.4). Требуемое доказано.

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУТР (1.1) существенную роль будет играть

Теорема 6. *Пусть ИДУТР* (1.1) *имеет решение вида*

$$x^*(t) \equiv z^*(t) + \sum_{j,i}\gamma_{ji}^*\delta^{\{i\}}(t - t_j), \quad Dz^* = DTUx^* \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 3}, \tag{8.11}$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в ОМККС непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O\left\{\left\|Dz^* - P_n Dz^*\right\|_C\right\} = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1, 3}. \tag{8.12}$$

Доказательство. В силу теоремы 6 (см. [9; гл. 1, § 3]) и структуры приближенного уравнения (8.6) имеем

$$\Delta x_n^* = O\left\{\left\|\Gamma_n\right\|\left\|x^* - x_n\right\|_X\right\}, \tag{8.13}$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его в виде

$$x_n(t) \equiv (JP_n DTUx^*)(t) + \sum_{k=0}^{p-1}(TUx^*)^{(k)}(-1)(t+1)^k/k! + \sum_{j,i}\gamma_{ji}^*\delta^{\{i\}}(t - t_j). \tag{8.14}$$

Тогда требуемая оценка (8.12) следует из (8.13), (8.11), (8.14), (3.3), леммы 4.1 с учетом замечания 4:

$$\Delta x_n^* \leq d_9\left\|JDz^* - JP_n Dz^*\right\|_X \equiv d_9\left\|JDz^* - JP_n Dz^*\right\|_{(p)} \equiv$$
$$\equiv d_9\left\|Dz^* - P_n Dz^*\right\|_C \leq d_{10} n^{-r}, \quad r = \overline{1, 3}.$$

9. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУТР

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, причем $N \to \infty$, $n \to \infty$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n, отображающих Y на Y_n. Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{9.1}$$

и

$$\lambda_n A x_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.2}$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (9.1) и (9.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (9.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [9; гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n}\inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \tag{9.3}$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F}(f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*}\left\|x^* - x_n^*\right\|_X,$$

назовем оптимальной оценкой погрешности всевозможных прямых проекционных методов ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнения (9.1) на классе F.

Определение 1 (см. [9, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X$, $Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0 : Y \to Y_n^0$, $\lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \asymp V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0) \quad (N \to \infty). \tag{9.4}$$

Тогда метод (9.1), (9.2) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется оптимальным по порядку точности на классе F среди всех прямых проекционных методов $\lambda_n(\lambda_n \in \Lambda_n)$ решения уравнений (9.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно K_l, $l = \overline{0, p}$), ИДУТР (1.1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YC^{(r)}$, т.е. при K_l (по t), θ_{lji}, $l = \overline{0, p}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, q}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 3}$. Тогда в силу теоремы 2 имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in X \,|\, Ax^* = y;\, K_l,\, \theta_{lji},\, y \in YC^{(r)}\} = XC^{(r)},$$

где $XC^{(r)} \equiv \{x \in X \,|\, DTUx \in C^{(r)}\}$.

Далее пусть

$$X_n^0 = J(S_n^3) \oplus \operatorname{span}\{(t+1)^k\}_0^{p-1} \oplus \operatorname{span}\{\delta^{\{i\}}(t - t_j)\}, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q},$$

$$Y_n^0 \equiv UJ(S_n^3) \oplus \Pi_{\mu+p-1},$$

а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n\}$ – семейство всех линейных операторов $\lambda_n : Y \to Y_n^0$.

Теорема 7. *Пусть* $F = YC^{(r)}$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. *Тогда*

$$V_N(F) \asymp N^{-r}, \quad N = n + \mu + p + 3, r = \overline{1, 3}, \tag{9.5}$$

и этот оптимальный порядок реализует ОМККС.

Доказательство. Заметим, что из определения N-го колмогоровского поперечника $d_N(L, X)$ множества L в нормированном пространстве $X \equiv D^{(p)}\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ (см., например, [16; гл. 1, § 1]) и леммы 3.2 следует равенство

$$d_N(L, X) = d_{N-\mu-p}(DTU(L), C), \quad N > \mu + p,$$

откуда, с учетом $d_l(C^{(r)}, C) \asymp l^{-r} (l \in \mathbb{N})$ (см., например, [16; гл. 3, § 3]), вытекает слабая эквивалентность

$$d_N(XC^{(r)}, X) \asymp N^{-r}. \tag{9.6}$$

Далее, известно (см. [9; гл. 4, § 2]), что $V_N(F) \geq d_N(X^*, X)$. Следовательно, из (9.6) следует, что

$$V_N(F) \geq d_N(XC^{(r)}, X) \asymp N^{-r}. \tag{9.7}$$

С другой стороны, согласно (9.3) и теореме 6 находим оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XC^{(r)}} \left\| x^* - x_n^* \right\|_X = O(N^{-r}), \quad x_n^* = A_n^{-1}\Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (9.7), (9.4) получаем утверждение теоремы 7 с оценкой (9.5). Требуемое доказано.

10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 7. В силу определения нормы в $X \equiv D^{(p)}\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 8. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\eta_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 5, а именно, из нее вытекает простое следствие: если исходные данные уравнения (1.1) принадлежат классу $YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 3}$, то в условиях теоремы 5 справедлива оценка $\left\|\eta_n^*\right\|_Y = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 3}$.

Замечание 9. Поскольку $C^{(0)}\{\overline{0};\overline{\tau}\} \equiv C \equiv D^{(0)}\{\overline{o};\overline{\tau}\}$, при $m_j = 0$, $j = \overline{1,q}$ и $p = 0$ ИДУТР (1.1) преобразуется в интегральное уравнение II рода в C, а предложенный метод (8.1)–(8.3) – в соответствующий вариант метода коллокации с кубическими сплайнами для уравнения II рода, причем $DTy \equiv y$, $h_0 \equiv K_0$. Поэтому теорема 5 содержит в себе соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближенного решения уравнений II рода в классе C, при этом погрешность характеризуется неравенством $\left\|x_n^* - x^*\right\|_C = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 3}$.

Замечание 10. Следуя рассуждениям в доказательстве теоремы 4.5.1 (см. [3; гл. 4, § 5]), можно установить тот факт, что метод (7.1), (7.2) оптимален по порядку точности на некотром классе F, порожденном известным классом H_ω^r, среди всех “полиномиальных” проекционных методов решения уравнения (1.1) в пространстве $X \equiv D^{(p)}\{\overline{m};\overline{\tau}\}$.

Замечание 11. Так как в условиях теорем 3 и 5 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\left\|A_n^{-1}\right\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad n \geq n_1,$$

то (см. [9; гл. 1, § 5]) очевидно, что предложенные в настоящей работе прямые методы для ИДУТР (1.1) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУТР (1.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленными являются также СЛАУ (7.2) и (8.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006.176 с.
4. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
5. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
6. *Габбасов Н.С.* Теоря разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 9. С. 1216–1226.
7. *Габбасов Н.С.* Новые варианты сплайн-методов для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37. № 10. С. 1377–1385.
8. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае// Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
10. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
11. *Габбасов Н.С.* К теории линейных интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 9. С. 1192–1201.
12. *Габбасов Н.С.* Новый прямой метод решения интегральных уравнений первого рода // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 12. С. 2122–2127.
13. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
14. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
15. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре // Дифференц. ур-ния. 2009. Т. 45. № 9. С. 1341–1348.
16. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.